Eva Zerz SS 2006

Algebraische Geometrie – Übung 1

Abgabe bis: entfällt, Besprechung am: Dienstag, 11.4.

1. Seien K ein Körper, m, n positive ganze Zahlen, $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und
$$f : K^n \to K^m, \quad a \mapsto f(a) := (f_1(a), \ldots, f_m(a)).$$
Ist f Zariski-stetig?

   Beschreiben Sie alle Zariski-offenen Teilmengen von K (was passiert, wenn K endlich ist?).

   Sei K unendlich. Zeigen Sie: Für jedes $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ist $K^n \setminus \mathcal{V}(f)$ unendlich, insbesondere ist $\mathcal{V}(f) \neq K^n$. Schließen Sie daraus: Je zwei nichtleere Zariski-offene Mengen haben nichtleeren Schnitt. (Also ist die Zariski-Topologie nicht Hausdorffsch.) Andererseits hat die Zariski-Topologie folgende schwächere Trennbarkeitseigenschaft: Zu $a \neq b \in K^n$ gibt es eine offene Menge U mit $a \in U$, aber $b \notin U$.

2. Stellen Sie $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{R}^2$ graphisch dar (mit Hilfe eines Programmpakets Ihrer Wahl):

   (a) $f = x^4 - 50x^2 + 2x^2y^2 + 49 - 14y^2 + y^4$
   (b) $f = (x^2 + y^2)^3 - x^2y^2$
   (c) $f = x^2 + x^3 - y^2$
   (d) $f = x^2(1 + x) - y^2(1 - x)$.
   (e) Geben Sie, wenn möglich, eine Parametrisierung an, d.h., eine (stetige/differenzierbare/glatte) Abbildung von einem Intervall in $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, deren Bild gleich $\mathcal{V}(f)$ ist!

3. Die folgenden algebraischen Kurven sind durch Parameterdarstellungen gegeben. Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ der Parameter (außer bei (b), wo man $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ betrachten kann), und $a, b > 0$ seien jeweils feste reelle Zahlen. Finden Sie eine implizite Darstellung[1]:

   (a) $x(t) = (\cos(t) + a)\cos(t)$, $y(t) = (\cos(t) + a)\sin(t)$
   (b) $x(t) = a + b\cos(t)$, $y(t) = a\tan(t) + b\sin(t)$
   (c) $x(t) = t^2 - a, y(t) = t(a - t^2)$
   (d) $x(t) = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$
   (e) $x(t) = \frac{at^2}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{at^3}{t^2+1}$.

[1] durch “Probieren” oder Recherche zu den Begriffen Konchoide, Pascalsche Schnecke, Strophoide, Zissoide; systematisch: später

Eva Zerz SS 2006

Algebraische Geometrie – Übung 2

Abgabe bis: Donnerstag, 13.4. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 18.4.

Sei K ein Körper, n eine positive ganze Zahl,

$$\mathcal{J}(V) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a) = 0 \ \forall a \in V\}$$

für $V \subseteq K^n$, und

$$\mathcal{V}(F) := \{a \in K^n \mid f(a) = 0 \ \forall f \in F\}$$

für $F \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.

4. Zeigen Sie:
   (a) $\mathcal{J}(\emptyset) = \langle 1 \rangle$ und, falls $|K| = \infty$, $\mathcal{J}(K^n) = \langle 0 \rangle$
   (b) $\mathrm{Rad}(\mathcal{J}(V)) = \mathcal{J}(V)$
   (c) $\mathcal{J}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{J}(V_1) \cap \mathcal{J}(V_2)$.
   (d) $\mathcal{V}$ und $\mathcal{J}$ sind inklusionsumkehrend und für alle V, F gilt $V \subseteq \mathcal{V}\mathcal{J}(V)$, $F \subseteq \mathcal{J}\mathcal{V}(F)$.
   (e) $\mathcal{V} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{V} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{J} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

5. Seien V, W algebraische Mengen, und I, J Ideale in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie:
   (a) $V \subseteq W \Leftrightarrow \mathcal{J}(V) \supseteq \mathcal{J}(W)$ und $V \subsetneq W \Leftrightarrow \mathcal{J}(V) \supsetneq \mathcal{J}(W)$
   (b) $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cdot J) = \mathcal{V}(I \cap J)$
   (c) $\mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I \cup J)$.

