Einklassige Geschlechter positiv definiter dreidimensionaler Gitter

David Lorch

Graduiertenkolleg Experimentelle und konstruktive Algebra

18. Oktober 2011

Überblick

- Gitter: Erinnerung an einige Grundlagen
- Geschlechter von Gittern
- Wiedererkennung von Geschlechtern
- G. L. Watsons Klassifikation
- Vervollständigung der Klassifikation
- Ergebnisse

Gitter

Definition

Unter einem Gitter (L, b) *verstehen wir einen freien* $\mathbb{Z}$*-Modul* $L = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ *von endlichem Rang* $n \in \mathbb{N}$ *zusammen mit einer symmetrischen positiv definiten Bilinearform* $b : L \times L \to \mathbb{Q}$.

Wir schreiben auch L_p für $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L$ und L_{-1} für $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L$.

Definition

Zu einem Gitter (L, b) *vom Rang* n *mit Grammatrix* A *definiert* $q_b : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$, $v \mapsto vAv^{tr}$ *die zugehörige quadratische Form.*

Gitter

Definition

Zu einem Gitter (L, b) *im euklidischen Vektorraum* $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L, b)$ *ist*

$$L^{\#} := \{v \in V \mid b(v, l) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } l \in L\}$$

das zugehörige duale Gitter.

Bemerkung

- *Die Grammatrix* A *eines rationalen Gitters* L *ist genau dann ganzzahlig, wenn* $L \subseteq L^{\#}$.
- A *ist Basiswechselmatrix von* L *zu* $L^{\#}$.
- A^{-1} *ist eine Grammatrix von* $L^{\#}$.

Isometrien von Gittern

Definition (Isometrie)

Eine Isometrie von Gittern (L_1, b_1) *und* (L_2, b_2) *ist ein Gruppenhomomorphismus* $\varphi : L_1 \to L_2$ *mit* $b_2(\varphi(v), \varphi(w)) = b_1(v, w)$ *für alle* $v, w \in L_1$*.*
Existiert eine bijektive Isometrie $\varphi : L_1 \to L_2$*, dann heißen* L_1 *und* L_2 *isometrisch, kurz* $L_1 \cong L_2$*.*

Definition (Automorphismengruppe)

$$Aut(L) := \{\varphi : L \to L \mid \varphi \text{ bijektive Isometrie}\}$$

heißt die Automorphismengruppe eines Gitters L*.*

Isometrien von Gittern

Bemerkung

Da wir für Gitter (L, b) die Bilinearform b als definit voraussetzen, sind Isometrien stets injektiv.

Satz

Für ein definites Gitter (L, b) ist $|Aut(L)| < \infty$.

Beweis.

Die durch eine Basis von L definierte Maximumsnorm ist äquivalent zur durch b definierten Norm $v \mapsto \sqrt{b(v, v)}$ im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} L, b)$. Nur endlich viele Vektoren kommen also als Bild eines Basisvektors b_i der Länge $b(b_i, b_i)$ in Frage. □

Geschlechter von Gittern

Definition (Geschlecht eines Gitters)

Zwei $\mathbb{Z}$-Gitter L, L' liegen im selben Geschlecht $\mathrm{Genus}(L)$, falls

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L \cong \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L' \text{ und } \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L' \text{ für alle } p \in \mathbb{P}.$$

Isometrische Gitter liegen daher stets im selben Geschlecht.

Lokal-Global-Prinzip

Für rationale Äquivalenz gibt es ein Lokal-Global-Prinzip:

Reguläre rationale quadratische Räume (E_1, q_1) und (E_2, q_2) sind genau dann isomorph, wenn alle ihre Vervollständigungen isomorph sind:

$$(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_1, q_1) \cong (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_2, q_2) \text{ und}$$

$$(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} E_1, q_1) \cong (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} E_2, q_2) \text{ für alle } p \in \mathbb{P}.$$

Konsequenz: die Klassifikation (bis auf Äquivalenz) rationaler quadratischer Formen wird wesentlich vereinfacht:

Satz

Sei (V, q) ein regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{Q}^*$. Genau dann ist $t \in q(V)$, wenn $t \in q(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} V)$ und $t \in q(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} V)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

Lokal-Global-Prinzip für Gitter?

Für Gitter ist ein analoges Lokal-Global-Prinzip im Allgemeinen **falsch**:

ist $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L_1, b_1) \cong (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L_2, b_2)$ und $(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L_1, b_1) \cong (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L_2, b_2)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ (d.i. die Definition von „liegen im selben Geschlecht“), so existiert nicht notwendig eine Isometrie über $\mathbb{Z}$.

