Morita-Äquivalenzen in der algorithmischen Darstellungstheorie

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Felix Noeske

aus Bochum

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß
Universitätsprofessor Dr. Klaus Lux

Tag der mündlichen Prüfung: 7.11.2005

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Vorwort

Das Gebiet der Arbeit

Der Abschluss der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen zu Beginn der achtziger Jahre des letzten Jahrhunderts ist eine der größten Leistungen der jüngeren Mathematikgeschichte. In der Zusammenarbeit vieler Mathematiker konnte schließlich der Klassifikationssatz formuliert werden, dessen Beweis viele tausend Seiten umfasst. Demnach gibt es vier wesentlich verschiedene Familien von Gruppen, denen eine endliche einfache Gruppe angehören kann: Sie ist entweder isomorph zu einer zyklische Gruppe von Primzahlordnung, zu einer alternierenden Gruppe, zu einer Gruppe vom Lie-Typ, oder zu einer sporadischen einfachen Gruppe.
Dabei ist die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ die Gruppe der geraden Permutationen von n Ziffern. Die Familie der einfachen Gruppen vom Lie-Typ besteht aus 16 unendlichen Serien von Gruppen, welche die endlichen Analoga der Lie-Gruppen über den reellen oder komplexen Zahlen umfassen. Wie etwa die einfachen projektiven speziellen linearen Gruppen, deren Elemente als Automorphismen von projektiven Räumen auftreten. Die vierte Familie sind die sporadischen einfachen Gruppen, die hier im Folgenden nur noch als die sporadischen Gruppen bezeichnet werden. Es sind 26 Gruppen, die in dem Sinne ein Sammlung von Ausnahmen bilden, in dem sie keiner der anderen unendlichen Serien zugeordnet werden können. Sie wurden über einen Zeitraum von 120 Jahren von verschiedenen Mathematikern entdeckt. So wurde beispielsweise die kleinste sporadische Gruppe M_{11} von Emile Mathieu bereits in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts gefunden. Sie ist mit 7 920 Elementen winzig, wenn man sie mit der größten sporadischen Gruppe, dem sogenannten Monster M, vergleicht, das die Ehrfurcht einflößende Ordnung von 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 besitzt. Das Monster, auch freundlicher Riese genannt, wurde 1973 unabhängig von Bernd Fischer und Robert Griess entdeckt. Eine weiterführende und kurzweilige Übersicht über die sporadischen Gruppen und ihre Entdeckung findet der Leser in [13].

Durch den Klassifikationssatz der endlichen einfachen Gruppen ist die zentrale Frage der Gruppentheorie nach den elementaren Bausteinen, aus denen alle endlichen Gruppen aufgebaut sind, geklärt. Damit erhebt sich die Frage nach der Struktur dieser Bausteine.

Ein wichtiges Werkzeug hierzu ist die Darstellungstheorie dieser Gruppen. Wie ihr Name suggeriert, wird in ihr untersucht, auf welche Weise sich die abstrakt gegebenen Gruppen konkret realisieren bzw. darstellen lassen. Dabei verstehen wir unter einer konkreten Realisierung einer Gruppe beispielsweise eine zu ihr isomorphe Matrixgruppe. Dieses Konzept wird durch den zentralen Begriff einer Darstellung formalisiert.

Wir fassen dazu eine Gruppe G als Menge von Automorphismen eines endlich dimensionalen Vektorraums V über einem Körper F auf, indem wir einen Homomorphismus δ der Gruppe in die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ des Vektorraums betrachten. Einen solchen Homomorphismus bezeichnen wir als eine *Darstellung von G auf V*. Ist d die Dimension von V, so heißt d auch der *Grad von δ*. Wählen wir für V eine Basis $\mathcal{B}$, so erhalten wir unmittelbar eine Darstellung $\delta_{\mathcal{B}} : G \to \mathrm{GL}_d(F)$ eines homomorphen Bildes von G als Matrixgruppe. Durch δ können wir eine Operation von G auf V vermöge $v \cdot g := v\delta(g)$ definieren. Setzen wir diese linear fort, so wird V zu einem FG-Modul. Dabei bezeichnet FG die zu G gehörende Gruppenalgebra, also den F-Vektorraum mit Basis G und der von G geerbten Multiplikation.

In Analogie zum Ziel des Klassifikationssatzes der einfachen endlichen Gruppen, ist es eine zentrale Fragestellung der Darstellungstheorie, die im folgenden Sinne elementaren Bausteine der Darstellungen dieser Gruppen zu klassifizieren.

Enthält der F-Vektorraum V einen Unterraum U, der invariant unter den von G bewirkten Automorphismen $\delta(G) \leq \mathrm{GL}(V)$ ist, so erhalten wir durch Restriktion der Darstellung δ auf diesen Unterraum vermöge $\delta_U : G \to \mathrm{GL}(U)$ eine Darstellung von G auf U. Dann ist auch der Faktorraum V/U ein G-invarianter Vektorraum vermöge der Operation $(v + U) \cdot g := v\delta(g) + U$, sodass wir ebenfalls eine Darstellung $\delta_{V/U} : G \to \mathrm{GL}(V/U)$ erhalten. Wir können folglich die ursprüngliche Darstellung δ in dem Sinne verkleinern, in dem die beiden neuen Darstellungen δ_U und $\delta_{V/U}$ Darstellungen von kleinerem Grad sind. Iterieren wir dieses Vorgehen, so erhalten wir nach endlich vielen Schritten als unspaltbare Atome schließlich nicht verkleinerbare Darstellungen von G. Eine solche Darstellung nennen wir *irreduzibel* bzw. *einfach*.

Im Fall, dass F ein Körper der Charakteristik 0 und δ eine Darstellung von G auf V ist, bilden wir ein Gruppenelement $g \in G$ nach Wahl einer Basis $\mathcal{B}$ von V auf die Spur seiner darstellenden Matrix $\delta_{\mathcal{B}}(g)$ ab. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\chi : G \to F$, die *Charakter von* δ heißt und die wir ebenfalls *irreduzibel* nennen, wenn δ irreduzibel ist. Da die Spur der Matrix $\delta_{\mathcal{B}}(g)$ invariant unter Konjugation mit weiteren Matrizen ist, ist jeder Charakter auf den Konjugiertenklassen von G konstant, also eine Klassenfunktion, und hängt nicht von der gewählten Basis $\mathcal{B}$ ab. Charaktere bewahren viele Eigenschaften von Darstellungen, sodass es genügt, sie stellvertretend für die Darstellungen zu betrachten.

Auf diese Weise ist für Körper der Charakteristik 0 die Klassifikation der irreduziblen Darstellungen der endlichen einfachen Gruppen durch Angabe ihrer irreduziblen Charaktere fast vollständig abgeschlossen. Dies ist hauptsächlich durch die Arbeit von Georg Frobenius und Issai Schur für die alternierenden Gruppen, George Lusztig für die Gruppen vom Lie-Typ und verschiedener Personen für die sporadischen Gruppen erreicht worden. Die Charaktere sind als Matrizen ihrer Werte auf den Konjugiertenklassen, den sogenannten *Charaktertafeln*, im ATLAS [6] in gedruckter Form angegeben, oder im Computeralgebrasystem GAP [9] in elektronischer Form verfügbar.