6. Seien I, J Ideale in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und

$$(I : J) := \{h \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid hg \in I \ \forall g \in J\}.$$

   Zeigen Sie:
   (a) $I \subseteq (I : J) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J))$.
   (b) Sind V, W algebraische Mengen, so gilt $(\mathcal{J}(V) : \mathcal{J}(W)) = \mathcal{J}(V \setminus W)$.

Algebraische Geometrie – Übung 3

Abgabe bis: Montag, 24.4. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 25.4.

7. Für $V \subseteq K^n$ bezeichne $\overline{V} = \mathcal{V}\mathcal{J}(V)$ den Zariski-Abschluss von V. Seien I, J Ideale in $K[x_1, \ldots, x_n]$.

   (a) Schließen Sie aus Aufgabe 6a:
   $$\mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(I : J) \supseteq \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} \supseteq \mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J).$$
   Sei insbesondere $J = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ für ein $a \in V := \mathcal{V}(I)$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder $\overline{V \setminus \{a\}} = V$ oder $\overline{V \setminus \{a\}} = V \setminus \{a\}$. Geben Sie eine geometrische Interpretation der beiden Fälle an.

   (b) Ist K algebraisch abgeschlossen und I radikal, so gilt
   $$\mathcal{V}(I : J) = \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)}.$$
   Überlegen Sie sich das auf zwei Arten: erstens durch direkten Nachweis der angesichts von 7a noch fehlenden Inklusion und zweitens, indem Sie $V = \mathcal{V}(I)$, $W = \mathcal{V}(J)$ in die Gleichung aus Aufgabe 6b einsetzen und dann zeigen, dass
   $$(I : \mathrm{Rad}(J)) \subseteq (I : J) \subseteq (\mathrm{Rad}(I) : J) = (\mathrm{Rad}(I) : \mathrm{Rad}(J)). \qquad (1)$$

   (c) Folgern Sie: Ist K algebraisch abgeschlossen (aber I nicht notwendigerweise radikal), so gilt
   $$\mathcal{V}(I : J^\infty) = \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)},$$
   wobei
   $$(I : J^\infty) = \{h \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \exists l \in \mathbb{N} : hg \in I \ \forall g \in J^l\} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (I : J^l)$$
   die sogenannte *Saturierung* von I bezüglich J ist.

   (d) Berechnen Sie die Saturierung, alle in (1) auftauchenden Ideale und deren Radikale für
   $$I = \langle xy^2, y^3 z^2 \rangle, \ J = \langle y^2 \rangle \subseteq K[x, y, z].$$

Hinweise: In 7c genügt es, $\mathrm{Rad}(I : J^\infty) = (\mathrm{Rad}(I) : J)$ zu zeigen. Da $K[x_1, \ldots, x_n]$ Noethersch ist, ist J endlich erzeugt und
$$I \subseteq (I : J) \subseteq (I : J^2) \subseteq \ldots \qquad (2)$$
wird stationär, d.h., es existiert k mit $(I : J^\infty) = (I : J^k)$. Die erste Gleichheit in (2) liefert schon Stationarität. Ist $I \cap \langle g \rangle = \langle h_1 g, \ldots, h_m g \rangle$, so ist $I : \langle g \rangle = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$.

Algebraic Geometry – Tutorial 4

To be handed in till: Friday, April 28 (noon), To be discussed on: Tuesday, May 2

8. Let $I \neq 0$ be an ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Prove that the following are equivalent:

   (a) For each $1 \leq i \leq n$, there exists
   $$0 \neq g_i \in I \cap K[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n].$$

   (b) I is not contained in any proper principal ideal of $K[x_1, \ldots, x_n]$.