Es gilt aber der

Satz

Sei (L, b) ein reguläres $\mathbb{Z}$-Gitter und $t \in \mathbb{Q}^*$ mit $t \in q_b(L_{-1})$ sowie $t \in q_b(L_p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Dann gibt es ein Gitter $(L', b') \in Genus(L)$ mit $t \in q_{b'}(L')$.

Geschlechter von Gittern

Definition (Geschlecht eines Gitters)

Zwei $\mathbb{Z}$-Gitter L, L' liegen im selben Geschlecht $Genus(L)$, falls

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L \cong \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L' \text{ und } \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L' \text{ für alle } p \in \mathbb{P}.$$

Reskalierte Gitter

Definition

Zu einem Gitter (L, b) *und* $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ *bezeichnet* ${}^{\alpha}L$ *das reskalierte Gitter* $(L, \alpha b)$. *Die Menge* $\bigcup_{0<\alpha\in\mathbb{R}}[{}^{\alpha}L]$ *heißt Ähnlichkeitsklasse von* L.

Bemerkung

Jede Ähnlichkeitsklasse rationaler Gitter (L, b) *enthält genau ein primitives ganzzahliges Gitter* $\mathrm{Norm}(L) = {}^{\alpha}L$. *(Wähle* α *als den ggT der Einträge einer Grammatrix von* (L, b).*)*

Gitter sind nicht isometrisch zu ihren Reskalierten ${}^{\alpha}L$ (für $1 \neq \alpha$). Um überhaupt endlich viele Geschlechter als Ergebnis einer Klassifikation zu bekommen, klassifiziert man *Ä(hnlichkeits)-Geschlechter*

$$\{\mathrm{Genus}({}^{\alpha}L) \mid 0 < \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Endlichkeit der Klassenzahl

Allgemein gilt für ein rationales Gitter L:

Satz (Folgerung aus einem Satz von Hermite)

$Genus(L) = \{[L_1] \sqcup [L_2] \sqcup \cdots \sqcup [L_s]\}$ *für ein* $s \in \mathbb{N}$.

Beispiel

Beispiel für ein Geschlecht mit Klassenzahl > 1:

$$L := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \text{ und } L' := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- $L \ncong L'$: es gilt
  $q_L = x^2+xy+6y^2$, $q_{L'} = 3x^2+xy+2y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2+5x^2+3y^2\right)$.
  q_L stellt 1 dar, $q_{L'}$ nicht.
- Aber $q_{L'}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 1$, d.h. ein Gitter mit Grammatrix (2) spaltet in den Komplettierungen an $\mathbb{Z}_p$ mit $p > 2$ als orthogonaler Summand ab.
- Da $\det(L) = \det(L')$, lassen sich also beide Gitter über $\mathbb{Z}_p$ mit $p > 2$ als $\mathrm{diag}(2, \frac{23}{2})$ diagonalisieren. Also $L_p \cong L'_p$.
- Ohne Beweis: es ist auch $L_2 \cong L'_2$. (Modulo 2 sind die zugehörigen quadratischen $\mathbb{F}_2$-Vektorräume isomorph, dies lässt sich zu einer Isometrie der $\mathbb{Z}_2$-Moduln fortsetzen.)

Einklassige Gitter

Definition

Ein Gitter L heißt einklassig, falls Genus$(L) = \{[L]\}$.

Satz (G. L. Watson, 1963)

Positiv definite einklassige rationale Gitter treten genau in Dimension 1 bis 10 auf.

Einklassige dreidimensionale Gitter

G. L. Watson, 1972: es gibt 787 einklassige $\ddot{A}$-Geschlechter positiv definiter rationaler dreidimensionaler Gitter.

G. L. Watson, 1975: es gibt 790 einklassige $\ddot{A}$-Geschlechter positiv definiter rationaler dreidimensionaler Gitter.

(G. L. Watson, 1972-1985: Dimension $4, 5, 6\dagger, 7, 8, 9, 10$.
Dimension 4: 27 Ä-Geschlechter, Dimension 10: 3.)

Watsons Methodik (dreidimensionale einklassige Gitter):

- kombinatorische Bestimmung einklassiger quadratfreier Ä-Geschlechter (20 Stück)
- Methode des Abstiegs von Gittern nicht quadratfreier Determinante zu quadratfreien Gittern, ohne die Klassenzahl zu erhöhen.