Für Körper der Charakteristik $p > 0$ sind jedoch noch viele wesentliche Fragen dieser Klassifikation ungelöst und insbesondere für die sporadischen Gruppen seit ca. 20 Jahren Gegenstand aktiver Forschung.

Als Vater der Darstellungstheorie über Körpern von Primzahlcharakteristik darf man Richard Brauer bezeichnen, der in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entdeckte, in welchem

Zusammenhang die Darstellungen über Körpern der Charakteristik $p > 0$ zu den Darstellungen über Körpern der Charakteristik 0 stehen. Dazu führte er in Analogie zu obiger Charakterdefinition einen Charakter für Darstellungen über Körpern von Primzahlcharakteristik ein. Diese sogenannten *Brauercharaktere* sind dabei nur auf den p-regulären Klassen von G definiert, d.h. auf den Konjugiertenklassen, deren Elemente eine zu p teilerfremde Ordnung besitzen. Wie gewöhnliche Charaktere enthalten auch sie viele Eigenschaften ihrer Darstellungen. Schränken wir darüber hinaus einen gewöhnlichen Charakter auf die p-regulären Klassen ein, so ist er eine nicht-negative ganzzahlige Linearkombination irreduzibler Brauercharaktere. Die Koeffizienten dieser Zerlegung sind die sogenannten *Zerlegungszahlen*, die uns schließlich den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen Darstellungstheorie im Charakteristik-0-Fall und der sogenannten modularen Theorie liefern.

Über diese Arbeit

Im Zentrum dieser Arbeit stehen die Methoden aus der Darstellungstheorie, die zur Bestimmung der Zerlegungszahlen der sporadischen Gruppen entwickelt wurden. Für die sporadischen Gruppen existiert nämlich keine einheitliche Theorie, die in der Lage ist, diese Fragen umfassend zu beantworten. Im Zuge der Entwicklung der Computeralgebra wurden jedoch praktische Methoden entwickelt, diese Probleme zu behandeln. Ziel dieses Zugangs ist es, explizit Darstellungen zu konstruieren.

Zu den wichtigsten Werkzeugen, die zur Untersuchung der sporadischen Gruppen entwickelt wurden, zählt das ursprünglich von Richard Parker und Jon Thackray stammende Computeralgebrasystem MeatAxe (vgl. [36]) zur Behandlung von Darstellungen über endlichen Körpern. Dieses System umfasst Routinen, deren Aufgabenbereich von einfachen Operationen in einem endlich-dimensionalen Vektorraum über einem endlichen Körper, wie etwa Gauß-Elimination, bis hin zur expliziten Bestimmung von Teil– und Faktormoduln eines gegebenen Moduls und sogar ganzer Untermodulverbände reicht (vgl. [28]).

Eine wichtiges computergestütztes Hilfsmittel, das es gestattet, Matrixdarstellungen, die von großen Moduln bewirkt werden, zu untersuchen, ist das Verfahren der Kondensation, deren theoretische Grundlagen von James A. Green in [11] gelegt wurden. Von Jon Thackray ist sie erstmalig in Form der Fixpunkt-Reduktion in [38] eingesetzt worden. Seitdem hat diese Methode wesentlich zur Berechnung modularer Charaktertafeln sporadischer und auch anderer Gruppen beigetragen.

Dazu betrachten wir anstelle der Darstellung der Gruppenalgebra FG auf einem Modul V eine Darstellung der Algebra $eFGe$ auf dem Modul Ve. Dabei ist e die Summe über alle Elemente einer Untergruppe K von G, deren Ordnung teilerfremd zu p ist, dividiert durch die Ordnung von K. Nach Wahl der Untergruppe K kann erreicht werden, dass die Algebren FG und $eFGe$ Morita-äquivalent sind, d.h. vereinfacht gesagt, dass sie dieselbe Darstellungstheorie besitzen. In diesem Fall verlieren wir durch den Übergang von V zu Ve folglich keine Information.

In dieser Arbeit verallgemeinern wir die Fixpunkt-Kondensation zur Kondensation mit linearen Idempotenten, d.h. wir lassen als Kondensationsidempotent $e \in FK$ ein primitives Idempotent einer Darstellung über einem eindimensionalen FK-Modul zu. Die notwendigen Algorithmen zur Behandlung von Tensorprodukten und induzierten Moduln mit dieser neuen Kondensationsmethode stellen wir ebenfalls vor. Für die dabei benötigte Berechnungen von Idempotenten in einer beliebigen Matrixdarstellung führen wir ein neues Verfahren ein, das diese Aufgabe rasch bewältigt.

Kondensation ermöglicht es, auch sehr große Darstellungen betrachten zu können. Für die Wiedererlangung der rechnerischen Handhabbarkeit bezahlen wir aber auch einen Preis. Obwohl wir gute Kenntnis davon haben, wie wir die Gruppenalgebra erzeugen können – hier reicht ein Erzeugendensystem der Gruppe – wissen wir nicht, wie wir die kondensierte Algebra $eFGe$ mit möglichst wenig Elementen erzeugen können. Diese Wissenslücke wird gemeinhin als das Erzeugnisproblem bezeichnet. Sie ist für die rechnergestützte modulare Darstellungstheorie von grundlegender Bedeutung, da wir vor Anwendung der MeatAxe sicher sein müssen, dass die betrachteten Matrixdarstellungen einiger Algebraelemente auf Ve tatsächlich eine Matrixalgebra erzeugen, die isomorph zur kondensierten Algebra $eFGe$ ist. Auf diese Weise können wir uns beispielsweise die Morita-Äquivalenz zu Nutze machen und Information über V gewinnen. Wissen wir dies nicht, so können wir nur über zum Teil rechnerisch aufwendige Umwege aus den Ergebnissen, die wir aus der MeatAxe erhalten, Rückschlüsse auf den ursprünglichen Modul V ziehen.

In diesem Zusammenhang stellen wir in dieser Arbeit zwei neue Verfahren vor, die Schwierigkeiten des Erzeugnisproblems zu bewältigen. Zum einen geben wir neue Erzeugendensysteme kondensierter Algebren an, sogenannte träge Erzeugendensysteme, die in der Praxis oft klein genug sind, um von Nutzen zu sein, indem sie Probleme, die bisher gar nicht oder nur unter gewaltigem Aufwand möglich waren, rechnerisch angreifbar machen. So sind z.B. die 2-modularen Charaktere der sporadischen Gruppe Fi_{23} mit diesem Ansatz in [16] bestimmt worden. Diese Gruppe ist derzeit die größte, für die dieses Problem gelöst wurde. Zusätzlich stellen wir einen Algorithmus vor, mit dessen Hilfe die Anzahl der Elemente eines trägen Erzeugendensystems reduziert werden kann. Als zweiten Lösungsansatz für das Erzeugnisproblem formulieren wir ein neues Kriterium, das es gestattet, eine Teilmenge der kondensierten Algebra als Erzeugendensystem nachzuweisen. Dieses Kriterium ist gleichzeitig eine Verallgemeinerung eines Kriteriums, das 1994 von Markus Wiegelmann gefunden wurde (vgl. [39]).