   (c) Any finite set of non-zero generators of I consists of coprime polynomials.

   (d) There exists a finite generating set of I that consists of non-zero coprime polynomials.

   An algebraic set defined by a single, non-constant polynomial is called a *hypersurface*. If K is algebraically closed, then the four conditions from above are also equivalent to

   (e) $\mathcal{V}(I)$ does not contain an algebraic hypersurface.

   Useful background material ("divisibility theory reloaded"): $K[x_1, \ldots, x_n]$ is a unique factorization domain, i.e., any $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus K$ can be written as a product of prime polynomials. Thus, we have a well-defined concept of greatest common divisor (gcd). Two non-zero polynomials f, g are called coprime if $\gcd(f, g) = 1$, which is equivalent to $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle fg \rangle$. A stronger coprimeness notion is obtained by requiring that $\langle f, g \rangle = K[x_1, \ldots, x_n]$. This is sometimes called *zero coprimeness* (guess why!). For $n = 1$ (principal ideal domain), coprimeness and zero coprimeness are equivalent.

   The ring $R := K(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)[x_i]$ is a localization of the polynomial ring, and therefore, coprime polynomials are still coprime when considered as elements of the principal ideal domain R.

9. Lagrange interpolation over the field with two elements: Let $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Show that for any function $f : K^n \to K$, there exists a polynomial $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ with $p(a) = f(a)$ for all $a \in K^n$.

   Hint: It suffices to consider $p = \sum_{\nu \in \{0,1\}^n} p_\nu x^\nu$. This yields a system of 2^n linear equations for 2^n unknowns ...

Algebraische Geometrie – Übung 5

Abgabe bis: Montag, 8.5. (12 Uhr), Besprechung am: Mittwoch, 10.5.

10. (a) Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung auf $\mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, dass jede absteigende Kette $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots$ in $\mathbb{N}^n$ stationär werden muss (d.h., $\leq$ ist Artinsch). Folgern Sie, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ ein kleinstes Element enthält (d.h., $\leq$ ist eine Wohlordnung).

    (b) Für jedes $\mu \in \mathbb{N}^n$ sei $f_\mu \in K[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $\deg(f_\mu) = \mu$, wobei der Grad bezüglich einer zulässigen Ordnung definiert sei. Weisen Sie nach, dass $\{f_\mu \mid \mu \in \mathbb{N}^n\}$ eine K-Basis von $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

    (c) Sei $f \in \mathbb{Q}[x, x^{-1}]$, also $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i x^i$, wobei die Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Q}$ fast alle Null sind. Der Grad von f sei bezüglich der natürlichen Ordnung von $\mathbb{Z}$ definiert. Zeigen Sie: Für $f_m := x^m + x^{-m^2}$, $m \in \mathbb{Z}$, gilt zwar $\deg(f_m) = m$, aber $\{f_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ist keine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$.

11. (a) Sei N eine Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ mit der Eigenschaft

    $$\nu \in N,\ \mu \in \mathbb{N}^n \quad \Rightarrow \quad \nu + \mu \in N.$$

    Weisen Sie nach, dass die Menge $M := \min_{\mathrm{cw}} N$ aller komponentenweise minimalen Elemente von N endlich ist, und dass $N = M + \mathbb{N}^n$ gilt.

    (b) Sei $0 \notin F$ eine endliche nichtleere Teilmenge von $K[x_1, \ldots, x_n]$ und sei eine zulässige Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ gegeben. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

    i. F ist Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$.

    ii. Für alle $\mu \in \min_{\mathrm{cw}} \deg(\langle F \rangle)$ existiert $f \in F$ mit $\deg(f) = \mu$.

Algebraische Geometrie – Übung 6

Abgabe bis: Montag, 15.5. (12 Uhr), Besprechung am: Mittwoch, 17.5.