Warum positiv definite Gitter?

- Geschlechter indefiniter Gitter können über das Spinorgeschlecht klassifiziert werden. In Dimension ≥ 3 ist dieses einklassig und fällt (meist) mit dem Geschlecht zusammen.
- Die Eigenschaften eines negativ definiten Gitters (L, b) übertragen sich auf die des positiv definiten Gitters $(L, -b)$.

Wiedererkennung von Geschlechtern

Gesucht: vollständige Systeme von Invarianten der Isometrieklassen von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ und von $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L$ (für alle $p \in \mathbb{P}$).

Überblick über die Invarianten:

- über $\mathbb{R}$: Signatur (Trägheitssatz von Sylvester)
- über $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$: trennende Invarianten lassen sich aus der *Jordanzerlegung* des Gitters (L, b) ablesen.
- über $\mathbb{Z}_2$: Jordanzerlegung ist möglich, aber nicht eindeutig.

Jordanzerlegung

Sei $p \in \mathbb{P}$ und (L, b) ein reguläres $\mathbb{Z}_p$-Gitter.

- Falls $p \neq 2$, so lässt sich L diagonalisieren. Die Diagonalisierung ist (im Wesentlichen) eindeutig.
- Falls $p = 2$, so lässt sich L in eine orthogonale Summe ein- oder zweidimensionaler Gitter zerlegen.

In beiden Fällen erhält man eine orthogonale Summe

$$L = (L_a, p^a b_a) \perp (L_{a+1}, p^{a+1} b_{a+1}) \perp \ldots \perp (L_c, p^c b_c)$$

für eindeutige $a \leq c \in \mathbb{Z}$ mit $\dim(L_a) > 0$ und $\dim(L_c) > 0$ mit unimodularen (L_i, b_i).

Die $(L_i, p^i b_i)$ heißen *Jordankomponenten* des Gitters L.

2-adische Jordanzerlegung

Betrachte ein Gitter $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vermöge des $\mathbb{Z}_2$-invertierbaren Basiswechsels $b_1' := b_1$, $b_2' := b_2 + b_3$, $b_3' := \frac{2}{7} b_1 - \frac{4}{7} b_2 + \frac{3}{7} b_3$ findet man eine weitere Grammatrix von L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Aber: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ncong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ als $\mathbb{Z}_2$-Gitter (betrachte det mod 8).

Ein Symbol für das Geschlecht

Ein System trennender Invarianten für Zugehörigkeit zu Genus(L) ist gegeben durch:

1. Die Signatur von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L$
2. Dimensionen und Determinanten der Jordankomponenten für ungerade $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid \det(L)$
3. Normalisierte Form der Invarianten für $p = 2$: Dimensionen, Determinanten, gerade/ungerade, falls ungerade: Spur einer Diagonalisierung der Jordankomponenten.

Beispiel: Berechnung des Geschlechtssymbols

Betrachte wieder das Gitter $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Die Signatur ist $(3, 0)$.

Beispiel: Berechnung des Geschlechtssymbols

Betrachte wieder das Gitter $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Die Signatur ist $(3, 0)$.
- (Eine) 2-adische Jordanzerlegung ist $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \perp (2)$ mit 2-adischem Symbol $1^{-2} 2^1{}_2$.

Beispiel: Berechnung des Geschlechtssymbols

Betrachte wieder das Gitter $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Die Signatur ist $(3, 0)$.
- (Eine) 2-adische Jordanzerlegung ist $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \perp (2)$ mit 2-adischem Symbol $1^{-2} 2^1{}_2$.
- Für $2 \neq p \in \mathbb{P}$ ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar als $\mathrm{diag}(2, 6)$ via $b_1' := b_1 - b_2$, $b_2' := 2b_2$.
  Das 3-adische Symbol ist $1^2 3^{-1}$.

Beispiel: Berechnung des Geschlechtssymbols

Betrachte wieder das Gitter $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Die Signatur ist $(3, 0)$.
- (Eine) 2-adische Jordanzerlegung ist $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \perp (2)$ mit 2-adischem Symbol $1^{-2} {2^1}_2$.
- Für $2 \neq p \in \mathbb{P}$ ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar als $\mathrm{diag}(2, 6)$ via $b_1' := b_1 - b_2,\ b_2' := 2b_2$.
  Das 3-adische Symbol ist $1^2 3^{-1}$.
- Weitere Primzahlen teilen $\det(L) = 6$ nicht.