Im abschließenden Teil dieser Arbeit wenden wir die neu entwickelten Algorithmen und Methoden an, um die einfachen 2- und 3-modularen Charaktere der im ATLAS aufgeführten bizyklischen Erweiterungen der sporadischen Gruppe Fi_{22} zu bestimmen. Wir vervollständigen auf diese Weise das zu Beginn erwähnte Klassifikationsproblem der modularen Darstellungen für Fi_{22} im Rahmen des modularen Atlas–Projektes [22]. Die dazu berechneten und im Anhang auf den Seiten 126 und 127 angegebenen modularen Tafeln sind in die Charaktertafel-Bibliothek [4] von GAP aufgenommen.

Inhalt der einzelnen Kapitel

In den ersten beiden Kapiteln wiederholen wir die wichtigsten Begriffe, die zum Verständnis der Arbeit nötig sind. Der kundige Leser kann ohne spürbare Einschränkungen diese Kapitel überspringen, wenn er bereits Erfahrung mit der rechnergestützten modularen Darstellungstheorie hat. Kapitel I ist dabei von grundlegender Natur. Hier wollen wir kurz das Grundgerüst der algorithmischen Darstellungstheorie wiedergeben. Dazu stellen wir noch einmal ausführlicher die Definition von Brauercharakteren und ihren Zusammenhang mit den gewöhnlichen Charakteren vor. Im dritten Abschnitt betrachten wir das Verfahren der Induktion und Restriktion von Moduln genauer. Hier ist es unser Ziel, eine Formulierung des bekannten Adjungiertheitssatzes (man vgl. z.B. (2.19) in [7]) zu beweisen, bei der im Gegensatz zu den in der Literatur verbreiteten Versionen die Bimodulstruktur der beteiligten Homomorphismenmengen von besonderem Interesse ist. Zusätzlich verwenden wir den Koinduktionsfunktor um einige Hilfsaussagen zu beweisen, die wir in Kapitel IV zur Anwendung bringen. Im vierten Abschnitt stellen wir die zwei zentralen Säulen vor, auf denen der in dieser Arbeit verfolgte rechnergestützte Ansatz ruht. Zum einen geben wir Einblick in das theoretische Fundament der MEATAXE. Zum anderen formulieren wir einen Satz von Burnside und Brauer, der zusammen mit der MEATAXE die nachfolgend vorgestellten Verfahren begründet.

Im zweiten Kapitel gehen wir näher auf den ersten Bestandteil des Titels dieser Arbeit ein. Wir stellen die sogenannte Morita-Äquivalenz zwischen zwei Algebren vor. Insbesondere gehen wir dann auf die Auswirkungen einer solchen Äquivalenz für die zu den Algebren gehörenden Modulkategorien ein. Der zweite Teil dieses Kapitels ist der Kondensation gewidmet. Hier steht allerdings nicht so sehr die Praxis im Vordergrund, als dass wir vielmehr die theoretische Grundlage liefern wollen. Von besonderem Interesse ist in diesem Abschnitt auch, Bedingungen vorzustellen, wann Kondensation eine Morita-Äquivalenz liefert und welche Implikationen folgen, wenn die kondensierte Algebra nicht Morita-äquivalent zur Gruppenalgebra ist.

Im dritten Kapitel führen wir zunächst die neue Klasse von linearen Idempotenten ein, die wir zu Kondensationszwecken nutzen wollen. Dann stellen wir zwei neue Kondensationsmethoden für zwei sehr wichtige Klassen von Moduln über Gruppenalgebren vor. Dazu behandeln wir ausführlich die Kondensation von Tensorprodukten und verallgemeinern ein Verfahren von Klaus Lux und Markus Wiegelmann (man vgl. [29]), indem wir die Methoden auf eine Kondensation mit linearen Idempotenten ausweiten. Zur effizienten Berechnung ist es notwendig, eine spezielle Basis für die beiden Tensorfaktoren zu bestimmen. Deswegen stellen wir im darauffolgenden Abschnitt ein neues Verfahren vor, das die benötigten symmetriegerechten Basen in unseren Anwendungen schneller als die bekannten Verfahren berechnet, und sich darüber hinaus auch zur raschen Berechnung von Idempotenten der Kondensationsuntergruppe K eignet, ohne alle ihre Elemente aufsummieren zu müssen. Im letzten Abschnitt formulieren wir die notwendige Theorie und den darauf aufbauenden Algorithmus, der es uns erlaubt, induzierte Moduln unter Verwendung von linearen Idempotenten zu kondensieren. Wir verallgemeinern auf diese Weise ein Ergebnis von Jürgen Müller und Jens Rosenboom, die erstmalig in [33] einen Algorithmus zur Kondensation von induzierten Moduln vorstellen. Die neuen Algorithmen sind dabei stets so formuliert, dass sie einer Implementation leicht zugänglich sind.

Kapitel IV ist sowohl von theoretischer als auch praktischer Bedeutung. Es ist dem Erzeugnisproblem gewidmet, da es häufig in der Praxis zu einer maßgeblich Erhöhung der Rechenlast führt. Der erste Abschnitt behandelt deswegen in einer kurzen Exposition die Auswirkungen des Erzeugnisproblems. Dann stellen wir zwei neue Methoden vor, das Erzeugnisproblem auch in dem von uns betrachteten, allgemeineren Fall der linearen Idempotente zu lösen. Für die erste Methode führen wir als erstes im zweiten Abschnitt neue Erzeugendensysteme ein, die wir als *träge Erzeugendensysteme* bezeichnen. In Abschnitt 3 befassen wir uns damit, träge Erzeugendensysteme zu verkleinern. Wir definieren dazu den Begriff eines *Keims* und stellen einen Algorithmus vor, der träge Erzeugendensysteme verkleinern kann. Darin werden Elemente eines trägen Erzeugendensystems als redundant nachgewiesen, ohne dass sie vorher zeitraubend kondensiert werden müssen. In den darauf folgenden beiden Abschnitten stellen wir zusätzlich ein neues Kriterium vor, mit dem wir in der Lage sind, eine Teilmenge der kondensierten Algebra als ein Erzeugendensystem zu verifizieren. Dieses Kriterium enthält gleichzeitig als Spezialfall ein von Markus Wiegelmann gefundenes Kriterium, welches nach Kenntnis des Autors das einzige Kriterium ist, das sich bisher in der Vergangenheit in der Praxis als nützlich erwiesen hat. Dazu behandeln wir zuerst die Theorie in Abschnitt 4, um dann in Abschnitt 5 eine praktische Implementation des Kriteriums, die wir ebenfalls als Algorithmus angeben, zu formulieren. Das Kapitel schließen wir mit einer Bemerkung, in der wir beide Lösungsansätze, also träge Erzeugendensysteme und das Erzeugniskriterium, vergleichen.

In Kapitel V wird schließlich geerntet. Hier wenden wir die neuen Kodensationsmethoden aus Kapitel III zusammen mit den trägen Erzeugendensystemen aus Kapitel IV auf die modulare Darstellungstheorie der sporadischen Fischergruppe Fi_{22} an. Unser Ziel ist es, die 2- und 3-modularen Charaktere bizyklischer Erweiterungen von Fi_{22} zu bestimmen. Wir bestimmen dazu zunächst die einfachen Brauercharaktere in Charakteristik 3 der Gruppen $2.Fi_{22}$ und $2.Fi_{22}.2$, sowie in Charakteristik 2 die einfachen Brauercharaktere von $3.Fi_{22}$ und zeigen, wie man aus ihnen die Brauercharaktere der sechsfachen Überlagerungen von Fi_{22} und $Fi_{22}.2$ herleitet. Alle Rechnungen legen wir detailliert dar, sodass es dem Leser möglich ist, sie selbständig nachzuvollziehen. Die Zerlegungsmatrizen der betrachteten Gruppen geben wir in einem Anhang an, da sie bedingt durch ihre Größe sonst den Lesefluss und -genuss stören würden.