12. Mit $F, F', G \ldots$ seien stets endliche, nichtleere Teilmengen von $K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ bezeichnet.

    (a) Sei $I \neq 0$ ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie: Ist $F \subset I$ und $\deg(F) + \mathbb{N}^n = \deg(I)$, so folgt $I = \langle F \rangle$, und F ist dann eine Gröbner-Basis von I.

    (b) Für jedes F existiert ein vereinfachtes F' mit $\langle F \rangle = \langle F' \rangle$.
    Überlegen Sie sich das auf zwei Arten: Geben Sie erstens ein konstruktives Verfahren zur Vereinfachung an (dessen Terminieren wie üblich mit einem Noetherschen Argument begründet wird). Benutzen Sie zweitens, dass $I := \langle F \rangle$ eine Gröbner-Basis besitzt, und beweisen Sie folgende Aussage: Ist G eine GB von $I = \langle G \rangle$, und ist $g \in G$ so, dass $\deg(g) \in \deg(G \setminus \{g\}) + \mathbb{N}^n$, dann ist $G \setminus \{g\}$ immer noch eine GB von I.

    (c) Zeigen Sie, dass F genau dann vereinfachte Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$ ist, wenn

    i. $\forall \mu \in M := \min_{\mathrm{cw}} \deg(\langle F \rangle)\ \exists! f \in F$: $\deg(f) = \mu$, und

    ii. $\deg(F) \subseteq M$.

    (Das heißt: $\deg : F \to M$, $f \mapsto \deg(f)$ ist wohldefiniert und bijektiv.)

    (d) Sei F eine Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$. Alle Elemente von F seien normiert. Es gilt per Definition:

    $$F \text{ vereinfacht} \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F : \deg(f) \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n.$$

    Zeigen Sie:

    $$F \text{ reduziert} \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F : f \in \bigoplus_{\mu \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n} K x^\mu,$$

    d.h., nicht nur der Grad von f, sondern jedes κ mit $c_\kappa \neq 0$ in $f = \sum c_\kappa x^\kappa$ erfüllt $\kappa \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n$.

13. Berechnen Sie die reduzierte Gröbner-Basis von $I = \langle x^3 + xy, x^2 y - y^3 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Hilfe der Maple-Befehle[1]

```
> with(Groebner);
> F:={x^3+x*y,x^2*y-y^3};
> gbasis(F,plex(x,y));
```

(oder so ähnlich, je nachdem, welche Version Sie benutzen).
Berechnen Sie $V = \mathcal{V}(I)$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x, y]/I$. Wie würden Sie die "Vielfachheit" der Elemente von V definieren?

[1] Natürlich können Sie auch gerne ein anderes Computeralgebrasystem verwenden, z.B. Gap.

Algebraische Geometrie – Übung 7

Abgabe bis: Montag, 22.5. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 23.5.

14. Sei K algebraisch abgeschlossen.

    (a) Sei I ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und $1 \leq j \leq n$. Mit $\pi : K^n \to K^{n-j+1}$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_j, \ldots, a_n)$ sei die Projektion auf die letzten $n-j+1$ Komponenten bezeichnet. Zeigen Sie, dass (wir missbrauchen die Notation leicht, indem wir $\mathcal{V}$ sowohl bzgl. K^n als auch bzgl. K^{n-j+1} benutzen)
    $$\pi(\mathcal{V}(I)) \subseteq \mathcal{V}(I \cap K[x_j, \ldots, x_n])$$
    und dass (wenn man $\mathcal{J}(V)$ für $V \subseteq K^{n-j+1}$ als Teilmenge von $K[x_j, \ldots, x_n]$ auffasst)
    $$\mathcal{J}(\pi(\mathcal{V}(I))) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{V}(I).$$

    (b) Folgern Sie, dass
    $$\overline{\pi(\mathcal{V}(I))} = \mathcal{V}(I \cap K[x_j, \ldots, x_n]),$$
    wobei $\overline{V}$ der Zariski-Abschluss von V in K^{n-j+1} ist.

