Endliche Spiegelungsgruppen

Vortrag zum ersten Kapitel von Humphreys, 16.11.2012

Nadine Friesen und Antje Tasche

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt $(\ ,\ )$ versehen ist, also ein Euklidischer Vektorraum.

(1.1) Definition
Eine *Spiegelung* ist eine lineare Abbildung s_a auf V, die eine Hyperebene H_a punktweise fest lässt und einen Vektor $a \neq 0$, der orthogonal zu H_a steht, auf sein Negatives schickt.

(1.3) Lemma
Sei $t \in O(V)$ und $a \neq 0$ ein Vektor aus V. Dann gilt $ts_at^{-1} = s_{ta}$. Insbesondere gilt für $w \in W$, dass $s_{wa} \in W$, wenn $s_a \in W$.

(1.4) Definition
Eine endliche Menge Φ von Vektoren ungleich Null in V, die die Bedingungen

1. $\Phi \cap \mathbb{R}a = \{a, -a\}$ für alle $a \in \Phi$ und
2. $s_a(\Phi) = \Phi$ für alle $a \in \Phi$

erfüllt, nennt man *Wurzelsystem*. Die Elemente von Φ heißen *Wurzeln*.

(1.5) Lemma
Jede Gruppe W, die von einem Wurzelsystem Φ erzeugt wird, ist endlich.

(2.1) Definition
Wir bezeichnen mit dem Begriff *Totalordnung* auf V eine transitive Relation „$<$“ auf V, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für zwei Elemente $\lambda, \mu \in V$ gilt genau eine der drei Eigenschaften $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ und $\lambda > \mu$.
2. Für alle $\lambda, \mu, \nu \in V$ gilt, falls $\mu < \nu$, dann ist $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.
3. Für alle $\mu, \nu \in V$ mit $\mu < \nu$ und $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ gilt, falls $c > 0$, dann ist $c\mu < c\nu$ und falls $c < 0$, dann ist $c\mu > c\nu$.

(2.2) Definition
Ein *positives System* ist eine Teilmenge Π eines Wurzelsystems Φ, die alle (bezüglich einer Totalordnung auf V) positiven Wurzeln von Φ enthält.
Die Menge $-\Pi := \{-a \mid a \in \Pi\}$ bezeichnen wir als *negatives System*.

(2.3) Definition
Eine Teilmenge Δ von Φ nennt man *einfaches System*, wenn Δ eine Basis für $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ in V ist und jedes $a \in \Phi$ sich als Linearkombination von Elementen aus Δ schreiben lässt, wobei alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben (alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv). Die Elemente von Δ heißen *einfache Wurzeln*.

(2.4) Satz

1. Wenn Δ ein einfaches System in Φ ist, dann gibt es ein eindeutiges positives System, das Δ enthält.

2. Jedes positive System Π in Φ enthält ein eindeutiges einfaches System. Insbesondere existieren einfache Systeme.

(2.5) Korollar
Sei Δ ein einfaches System in Φ. Dann gilt $(a, b) \leqslant 0$ für alle $a \neq b \in \Delta$.

(2.6) Definition
Die Kardinalität eines einfachen Systems Δ in Φ bezeichnet man als den *Rang* von W.

(3.1) Lemma
Sei Δ ein einfaches System und Teilmenge eines positiven Systems Π. Dann gilt, falls $a \in \Delta$, dass $s_a(\Pi \setminus \{a\}) = \Pi \setminus \{a\}$.

(3.2) Satz
Für zwei positive Systeme Π und Π' von Φ gibt es ein $w \in W$ mit $w(\Pi) = \Pi'$.

(3.3) Folgerung
Für zwei einfache Systeme $\Delta \subseteq \Pi$ und $\Delta' \subseteq \Pi'$ von Φ gibt es ein $w \in W$ mit $w(\Delta) = \Delta'$.

(4.1) Definition
Mit *einfachen Spiegelungen* bezeichnen wir die Spiegelungen s_a, für die gilt, dass a aus Δ ist.

(4.2) Definition
Ein $b \in \Phi$ lässt sich eindeutig schreiben als $b = \sum_{a \in \Delta} c_a a$. Wir nennen $\sum c_a$ die *Höhe* von b (im Bezug zu Δ), kurz $ht(b)$.

(4.3) Satz
Für ein festes einfaches System Δ wird W von den einfachen Spiegelungen s_a, $a \in \Delta$, erzeugt.

(4.4) Korollar
Sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System. Dann existiert für jedes $b \in \Phi$ ein $w \in W$ mit $w(b) \in \Delta$.