Danksagungen

Mein Dank gilt an erster Stelle meinem Doktorvater Prof. Dr. Gerhard Hiß, dem ich das interessante und anregende Thema dieser Arbeit verdanke. Seine Betreuung und Unterstützung war mir eine große Hilfe, die mir gleichzeitig die Freiheit ließ, den Inhalt meiner Arbeit selbständig zu entwickeln.

Prof. Dr. Klaus Lux gilt mein großer Dank, dass ich ihn 2003 ein halbes Jahr lang als Visiting Scholar an der University of Arizona besuchen durfte. In den gemeinsamen Diskussionen dieser Zeit sind viele Ideen entstanden, die später Einzug in diese Arbeit gehalten haben. Auch danke ich ihm für seine Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Max Neunhöffer, der zu jeder Zeit bereit war, auf meine Fragen einzugehen. Sicherlich haben die zahlreichen fachlichen Gespräche mit ihm sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Dabei war besonders sein profundes programmiertechnisches Wissen eine wertvolle Informationsquelle, aus der ich schöpfen durfte. Auch danke ich ihm für die zahlreichen konstruktiven Anmerkungen zu frühen Fassungen dieser Dissertation.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung durch ein Doktorandenstipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs „Symmetrie und Hierarchie in mathematischen Modellen“ und der Finanzierung meines Forschungsaufenthaltes an der University of Arizona.

Des weiteren gilt mein ausdrücklicher Dank Dr. Frank Himstedt und Dr. Thomas Breuer. Sie haben Teile dieser Arbeit sehr sorgfältig Korrektur gelesen und mich dabei auf etliche mathematische und sprachliche Unstimmigkeiten hingewiesen und Verbesserungsvorschläge unterbreitet. Thomas Breuer danke ich besonders für seine Hilfe bei der Erstellungen der modularen Charaktertafeln im ATLAS-Format.

Schließlich möchte ich mich noch bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik bedanken. Durch sie herrscht am Lehrstuhl eine großartige Arbeitsatmosphäre. Insbesondere die Bereitschaft aller Kollegen, sich auch für „dumme“ Fragen Zeit und Interesse zu nehmen, schaffen ein Klima, in dem es lohnenswert ist und Spaß macht zu arbeiten.

Kapitel I

Grundlagen

In diesem Kapitel legen wir die Grundlagen für die im Rest der Arbeit verwendete Theorie dar. Es kann von kundigen Lesern, die bereits mit der modularen Darstellungstheorie vertraut sind, übergangen werden.

Wir werden eine kurze Einführung in die modulare Darstellungstheorie geben, indem wir die wichtigsten Begriffe und ihre Zusammenhänge für den Leser noch einmal zusammenstellen. Dabei steht die Anwendung in der rechnergestützten Darstellungstheorie im Vordergrund. Des Weiteren formulieren wir eine Version des Adjungiertheitssatzes ((2.19) in [7]), welche die Bimodulstruktur der betrachteten Homomorphismenmengen berücksichtigt. Diesen Satz neben anderen Ergebnissen aus Abschnitt 3 werden wir dann in Kapitel IV zur Anwendung bringen. Schließlich stellen wir noch das algorithmische Rückgrat dieser Arbeit vor: die MEATAXE. Im Anschluss liefern wir mit dem Satz von Brauer und Burnside den theoretischen Hintergrund für die nachfolgenden praktischen Methoden.

1 Grundsätzliches

Wir wollen in diesem kurzen Abschnitt festhalten, welche grundsätzlichen Vereinbarungen wir für den Rest der Arbeit treffen.

- Alle betrachteten Modul in dieser Arbeit werden grundsätzlich als Rechtsmoduln angesehen. Bei Ausnahmen zu dieser Regel werden wir die Modulstruktur explizit angeben bzw. erwähnen. Des Weiteren sind alle Moduln als endlich erzeugt anzusehen. Ist A eine Algebra, so schreiben wir damit die zugehörige Modulkategorie wie üblich als $\mathfrak{mod}$-A.

- Es sei G eine endliche Gruppe und H und T Untergruppen von G. Die Menge der Linksnebenklassen von H in G bezeichnen wir mit G/H. Analog ist mit $T\backslash G$ die Menge der Rechtsnebenklassen von T in G bezeichnet. Dementsprechend ist $H\backslash G/T$ die Menge der H-T-Doppelnebenklassen von G. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen, wenn wir ein Vertretersystem der jeweiligen Nebenklassenmenge meinen. Es wird dabei immer aus dem Kontext ersichtlich sein, in welcher Bedeutung wir die Bezeichnungen verwenden.

- Bei Tensorprodukten von Moduln treffen wir die Vereinbarung, dass in der Formulierung eines Satzes die Tensorprodukte mit den Ringen gekennzeichnet sind, über denen sie tensoriert sind. In dem anschließenden Beweis und vor allem bei Elementen eines Tensorproduktes lassen wir sie häufig der Übersichtlichkeit wegen weg. Die in Kapitel V auftretenden Tensorprodukte von Moduln sind stets über einem Körper tensoriert.

2 Brauercharaktere

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Fakten des Analogons der modularen Darstellungstheorie zu den gewöhnlichen Charakteren vor. Wir folgen dabei einer überwiegend charaktertheoretischen Einführung wie sie beispielsweise in [10], [19] oder [20] zu finden ist. Dort findet man auch die Beweise zu Aussagen, die wir hier unbewiesen lassen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass wir dem Leser so schnell einen Überblick über die wichtigsten Objekte der modularen Darstellungstheorie und der Beziehungen zwischen ihnen geben können. Ein Zugang, der dieselben Ergebnisse auf der Basis von Moduln liefert und damit einige Zusammenhänge besser illustrieren kann, ist z.B. in [1] zu finden.

Zentral für die modulare Darstellungstheorie ist der Begriff eines p-modularen Systems, das die Verbindung zwischen der gewöhnlichen Theorie in Charakteristik 0 und der modularen Theorie in Primzahlcharakteristik herstellt.

(2.1) Definition/Bemerkung
Es sei p eine Primzahl und $K \supseteq \mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Weiter sei S der Ring der ganzen Zahlen von K und $\wp \trianglelefteq S$ ein Primideal mit $\wp \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Dann ist die Lokalisierung $R := S_\wp$ ein diskreter Bewertungsring in K mit maximalem Ideal $\wp_\wp$, für das $S \cap \wp_\wp = \wp$ gilt. Insbesondere bedeutet dies, dass K der Quotientenkörper von R ist. Mit $F := R/\wp_\wp$ sei der zugehörige Restklassenkörper bezeichnet, der insbesondere endlich von Charakteristik p ist. Das Tripel (K, R, F) heißt *p-modulares System*.