    (c) Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[t_1, \ldots, t_m]$. Betrachten Sie $I = \langle x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle \subseteq K[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$. Schließen Sie aus dem vorigen Aufgabenteil, dass
    $$\mathcal{V}(I \cap K[x_1, \ldots x_n]) = \overline{\mathrm{im}(f)},$$
    wobei $\overline{V}$ der Zariski-Abschluss von V in K^n ist, und $f : K^m \to K^n$ die durch $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ definierte Abbildung ist.

    (d) Seien $f_1 = t^2 - a, f_2 = t(a - t^2) \in K[t, a]$. Berechnen Sie $\overline{\mathrm{im}(f)}$ und erklären Sie den Zusammenhang mit Aufgabe 3c.

    (e) Obwohl sich die oben entwickelte Theorie nicht direkt auf die anderen algebraischen Kurven aus Aufgabe 3 anwenden lässt, existieren dafür ähnliche Methoden: Man betrachtet z.B. $I = \langle x - (c+a)c, y - (c+a)s, c^2 + s^2 - 1 \rangle$ in $\mathbb{R}[c, s, a, x, y]$. Berechnen Sie (mit Maple o.ä.) eine Gröbner-Basis von $I \cap \mathbb{R}[a, x, y]$ und überzeugen Sie sich davon, dass sich das erwartete Resultat ergibt. Probieren Sie analoge Methoden für die verbleibenden algebraischen Kurven aus Aufgabe 3 aus.

15. Seien $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ und $J = \langle g_1, \ldots, g_l \rangle$ Ideale in $K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$. Sei
    $$L := \langle tf_1, \ldots, tf_k, (1-t)g_1, \ldots, (1-t)g_l \rangle \subseteq K[x, t].$$
    Zeigen Sie, dass $I \cap J = L \cap K[x]$. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung eines Erzeugendensystems von $I \cap J$ aus den gegebenen Erzeugendensystemen von I und J.

Algebraische Geometrie – Übung 8

Abgabe bis: Montag, 29.5. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 30.5.

16. Sei R ein kommutativer Ring (nicht Null, mit Eins). Zeigen Sie:

    (a) Sind $I_1, \dots, I_k$ paarweise null-koprime Ideale in R, d.h., gilt $I_i + I_j = R$ für alle $i \neq j$ (man nennt solche I_i auch *komaximal*), so folgt
    $$I_1 \cdot \ldots \cdot I_k = I_1 \cap \ldots \cap I_k.$$

    (b) Wenn $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ maximale Ideale in R sind, so gilt $\mathfrak{m}^d + \mathfrak{n}^d = R$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

17. Sei K algebraisch abgeschlossen und I ein null-dimensionales Ideal in $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $\mathcal{V}(I)$ endlich, und laut Beweis von Satz 1.15 gilt $|\mathcal{V}(I)| = \dim_K K[x]/\mathrm{Rad}(I)$. Wir wissen aus Lemma 1.14, dass auch $\dim_K K[x]/I < \infty$, aber im Allgemeinen gilt nur $\dim_K K[x]/\mathrm{Rad}(I) \leq \dim_K K[x]/I$. In Analogie zum Fall $n = 1$ liegt es nahe, $\dim_K K[x]/I$ als Anzahl der Nullstellen von I *mit Vielfachheit gezählt* zu interpretieren. Bleibt die Frage, wie sich diese Gesamtvielfachheit auf die einzelnen Nullstellen verteilt. Beweisen Sie dazu folgenden Satz: Es gilt
    $$K[x]/I \cong \bigoplus_{a \in \mathcal{V}(I)} (K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a},$$
    wobei $\mathfrak{m}_a$ das zu $a \in K^n$ gehörende maximale Ideal ist, und $(K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a} \cong K[x]_{\mathfrak{m}_a}/I_{\mathfrak{m}_a}$ die Lokalisierung von $K[x]/I$ an $\mathfrak{m}_a$ ist. Man definiert dann die Vielfachheit von a durch
    $$\mu(a) := \dim_K (K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a}.$$
    Zum Beweis sei $\mathcal{V}(I) = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ seien die entsprechenden maximalen Ideale. Man betrachtet
    $$\varphi : K[x] \to K[x]_{\mathfrak{m}_1}/I_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times K[x]_{\mathfrak{m}_k}/I_{\mathfrak{m}_k}, \quad r \mapsto ([\tfrac{r}{1}], \dots, [\tfrac{r}{1}]).$$
    Es ist klar, dass $I \subseteq \ker(\varphi)$. Man muss also (i) die umgekehrte Inklusion und (ii) die Surjektivität von φ beweisen, dann liefert der Homomorphiesatz den Rest. Folgende Hilfsresultate (und obige Aufgabe) sollten dabei nützlich sein:

    (a) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_i^d \subseteq I$.

    (b) Laut Lagrange-Interpolation existieren $\varepsilon_i \in K[x]$ mit $\varepsilon_i(a_i) = 1$ und $\varepsilon_i(a_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei $e_i := 1 - (1 - \varepsilon_i^d)^d$, wobei d wie in (a) sei. Modulo I gilt $\sum_{i=1}^k e_i \equiv 1$, $e_i e_j \equiv 0$ für $i \neq j$, und $e_i^2 \equiv e_i$. Außerdem ist $e_i - 1 \in I_{\mathfrak{m}_i}$ und $e_i \in I_{\mathfrak{m}_j}$ für $i \neq j$.

    (c) Ist $g \notin \mathfrak{m}_i$, so gibt es $h \in K[x]$ mit $hg \equiv e_i$ modulo I. (Hinweis: Mit $\tilde{g} := 1 - \frac{g}{g(a_i)}$ betrachte man $1 + \tilde{g} + \ldots + \tilde{g}^{d-1}$.)

Algebraische Geometrie – Übung 9

Abgabe bis: Montag, 12.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 13.6.

18. Sei $f : V \to W$ ein Morphismus algebraischer Mengen und $\varphi := K[f]$ der davon induzierte K-Algebra-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass
$$f^{-1}(\mathcal{V}_W(F)) = \mathcal{V}_V(\varphi(F))$$
für $F \subseteq K[W]$.

19. Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist $f : K^n \to K^n$, $a \mapsto (f_1(a), \ldots, f_n(a))$ ein Morphismus algebraischer Mengen.
    (a) Zeigen Sie: f ist genau dann ein Isomorphismus algebraischer Mengen, wenn es $g_1, \ldots, g_n \in K[y_1, \ldots, y_n]$ gibt mit
    $$\langle y_1 - f_1, \ldots, y_n - f_n \rangle = \langle x_1 - g_1, \ldots, x_n - g_n \rangle.$$
    (b) Wie kann man diese Bedingung mit Hilfe von GB überprüfen?

20. Gegeben sei das radikale Ideal
$$I = \langle xz - y^2, x - yz \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z].$$
Berechnen Sie die irreduziblen Komponenten von $V = \mathcal{V}(I)$. Ist V zusammenhängend?

    Hinweis: Seien $p, q \notin I$ so, dass $pq \in I$. Laut KA gilt dann (da I radikal ist) $I = I_1 \cap I_2$ mit $I_1 := (I : p)$ und $I_2 := I + \langle p \rangle$.

Algebraische Geometrie – Übung 10

Abgabe bis: Montag, 19.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 20.6.

21. Sei R ein Ring und $\emptyset \neq P$ eine abgeschlossene Menge in $\mathrm{Spec}(R)$, also $P = \mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ für ein Ideal I in R. Zeigen Sie, dass P genau dann irreduzibel ist, wenn $\mathcal{J}(P) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} \mathfrak{p}$ prim ist.

