Extremale Gitter und Hilbertsche Modulformen

Zusammenfassung

David Dursthoff, März 2017

Extremale Gitter sind bemerkenswerte Objekte der Zahlentheorie. Sie definieren viele der dichtesten bekannten Kugelpackungen, sehr gute sphärische Designs und haben häufig eine interessante Automorphismengruppe. Wichtige Beispiele sind das $\mathbb{E}_8$- und das Leech-Gitter Λ_{24} (beide extremal unimodular), sowie das Barnes-Wall-Gitter BW_{16} (extremal 2-modular) und das Coxeter-Todd-Gitter K_{12} (extremal 3-modular).

Eine faszinierende Eigenschaft gerader unimodularer (oder p-modularer) Gitter ist, dass ihre Theta-Reihe eine elliptische Modulform zur ganzen Modulgruppe (zur Fricke-Gruppe vom Grad p) ist. Da die Theorie der elliptischen Modulformen weit entwickelt ist, liefert dies viele Eigenschaften für Gitter. So kann man zum Beispiel extremale Gitter als Gitter, deren Theta Reihe bei unendlich den Wert 1 mit höchstmöglicher Ordnung annimmt, definieren.

Über total reellen Zahlkörpern kann die gleiche Theorie entwickelt werden. Wir beschränken uns auf reell quadratische Zahlkörper. Wir betrchten Gitter (Λ, Q) über einem Zahlkörper, unterschieden in drei Typen (je nachdem, ob Strahl- und Klassenzahl übereinstimmen, und ob das untersuchte Gitter unimodular oder Spur-unimodular ist). Zu einem total positiven Körperelement α können wir ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter $(\Lambda, \mathrm{tr}(\alpha Q))$, genannt Spurgitter, definieren. Wir ordnen unseren Gittern jeweils zwei Spurgitter (Λ_1, Q_1) und (Λ_2, Q_2), abhängig vom Typ, zu. Diese beschreiben (Λ, Q) eindeutig.

Damit können wir die Theta-Reihe von (Λ, Q) als gemeinsame Theta-Reihe der beiden Spurgitter definieren. Diese ist zunächst eine formale Potenzreihe in zwei Variablen q_1 und q_2. Durch passende Interpretationen von q_1 und q_2 ist diese eine Hilbertsche Modulform zur vollen Hilbertschen Modulgruppe.

In gleicher Weise kann eine Hilbertsche Modulform f in einer q-Erweiterung geschrieben werden, d.h. als formale Potenzreihe in q_1 und q_2. Dies ermöglichte eine gute Implementierung in Computeralgebrasysteme. Außerdem können die Koeffizienten mit Hilfe der lexikographischen Ordnung geordnet werden. Da der Raum der Modulformen gleichen Gewichts endlichdimensional ist, kann man eine eindeutige extremale Modulform auszeichnen, die wieder bei unendlich den Wert 1 mit höchstmöglicher Ordnung besitzt.

Ein Gitter heißt extremal, wenn seine Thetareihe eine extremale Hilbertsche Modulform ist. In meiner Arbeit konstruiere, untersuche und klassifiziere ich extremale Gitter über den Zahlkörpern $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Dafür erweitere ich unter anderem eine Methode von Bachoc und Venkov. Diese Methode beruht auf der Berechnung sogenannter Konfigurationszahlen, welche zu einem festen Vektor die Anzahl der Gittervektoren gleicher Länge mit gleichem Skalarprodukt mit diesem Vektor angeben. Dabei nutzt man nicht das konkrete Gitter, sondern erhält Gleichungen an die Konfigurationszahlen von sphärischen Thetareihen. Diese sind Hilbertsche Modulformen, also können aus der bekannten Ringstruktur der Modulformen Gleichungen an die Konfigurationszahlen bestimmt werden. Häufig ist es möglich, alle extremalen Gitter mit vorgegebenen Konfigurationszahlen zu berechnen.

Anzahlen bekannter extremaler Gitter

Körper	$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$	$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$	$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$	
Typ	(i)	(i)	(ii)	(iii)
Dim. 2	-	-	1	-
4	1	1	2	1
6	-	-	1	-
8	2	1	3	≥ 1
10	-	-	21	-
12	1	5		≥ 1
16	≥ 2	≥ 1	0	0
20		≥ 1	0	0
24	≥ 1	≥ 1	0	0