Beweis: Als Ganzheitsring eines Zahlkörpers ist S ein Dedekindring und damit $\wp$ ein Primideal der Höhe Eins (man vgl. Theorem (11.6) in [30]). Deswegen ist nach Lemma III.(2.1) in [34] die Lokalisierung R ein diskreter Bewertungsring. ■

(2.2) Bemerkung
Abweichend zu [10] und [19] wählen wir unser p-modulares System nicht so, dass F ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Dies liegt darin begründet, dass wir in dieser Einführung insbesondere einen praktischen Standpunkt einnehmen wollen. Die in der Praxis auftretenden Darstellungen, die Grundlage fast aller Berechnungen sind, sind stets über einem endlichen Körper gegeben. Der Bewertungsring R, der die wichtige Vermittlerrolle zwischen K und F spielt, wird in der Literatur auch oft als vollständig vorausgesetzt. Der Grund dafür ist, dass man auf diese Weise sicherstellt, dass Idempotente des Gruppenrings FG zu Idempotenten des Rings RG gehoben werden können. Man ist also in der Lage, zu jedem Idempotent $e \in FG$ ein Idempotent $f \in RG$ anzugeben, für das $f + \wp_\wp RG = e$ gilt. Dadurch lassen sich die für die Theorie wichtigen unzerlegbaren Moduln über beiden Körpern in Beziehung setzen. Idempotente können aber

auch bereits unter schwächeren Bedingungen gehoben werden (man vgl. z.B. Korollar II.(6.3) in [34]). Da wir für diese Exposition einen rein charaktertheoretischen Zugang gewählt haben, werden wir die wichtige Rolle von R aber nicht weiter ausführen.

(2.3) Satz
Es sei (K, R, F) ein p-modulares System und

$$U := \{\zeta \in K^* \mid \zeta^m = 1 \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \nmid m\} \leq K^*$$

die Untergruppe der Einheitswurzeln von K, deren Ordnung nicht durch p teilbar ist. Dann liefert die Restklassenabbildung $\bar{\ } : R \to R/\wp_\wp$ einen Monomorphismus von U in die Einheitengruppe F^*.

Beweis: Alle Einheitswurzeln von K sind Einheiten in R. Damit induziert die Restklassenabbildung einen Homomorphismus von U in die Gruppe F^*. Dieser ist injektiv. Denn ist für ein zu p teilerfremdes m das Element $1 \neq \zeta \in K$ eine Nullstelle von $X^{m-1} + \cdots + X + 1 \in K[X]$, so ist $\bar{\zeta} \in F^*$ ebenfalls eine Nullstelle von $X^{m-1} + \cdots + X + 1 \in F[X]$. Wäre $\bar{\zeta} = 1$, so erhielten wir durch Einsetzen den Widerspruch $m = 0$, da p teilerfremd zu m ist. ■

(2.4) Bemerkung
Man beachte, dass die Restklassenabbildung im Allgemeinen keinen Isomorphismus zwischen U und F^* vermittelt, da K im Allgemeinen nicht alle $|F^*|$-ten Einheitswurzeln enthält.

(2.5) Definition
Es sei G eine endliche Gruppe und m ihr Exponent. Ein Körper k heißt *groß genug für G*, wenn k alle m-ten Einheitswurzeln enthält. Wir nennen ein p-modulares System (K, R, F) *groß genug für G*, wenn K und F groß genug für G sind.

Indem wir den Körper K eines p-modularen Systems für eine Gruppe G groß genug wählen, erhalten wir stets einen Zerfällungskörper für G. Gleichzeitig ist der Restklassenkörper dann ebenfalls groß genug.

(2.6) Satz
Ist ein Körper k groß genug für eine endliche Gruppe G, so ist k ein Zerfällungskörper für G und alle ihre Untergruppen.

Beweis: Man vgl. Theorem (17.1) in [7]. ■

(2.7) Satz
Es sei (K, R, F) ein p-modulares System. Ist K groß genug für eine endliche Gruppe G, so ist auch F groß genug für G.

Beweis: Man vgl. Korollar (17.2) in [7]. ■

Damit der Monomorphismus aus Satz (2.3) ein Isomorphismus ist, müssen wir den Körper K wie folgt wählen.

(2.8) Satz
Es seien $n, b \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\exp(G)$ ein Teiler des Produkts $m := p^b(q-1)$ ist, wobei $q := p^n$ ist. Weiter sei $\zeta_m \in \mathbb{C}$ eine primitive m-te Einheitswurzel. Wir setzen $K := \mathbb{Q}(\zeta_m)$. In Analogie zu Definition (2.1) bezeichnen wir mit $S := \mathbb{Z}[\zeta_m]$ den Ring der ganzen Zahlen in K (man vgl. (4.5) in [7]) und $\wp \trianglelefteq S$ ein Primideal mit $\wp \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Folglich ist $R := S_\wp$ ein diskreter Bewertungsring in K mit maximalem Ideal $\wp_\wp \trianglelefteq R$. Der zugehörige Restklassenkörper sei wieder mit $F := R/\wp_\wp$ bezeichnet. Dann ist (K, R, F) ein p-modulares System, das groß genug für G ist. Für den Restklassenkörper F gilt $[F : \mathbb{F}_p] = n$ und die Restklassenabbildung $\bar{\ } : R \to F$ liefert einen Isomorphismus

$$U := \{\zeta \in K \mid \zeta^k = 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } p \nmid k\} \cong F^*.$$

Beweis: Nach der Wahl von m ist K, und damit nach Satz (2.7) auch F, groß genug für G. Es ist n die Ordnung von p modulo $q-1$. Damit ist F nach Satz (4.40) in [7] eine Erweiterung von $\mathbb{F}_p$ vom Grad n. Die primitive $(q-1)$-te Einheitswurzel $\zeta_{q-1} := (\zeta_m)^{p^b}$ ist in K enthalten. Folglich liegen alle alle komplexen $(q-1)$-ten Einheitswurzeln in U. Nach Satz (2.3) liefert die Restklassenabbildung einen Monomorphismus von U nach F^*, unter dem jede Einheitswurzel in R auf eine Einheitswurzel derselben Ordnung in F^* abgebildet wird. Damit umfasst das Bild alle $(q-1)$-ten Einheitswurzeln von F, also ganz F^*. Insbesondere ist U also gleich Menge der komplexen $(q-1)$-ten Einheitswurzeln. ■

(2.9) Definition

(i) Ein p-modulares System, dass die Voraussetzungen von Satz (2.8) für eine endliche Gruppe G erfüllt, nennen wir *richtig groß für G*.

(ii) Mit $G_{p'}$ bezeichnen wir die Menge der p-regulären Elemente von G, d.h.

$$G_{p'} = \{g \in G \mid p \nmid |g|\}.$$

Ist $g \in G_{p'}$, so nennen wir g auch ein *p'-Element*.

(2.10) Definition
Es sei (K, R, F) ein richtig großes p-modulares System für eine endliche Gruppe G. Es sei V ein n-dimensionaler FG-Modul und $\delta : FG \to \mathrm{End}_F(V)$ die von V bewirkte Darstellung. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Nun sei $g \in G_{p'}$ ein p-reguläres Element und $\omega_1, \dots, \omega_n \in F$ die Eigenwerte von $\delta_{\mathcal{B}}(g)$. Wir definieren

$$\varphi_V(g) := \sum_{i=1}^n \zeta_i,$$

wobei $\zeta_i \in U$ und $\bar{\zeta_i} = \omega_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ ist. Die so festgelegte Abbildung φ_V heißt der *Brauercharakter zu V* bzgl. (K, R, F). Wir nennen φ_V *irreduzibel* bzw. *einfach*, falls V ein einfacher Modul ist.