22. (a) Sei (M, A) eine algebraische Varietät und $U \subseteq M$ eine offene Menge. Sei I eine beliebige Menge und seien $U_i \subseteq M$, $i \in I$, spezielle offene Mengen mit

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Zeigen Sie: $\exists k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$: $U = \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.

(b) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $h \in K(M) = \mathrm{Quot}(A)$. Zeigen Sie, dass

$$D(h) = \bigcup \{D(\tfrac{1}{g}) \mid 0 \neq g \in A, gh \in A\}$$

und schließen Sie aus (a): $\exists k \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_k \in A$, $g_1, \ldots, g_k \in A \setminus \{0\}$ mit $h = \frac{f_1}{g_1} = \ldots = \frac{f_k}{g_k}$ so dass $D(h) = \bigcup_{j=1}^{k} D(\frac{1}{g_j})$.

(c) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $0 \neq g \in A$. Zeigen Sie:

$$A_g = \{h \in K(M) \mid M_g \subseteq D(h)\}.$$

23. Sei (M, A) eine algebraische Varietät, $U \subseteq M$ offen, $x \in U$, und $h : U \to K$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $\exists f, g \in A$: $x \in D(\frac{1}{g}) \subseteq U$ und $h(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ für alle $y \in D(\frac{1}{g})$;

(b) $\exists f, g \in A$: $\exists V$, offene Umgebung von x in $U \cap D(\frac{1}{g})$, mit $h(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ für alle $y \in V$.

Zeigen Sie außerdem: Wenn (a) für alle $x \in U$ erfüllt ist, dann folgt: $\exists k \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k \in A$: $U = \bigcup_{j=1}^{k} D(\frac{1}{g_j})$ und $h(y) = \frac{f_j(y)}{g_j(y)}$ für alle $y \in D(\frac{1}{g_j})$.

Algebraische Geometrie – Übung 11

Abgabe bis: Montag, 26.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 27.6.

24. (a) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $h \in K(M)$. Zeigen Sie: Ist A faktoriell, so ist $D(h)$ eine spezielle offene Menge.

    (b) Sei jetzt $A = \mathbb{C}[x, y, z]/\langle x^2 - yz\rangle$. Laut Vorlesung gibt es $h \in \mathrm{Quot}(A)$, für das $D(h)$ keine spezielle offene Menge ist. Also kann A nicht faktoriell sein. Weisen Sie das auf folgendem alternativen Weg nach: Betrachten Sie $f : \mathbb{C}^2 \to V = \mathcal{V}(x^2 - yz) \subseteq \mathbb{C}^3$, $(s, t) \mapsto (st, s^2, t^2)$. Zeigen Sie, dass f dominant ist. Daher ist $\varphi := \mathbb{C}[f]$ ein Monomorphismus. Bestimmen Sie damit die Einheiten von A und zeigen Sie, dass es irreduzible, aber nicht prime Elemente gibt.

25. (a) Sei (M, A) eine algebraische Varietät. Wir betrachten Paare (h, U), wobei $U \subseteq M$ offen und dicht ist, und $h \in \mathcal{O}(U)$. Zeigen Sie, dass

    $(h_1, U_1) \sim (h_2, U_2) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U_1 \cap U_2, W$ offen und dicht in M: $h_1|_W = h_2|_W$

    eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Äquivalenzklassen $[(h, U)]$ wird mit $R(M)$ bezeichnet.

    (b) Zeigen Sie, dass

    $$(h_1, U_1) \sim (h_2, U_2) \quad \Leftrightarrow \quad h_1|_{U_1 \cap U_2} = h_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

    Die interessante Richtung dieser Äquivalenz heißt *Identitätssatz.*
    Hinweis: $U := U_1 \cap U_2$, $h := h_1 - h_2 \in \mathcal{O}(U)$. $\mathcal{N}(h) := \{x \in U \mid h(x) = 0\}$ ist abgeschlossen in U (zu jedem $x \in U \setminus \mathcal{N}(h)$ gibt es eine offene Umgebung von x in $U \setminus \mathcal{N}(h)$) und enthält eine in M dichte Teilmenge. Betrachten Sie die Abschlüsse in U: $\overline{V}^U = U \cap \overline{V}$ für $V \subseteq U$.

26. Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $K(M) \to R(M)$, die einem Repräsentanten $\frac{f}{g}$ ($f \in A, 0 \neq g \in A$) die Äquivalenzklasse $[(\frac{f}{g}, D(\frac{1}{g}))]$ zuordnet, wobei $\frac{f}{g}$ als Abbildung $D(\frac{1}{g}) \to K$ interpretiert wird, wohldefiniert und bijektiv ist.

Algebraische Geometrie – Übung 12

Abgabe bis: Montag, 3.7. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 4.7.

27. Seien $V \subseteq K^n$ und $W \subseteq K^m$ nichtleere irreduzible algebraische Mengen. Wir identifizieren $K(V) = R(V)$, $K(W) = R(W)$. Seien $h_1, \ldots, h_m \in K(V)$ so, dass

$$h : D(h) \to W, \quad v \mapsto h(v) := (h_1(v), \ldots, h_m(v))$$

wohldefiniert ist, d.h., $\mathrm{im}(h) \subseteq W$. Dabei ist $D(h) := \bigcap_{i=1}^m D(h_i)$ offen und dicht in V. Wir nennen h dann eine rationale Abbildung von V nach W.

Die natürlich wirkende Definition

$$K(h) : K(W) \to K(V), \quad g \mapsto g \circ h$$

hat i.A. keinen Sinn, denn es kann passieren, dass $\mathrm{im}(h) \cap D(g) = \emptyset$.

(a) Geben Sie ein einfaches Beispiel an, in dem dieses Phänomen auftritt.

(b) Zeigen Sie: Ist h dominant ($\overline{\mathrm{im}(h)} = W$), so ist $K(h)$ wie oben wohldefiniert. Umgekehrt liefert jeder K-Algebren-Homomorphismus $\varphi : K(W) \to K(V)$ eine dominante rationale Abbildung h von V nach W mit $K(h) = \varphi$.

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

i. Es gibt $h : D(h) \to W$ wie oben und analog $k : D(k) \to V$ so, dass $h \circ k$ und $k \circ h$ jeweils auf offenen dichten Teilmengen definiert sind und mit der Identität übereinstimmen.

ii. $K(W) \cong K(V)$.

Man sagt dann: V ist *birational äquivalent* zu W. Falls $W = K^m$, nennt man V eine *rationale Varietät* bzw. (falls $m = 1$) eine *rationale Kurve*.

(d) Zeigen Sie, dass $V = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{C}^2$ eine rationale Kurve ist.
Hinweis: Stereographische Projektion.
Bemerkung: $\mathcal{V}(x^n + y^n - 1) \subset \mathbb{C}^2$ für $n \geq 3$ ist keine rationale Kurve.

28. Sei L ein Erweiterungskörper von K und E eine endliche Teilmenge von L. Zeigen Sie: E ist genau dann Transzendenzbasis von L über K, wenn L über $K(E)$ algebraisch ist, aber über keinem $K(E \setminus \{e\})$, $e \in E$.

Algebraische Geometrie – Übung 13

Abgabe bis: Montag, 10.7. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 11.7.

29. Beweisen Sie Satz 4.6 und Folgerung 4.7 der Vorlesung.

30. Sei $V = \mathcal{V}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \subset \mathbb{C}^3$ und $V_1 = V \cap \mathcal{V}(x_1 x_2 x_3)$. Wie sehen diese Objekte im Reellen aus? Bestimmen Sie einen endlichen Morphismus $f : V \to \mathbb{C}^2$ mit $f(V_1) = \mathbb{C} \times \{0\}$.

    Bemerkung: Das Ideal
    $$\langle x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1, x_1 x_2 x_3 \rangle$$
    ist als Schnitt dreier Primideale schreibbar (welche sind das?) und daher radikal.