Maßformel

Definition (Maß)

Sei L ein positiv definites Gitter von Rang ≥ 2, $Genus(L) = \{[L_1], \ldots, [L_s]\}$. Dann heißt

$$mass(L) := \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|Aut(L_i)|}$$

das Maß von L.

Bemerkung

Ist $Genus(L) = \{[L_1]\}$, dann gilt $mass(L) \leq \frac{1}{2}$ und $mass(L)^{-1} \in \mathbb{N}$.

Anwendung auf dreidimensionale Gitter

Bemerkung

*Das Maß eines Gitters L lässt sich aus dem Geschlechtssymbol von L berechnen („***Maßformel***").*

$$mass(L) = \prod_{p \in \mathbb{P}, p | 2 \cdot \det(L)} m_p(L)$$

Für dreidimensionale Gitter:
$m_2(L) \geq \frac{1}{64}$, alle $m_p(L)$ für $p > 2$ „deutlich" > 1.

Watsons Strategie

Sei $\mathcal{L}_n$ die Menge aller Gitter im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, (\,,\,))$.
Die Transformation

$$\mathrm{Wat}_p : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n, L \mapsto \mathrm{Norm}(L \cap pL^{\#}) :$$

1. definiert eine wohldefinierte Transformation von $\ddot{A}$-Geschlechtern von Gittern
2. erhöht die Klassenzahl nicht
3. erniedrigt die p-Bewertung von $\det(\mathrm{Norm}(L))$, solange es Elementarteiler mit p-Bewertung > 1 gibt.

Beispiel

Betrachte $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $A := \operatorname{diag}(1, 6, 27)$ über $\mathbb{Z}_3$.

- Wie immer ist A die Basiswechselmatrix von L zu $L^{\#}$.

Beispiel

Betrachte $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $A := \mathrm{diag}(1, 6, 27)$ über $\mathbb{Z}_3$.

- Wie immer ist A die Basiswechselmatrix von L zu $L^{\#}$.
- Also ist $3L_3^{\#} = \langle 3b_1, 3\frac{1}{6}b_2, 3\frac{1}{27}b_3 \rangle = \langle 3b_1, b_2, \frac{1}{9}b_3 \rangle$.

Beispiel

Betrachte $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $A := \mathrm{diag}(1, 6, 27)$ über $\mathbb{Z}_3$.

- Wie immer ist A die Basiswechselmatrix von L zu $L^{\#}$.
- Also ist $3L_3^{\#} = \langle 3b_1, 3\frac{1}{6}b_2, 3\frac{1}{27}b_3 \rangle = \langle 3b_1, b_2, \frac{1}{9}b_3 \rangle$.
- $L_3 \cap 3L_3^{\#} = \mathrm{Wat}_3(L) = \langle 3b_1, b_2, b_3 \rangle$.

Beispiel

Betrachte $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ mit Grammatrix $A := \operatorname{diag}(1, 6, 27)$ über $\mathbb{Z}_3$.

- Wie immer ist A die Basiswechselmatrix von L zu $L^{\#}$.
- Also ist $3L_3^{\#} = \langle 3b_1, 3\frac{1}{6}b_2, 3\frac{1}{27}b_3 \rangle = \langle 3b_1, b_2, \frac{1}{9}b_3 \rangle$.
- $L_3 \cap 3L_3^{\#} = \mathrm{Wat}_3(L) = \langle 3b_1, b_2, b_3 \rangle$.
- Es ist $\nu_3(\det(L)) = 4$, $\nu_3(\det(\mathrm{Wat}_3(L)) = 1$.

Wat_p vertauscht mit Isometrien

Satz

Ist $\sigma : L \to L'$ Isometrie, so gilt $Wat_p(\sigma(L)) = \sigma(Wat_p(L))$.

Beweis.

σ bildet auch $L^\#$ auf $L'^\#$ ab. □

Insbesondere bildet Wat_p also isometrische Gitter in dieselbe Isometrieklasse ab.

Wat_p ist wohldefiniert auf Geschlechtern

Satz

Für $p \in \mathbb{P}$ definiert Wat_p eine Funktion auf Geschlechtern von Gittern, d.h. $L' \in Genus(L) \Rightarrow Genus(Wat_p(L)) = Genus(Wat_p(L'))$:

Beweis.