(2.11) Bemerkung
Der Wert $\varphi_V(g)$ ist ein Lift der Spur der Matrix $\delta_{\mathcal{B}}(g)$. Da das charakteristische Polynom einer Matrix und einer zu ihr konjugierten Matrix dasselbe ist, ist φ_V eine Klassenfunktion und unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ von V. Damit ist auch klar, dass isomorphe Moduln denselben Brauercharakter besitzen. Aber φ_V hängt von dem gewählten p-modularen System ab. Denn bei einer anderen Wahl des Primideals $\wp \trianglelefteq S$ in Definition (2.1) erhalten wir einen anderen Bewertungsring. Damit liefern verschiedene p-modulare Systeme verschiedene Isomorphismen $U \to F^*$ im Sinne von Satz (2.8), sodass wir jeweils andere Brauercharaktere erhalten.

Um die aus der Wahlmöglichkeit eines p-modularen Systems resultierende Mehrdeutigkeit zu umgehen, legen wir für die Praxis den Isomorphismus $U \to F^*$ aus Satz (2.8) fest und damit mittelbar auch das p-modulare System.

Ist $q = p^n$ die Ordnung von F und $x \in F$ eine primitive $(q-1)$-te Einheitswurzel, so können wir den Isomorphismus $U \to F^*$ aus Satz (2.8) durch $\exp(2\pi i/(q-1)) \mapsto x$ festlegen. Ist f ein primitives irreduzibles Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, so ist F isomorph zu $\mathbb{F}_p[X]/(f)$. Identifizieren wir F mit dieser Konstruktion, so wählen wir als primitives Element von F die Restklasse $X + (f)$. Da verschiedene irreduzible Polynome verschiedene, isomorphe Körper liefern, wählen wir für f ein spezielles Polynom, das uns den Körper festlegt. Dazu definieren wir eine Ordnung $\prec$ auf den normierten Polynomen von $\mathbb{F}_p[X]$ wie folgt: Ein Polynom $X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}a_iX^i$ identifizieren wir mit der Koeffizientenliste $[a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0]$ und ordnen die Polynome entsprechend der durch $0 < 1 < \ldots < p-1$ induzierten lexikographischen Ordnung auf den Koeffizientenlisten an.

(2.12) Definition
Es sei F ein endlicher Körper vom Grad n über $\mathbb{F}_p$. Das *Conway-Polynom* c_n von F bezüglich $\mathbb{F}_p$ wird induktiv als das bezüglich $\prec$ kleinste primitive Polynom vom Grad n definiert, sodass $(X + (c_n))^{(p^n-1)/(p^d-1)}$ für alle Teiler d von n eine Nullstelle von c_d ist.

(2.13) Bemerkung
Nach einem Ergebnis von Werner Nickel in [35] existiert für jede endliche Erweiterung eines Körpers von Primzahlcharakteristik ein Conway-Polynom.

(2.14) Bemerkung
Legen wir unsere Körpererweiterungen mittels Conway-Polynomen fest, so erhalten wir dank der Forderung, dass $(X + (c_n))^{(p^n-1)/(p^d-1)}$ für alle Teiler d von n eine Nullstelle von c_d ist, besonders einfache Einbettungen von Teilkörpern. Damit ist der Lift aus (2.10) unabhängig von der betrachteten Erweiterung von $\mathbb{F}_p$.
Sowohl in der C-MeatAxe als auch in GAP ist die Endliche-Körper-Arithmetik über Conway-Polynome realisiert. Berechnen wir folglich in GAP den Brauercharakterwert einer darstellenden Matrix eines p'-Elements, so ist der ausgegebene Wert konsistent mit der hier getroffenen Definition.

Von nun an haben wir das durch ein Conway-Polynom vorgegebene richtig große p-modulare System (K, R, F) für G fest gewählt.

(2.15) Definition
Die Menge der irreduziblen Brauercharaktere wird mit $\mathrm{IBr}_F(G)$ bezeichnet, bzw. mit $\mathrm{IBr}(G)$, wenn keine Verwechslungsgefahr bezüglich des Körpers F besteht.

Brauercharaktere haben eine Reihe von Eigenschaften, die sich analog zu den entsprechenden Eigenschaften gewöhnlicher Charaktere verhalten. Eine ausführlichere Behandlung findet man in [10], Abschnitt 6.

(2.16) Bemerkung
Die Menge der irreduziblen Brauercharaktere ist linear unabhängig und die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere von G ist gleich der Anzahl der p'-Konjugiertenklassen von G.
Ist χ ein gewöhnlicher Charakter von G, so ist seine Einschränkung $\hat{\chi}$ auf die p'-Klassen ein Brauercharakter. Insbesondere ist $\hat{\chi}$ eine nicht-negative ganzzahlige Linearkombination der irreduziblen Brauercharaktere.

(2.17) Definition
Nach Bemerkung (2.16) lässt sich die Einschränkung eines gewöhnlichen Charakters χ als

$$\hat{\chi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} d_{\chi\varphi}\varphi$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $d_{\chi\varphi}$ nicht-negative ganze Zahlen sind. Da $\mathrm{IBr}(G)$ eine Basis des ganzzahligen Gitters der Brauercharaktere ist, sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. Sie heißen *Zerlegungszahlen* und die $(|\,\mathrm{Irr}(G)| \times |\,\mathrm{IBr}(G)|)$-Matrix der Zerlegungszahlen heißt *Zerlegungsmatrix*.

Wichtig für unsere spätere Bestimmung von Zerlegungsmatrizen ist der Begriff des Blocks.

(2.18) Definition
Wir partitionieren die Mengen der gewöhnlichen Charaktere und die der Brauercharaktere in sogenannte *Blöcke*. Dabei liegen zwei einfache Brauercharaktere φ und φ' im selben Block, falls gewöhnliche irreduzible Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_s$ und irreduzible Brauercharaktere $\varphi_1, \dots, \varphi_{s+1}$ existieren, wobei $\varphi_1 = \varphi$ und $\varphi_{s+1} = \varphi'$ ist, sodass $d_{\chi_i,\varphi_i} \neq 0$ und $d_{\chi_i,\varphi_{i+1}} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, s$ sind. Ein gewöhnlicher irreduzibler Charakter von G liegt in einem Block B, falls seine Einschränkung auf die p-regulären Klassen eine Summe von einfachen Brauercharakteren aus B ist.

Bei geeigneter Anordnung der Zeilen und Spalten der Zerlegungsmatrix ist diese folglich eine Blockdiagonalmatrix, sodass wir uns zur Berechnung der gesamten Matrix jeweils auf einen Diagonalblock konzentrieren können.

Nach Definition (2.18) hat es den Anschein, dass wir zur Bestimmung der Blockeinteilung der gewöhnlichen Charaktere die einfachen Brauercharaktere bereits kennen müssten. Dies ist glücklicherweise nicht der Fall.

(2.19) Bemerkung
Zur Bestimmung der Blockverteilung der gewöhnlichen Charaktere ist es nicht erforderlich, die einfachen Brauercharaktere zu kennen. Vielmehr kann die zugehörige Einteilung zu Blöcken

durch Betrachten der zentralen Charaktere vorgenommen werden. Für Details sei an dieser Stelle auf (7.8) in [10] verwiesen.

Eine wichtige Invariante eines Blocks ist sein Defekt.

(2.20) Definition
Für einen gewöhnlichen Charakter χ sei $d(\chi)$ der Exponent der höchsten p-Potenz, die ein Teiler der natürlichen Zahl $|G|/\chi(1)$ ist. Ist B ein Block von G, so heißt die natürliche Zahl $d(B) := \max\{\, d(\chi) \mid \chi \text{ liegt in } B \,\}$ der *Defekt von* B.

Eng mit den einfachen Brauercharakteren verwandt sind gewisse gewöhnliche Charaktere, die wir als projektiv unzerlegbar bezeichnen.

(2.21) Definition
Ist φ ein einfacher Brauercharakter, so bezeichnen wir mit

$$\Phi_\varphi := \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} d_{\chi\varphi}\chi$$

den zu φ gehörenden *projektiv unzerlegbaren Charakter*. Die Menge der so definierten Charaktere sei mit $\mathrm{IPr}(G)$ bezeichnet. Eine Linearkombination projektiv unzerlegbarer Charaktere mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten nennen wir einen *projektiven Charakter*.

Der genaue Zusammenhang zwischen einfachen Brauercharakteren und projektiv unzerlegbaren Charakteren offenbart sich erst bei einer modultheoretischen Betrachtungsweise. Der eigentümlich erscheinende Name lässt sich darauf zurückführen, dass jeder projektiv unzerlegbare Charakter der Charakter eines projektiv unzerlegbaren Moduls, also eines unzerlegbaren direkten Summanden der Gruppenalgebra ist. Details findet der interessierte Leser in [1], Abschnitt II.5.

Projektive Charaktere waren in der Vergangenheit ein wesentliches Hilfsmittel zur Bestimmung der Zerlegungsmatrizen etlicher sporadischer Gruppen mit rechnergestützten Methoden. Diese Ergebnisse wurden meist mit dem aus heutiger Sicht „antiken“ Programm MOC [15] erzielt, das sowohl projektive Charaktere als auch Brauercharaktere nutzt, um Zerlegungsmatrizen zu berechnen. In dieser Arbeit werden wir aber einen zu MOC alternativen Weg verfolgen. Die Methoden, die wir noch einführen und in der Praxis umsetzen werden, kommen dabei ohne projektive Charaktere aus. Da diese Charaktere aber von theoretischem Interesse sind, werden wir sie in Abschnitt 4 noch einmal aufgreifen.

Ein charaktertheoretischer Zusammenhang zwischen Brauercharakteren und projektiven Charakteren ist durch folgende Dualität gegeben.

(2.22) Definition/Bemerkung
Es sei φ ein Brauercharakter und Φ ein projektiver Charakter. Durch

$$\langle \varphi, \Phi \rangle' := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \varphi(g)\Phi(g^{-1})$$

definieren wir ein Skalarprodukt, bezüglich dessen $\mathrm{IBr}(G)$ und $\mathrm{IPr}(G)$ bei geeigneter Anordnung duale Basen sind.

Ist p kein Teiler von $|G|$, so ist die Zerlegungsmatrix bei geeigneter Anordnung der Zeilen bzw. Spalten eine Einheitsmatrix. Folglich fallen die Mengen $\mathrm{IBr}(G)$ und $\mathrm{IPr}(G)$ zusammen und wir erhalten das aus der gewöhnlichen Charaktertheorie bekannte Skalarprodukt (man vgl. z.B. (2.16) in [19]).

Wichtig für die Berechnung einer Zerlegungsmatrix von G ist die Erkenntnis, dass nicht alle Zerlegungszahlen ermittelt werden müssen. Es genügt vielmehr zu bestimmen, wie eine geeignete Menge von eingeschränkten gewöhnlichen Charakteren sich in einfache Brauercharaktere zerlegt. Für diese Menge hat sich der englische Begriff Basic-Set etabliert.

(2.23) Definition
Ein *Basic-Set von Brauercharakteren* ist eine Menge von Brauercharakteren von G, die eine Basis des $\mathbb{Z}$-Gitters $\langle \mathrm{IBr}(G)\rangle_{\mathbb{Z}}$ ist.

In Kapitel V, in dem wir Zerlegungsmatrizen für die sporadische Gruppe Fi_{22} bestimmen, wählen wir für jeden Block einer Gruppe G ein separates Basic-Set, das aus eingeschränkten gewöhnlichen Charakteren des Blocks besteht. Um zu verifizieren, dass eine so gewählte Menge ein Basic-Set aus Brauercharakteren ist, genügt es nachzuweisen, dass sich die Einschränkungen aller gewöhnlichen Charaktere des Blocks als ganzzahlige Linearkombinationen der Elemente des Basic-Sets schreiben lassen. Dies kann leicht mit GAP überprüft werden.

Wir schließen diesen einführenden Abschnitt mit einer Bemerkung über die Konstruktion von Brauercharakteren. Für Beweise ziehe man [15], Kapitel 2, 5.1 zu Rate.

(2.24) Definition/Bemerkung
Es sei H eine Untergruppe von G, φ ein Brauercharakter von G und ϑ ein Brauercharakter von H.

(i) Der auf H eingeschränkte Brauercharakter definiert durch $\varphi{\downarrow_H}(h) := \varphi(h)$ für alle $h \in H_{p'}$ ist ein Brauercharakter von H.

(ii) Für ein $g \in G_{p'}$ seien $h_1, \ldots, h_s$ Vertreter derjenigen H-Konjugiertenklassen, die in der G-Konjugiertenklasse von g liegen. Dann wird die p'-Klassenfunktion

$$\vartheta{\uparrow^G}(g) := \sum_{i=1}^{s} \frac{|C_G(g)|}{|C_H(h_i)|}\vartheta(h_i)$$

der *induzierte Brauercharakter* genannt und ist selbst ein Brauercharakter von G.

In dieser Arbeit stellen Tensorprodukte die für uns wichtigste Methode dar, um Brauercharaktere aus anderen Brauercharakteren zu generieren.

(2.25) Bemerkung
Sind φ_V und φ_W zwei Brauercharaktere zu zwei FG-Moduln V und W, so ist $\varphi_V \cdot \varphi_W$ der Brauercharakter des Tensorproduktes $V \otimes_F W$. Wir schreiben deswegen den zugehörigen Brauercharakter auch stets als $\varphi_V \otimes \varphi_W$.

3 Induktion und Restriktion

In diesem arabesk anmutenden Abschnitt beschäftigen wir uns eingehender mit den Induktions- und Restriktionsfunktoren zwischen zwei Modulkategorien über Gruppenalgebren. Motiviert durch die Notwendigkeit in Abschnitt IV.4 Bimoduln zu betrachten, steht im Zentrum unseres Interesses der wohlbekannte Adjungiertheitssatz (man vgl. z.B. Satz (2.19) in [7]), den wir in einer etwas stärkeren Version benötigen, welche die Bimodulstruktur der unterliegenden Homomorphismenmengen berücksichtigt. Zusätzlich stellen wir den weniger bekannten Koinduktionsfunktor vor.