Die p-adische Isometrie $\varphi : L_p \to L'_p$ schränkt ein zu einer Isometrie der Teilräume $L_p \cap p{L_p}^\#$ und $L'_p \cap p{L'_p}^\#$. $\square$

Wat_p erhöht die Klassenzahl nicht

Satz

Für ein Gitter L gilt $\mathit{Genus}(\mathit{Wat}_p(L)) = \mathit{Wat}_p(\mathit{Genus}(L))$.

Neuklassifizierung: Voraussetzungen

In *MAGMA* sind implementiert:

- Maßformel
- Berechnung von Geschlechtssymbolen
- (Isometrietests, Automorphismengruppen etc.)

Neuklassifizierung: Vorgehensweise

- Generiere Symbole aller dreidimensionalen Geschlechter $\mathrm{Genus}(L)$ mit quadratfreier Determinante und $\mathrm{mass}(L) \leq \frac{1}{2}$ sowie $\frac{1}{\mathrm{mass}(L)} \in \mathbb{N}$.
- Finde Grammatrizen dieser Symbole und überprüfe auf Einklassigkeit.
- Generiere so lange Urbilder unter Wat_p für in Frage kommende $p \in \mathbb{P}$, bis keine neuen einklassigen Gitter mehr gefunden werden. Auch hier liefert die Maßformel eine Abbruchbedingung.

Ergebnisse

- Watsons Liste 20 einklassiger Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter gerade ist und quadratfreie Diskriminante hat, ist vollständig.

Ergebnisse

- Watsons Liste 20 einklassiger Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter gerade ist und quadratfreie Diskriminante hat, ist vollständig.
- Es gibt 26 Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter quadratfreie Determinante hat.

Ergebnisse

- Watsons Liste 20 einklassiger Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter gerade ist und quadratfreie Diskriminante hat, ist vollständig.
- Es gibt 26 Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter quadratfreie Determinante hat.
- Aus den von Watson aufgelisteten 68 Endpunkten der Transformation Wat_p lassen sich nur 784 verschiedene Ä-Geschlechter konstruieren, nicht die behaupteten 790.

Ergebnisse

- Watsons Liste 20 einklassiger Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter gerade ist und quadratfreie Diskriminante hat, ist vollständig.
- Es gibt 26 Ä-Geschlechter, deren primitiver Vertreter quadratfreie Determinante hat.
- Aus den von Watson aufgelisteten 68 Endpunkten der Transformation Wat_p lassen sich nur 784 verschiedene Ä-Geschlechter konstruieren, nicht die behaupteten 790.
- Sukzessive Urbildberechnung der quadratfreien Geschlechter unter Wat_p liefert sogar 794 Ä-Geschlechter. (Das sind alle!)

Neue und wieder aufgetauchte einklassige Geschlechter

#	Symbol	Determinante	Maß$^{-1}$
1	$1_{II}^{2}16_{5}^{-1}, 1^{2}3^{1}$	$48 = 2^{4}3^{1}$	4
2	$1_{II}^{2}16_{7}^{1}, 1^{1}3^{2}$	$144 = 2^{4}3^{2}$	4
3	$1_{II}^{2}16_{5}^{-1}, 1^{1}3^{1}9^{1}$	$432 = 2^{4}3^{3}$	2
4	$1_{5}^{-1}16_{II}^{2}, 1^{2}3^{1}$	$768 = 2^{8}3^{1}$	4
5	$1_{7}^{1}16_{II}^{2}, 1^{1}3^{2}$	$2304 = 2^{8}3^{2}$	4
6	$1_{II}^{-2}16_{7}^{1}, 1^{1}3^{1}9^{1}, 1^{2}7^{-1}$	$3024 = 2^{4}3^{3}7^{1}$	2
7	$1_{5}^{-1}16_{II}^{2}, 1^{1}3^{1}9^{1}$	$6912 = 2^{8}3^{3}$	2
8	$1_{II}^{-2}16_{1}^{1}, 1^{1}3^{1}9^{1}, 1^{-1}7^{2}$	$21168 = 2^{4}3^{3}7^{2}$	2
9	$1_{7}^{1}16_{II}^{-2}, 1^{1}3^{1}9^{1}, 1^{2}7^{-1}$	$48384 = 2^{8}3^{3}7^{1}$	2
10	$1_{1}^{1}16_{II}^{-2}, 1^{1}3^{1}9^{1}, 1^{-1}7^{2}$	$\underline{338688} = 2^{8}3^{3}7^{2}$	2

Ende.