Es sei im Folgenden G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

(3.1) Bemerkung
Es seien A, B und C Ringe. Es sei ${}_AV_C$ ein A-C-Bimodul und ${}_BW_C$ ein B-C-Bimodul. Die Homomorphismenmenge $\mathrm{Hom}_C({}_AV_C, {}_BW_C)$ wird zu einem B-A-Bimodul durch folgende Operationen: Es sei $\phi \in \mathrm{Hom}_C({}_AV_C, {}_BW_C)$. Für ein $a \in A$ definieren wir ϕa über $(\phi a)(v) := \phi(av)$ für alle $v \in V$ und für ein $b \in B$ definieren wir $b\phi : v \mapsto b \cdot \phi(v)$ für alle $v \in V$.

(3.2) Definition
Es sei V ein FH-Modul und W ein FG-Modul.

(i) Wir bezeichnen mit $(-)\uparrow^G$ bzw. ind_H^G den *Induktionsfunktor* von $\mathfrak{mod}$-FH nach $\mathfrak{mod}$-FG, d.h. $V\uparrow^G := V \otimes_{FH} FG$. Des Weiteren bezeichnen wir mit coind_H^G den *Koinduktionsfunktor*, d.h. $\mathrm{coind}_H^G(V) := \mathrm{Hom}_{FH}({}_{FG}FG_{FH}, V)$. Nach Bemerkung (3.1) mit $A = FG$, $B = F$ und $C = FH$ ist $\mathrm{coind}_H^G(V)$ ein FG-Rechtsmodul.

(ii) Wir bezeichnen mit $(-)\downarrow_H$ den *Restriktionsfunktor* von $\mathfrak{mod}$-FG nach $\mathfrak{mod}$-FH, indem W als FH-Modul $W\downarrow_H$ aufgefasst wird. Des Weiteren bezeichnen wir mit res_H^G den Funktor zwischen $\mathfrak{mod}$-FG und $\mathfrak{mod}$-FH, für den $\mathrm{res}_H^G(W) := \mathrm{Hom}_{FG}({}_{FH}FG_{FG}, W)$ gilt. Wir bezeichnen res_H^G ebenfalls als *Restriktionsfunktor*. Nach Bemerkung (3.1) mit $A = FH$, $B = F$ und $C = FG$ ist $\mathrm{res}_H^G(W)$ ein FH-Rechtsmodul.

Dass die beiden Funktoren $(-)\downarrow_H$ und res_H^G als Restriktionsfunktor bezeichnet werden können, liegt darin begründet, dass sie isomorph sind:

(3.3) Bemerkung
Es sind res_H^G, $(-)\downarrow_H$ und $- \otimes_{FG} FG_{FH}$ isomorphe Funktoren von $\mathfrak{mod}$-FG nach $\mathfrak{mod}$-FH.

Beweis: Die Funktoren res_H^G und $(-)\downarrow_H$ sind isomorph vermöge der natürlichen Transformation $\tau = (\tau_W)_{W \in \mathfrak{mod}\text{-}FG}$ mit $\tau_W(\varphi) = \varphi(1)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{FG}(FG, W)$. Ebenso ist $- \otimes_{FG} FG_{FH}$ isomorph zu res_H^G vermöge der natürlichen Transformation $\tau'_W = (\tau'_W)_{W \in FG\text{-mod}}$, wobei wir $\tau'_W(w \otimes g) := (\varphi : 1 \mapsto wg)$ definieren. Um dies zu sehen, betrachten wir für einen FG-Homomorphismus $f : W \to W'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_{FG} FG_{FH} \arrow[r, "\tau'_W"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_{FG}"'] & \mathrm{Hom}_{FG}(FG, W) \arrow[r, "\tau_W"] \arrow[d, "f_*"] & W\downarrow_H \arrow[d, "f"] \\
W' \otimes_{FG} FG_{FH} \arrow[r, "\tau'_{W'}"] & \mathrm{Hom}_{FG}(FG, W') \arrow[r, "\tau_{W'}"] & W'\downarrow_H
\end{tikzcd}$$

Es kommutiert in beiden Zellen, da zum einen $\tau_{W'} \circ f_*(\varphi) = f(\varphi(1)) = (f{\downarrow_H} \circ \tau_W)(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{FG}(FG, W)$, und zum anderen, da für alle $w \otimes g \in W \otimes_{FG} FG_{FH}$ die Gleichung $\tau'_{W'} \circ (f \otimes \mathrm{id})(w \otimes g) = \tau'_{W'}(f(w) \otimes g)$ gilt. Letzteres ist $(1 \mapsto f(w)g) = (1 \mapsto f(wg)) = f \circ (1 \mapsto wg) = f_*(\tau'_W(w \otimes g))$.
Definieren wir weiter $\tau^- = (\tau^-_W)_{W \in FG\text{-mod}}$ durch $\tau^-_W(w) := (\varphi : 1 \mapsto w)$ für alle $w \in W$, so erhalten wir ebenso eine Transformation von $(-){\downarrow_H}$ nach res^G_H und es gilt $\tau_W \circ \tau^-_W(w) = w$ und $\tau^-_W \circ \tau_W(\varphi) = \varphi$ für alle $w \in W{\downarrow_H}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{FG}(FG, W)$. In Analogie ist $\tau'^- = (\tau'^-_W)_{W \in FG\text{-mod}}$ mit $\tau'^-_W(\varphi) := \varphi(1) \otimes 1$ eine Transformation von $\mathrm{Hom}_{FG}(FG, W)$ zum Tensorprodukt $W \otimes_{FG} FG_{FH}$ und es ist $\tau'_W \circ \tau'^-_W = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{FG}(FG,W)}$, sowie $\tau'^-_W \circ \tau'_W = \mathrm{id}_{W \otimes FG}$. ∎

(3.4) Lemma
Es sei A ein Ring und ${}_AV_{FH}$ ein A-FH-Bimodul. Dann ist $\mathrm{ind}^G_H({}_AV_{FH}) \cong \mathrm{coind}^G_H({}_AV_{FH})$ als A-FG-Bimoduln.

Beweis: Es sei $\phi \in \mathrm{coind}^G_H({}_AV_{FH})$. Wir definieren $\tau : \mathrm{coind}^G_H({}_AV_{FH}) \to \mathrm{ind}^G_H({}_AV_{FH})$ via $\tau(\phi) := \sum_{t \in G/H} \phi(t) \otimes_{FH} t^{-1}$ für eine fest gewählte Linkstransversale G/H von H in G. Die Abbildung τ ist ein FG-Modulmorphismus, denn ist g ein Element von G, so ist $\tau(\phi g) = \sum_{t \in G/H} (\phi g)(t) \otimes_{FH} t^{-1}$. Nun ist $(\phi g)(t) = \phi(gt)$ und es existieren genau ein $t' \in G/H$ und ein $h' \in H$ mit $gt = t'h'$. Folglich ist $(\phi g)(t) \otimes_{FH} t^{-1} = \phi(t') \otimes_{FH} h't^{-1}$. Da $t'^{-1}g = h't^{-1}$ ist, erhalten wir auf diese Weise den Summanden $\phi(t') \otimes_{FH} t'^{-1}g$. Da G transitiv auf G/H operiert, werden die Transversalelemente als Indexmenge der Summe permutiert und wir folgern $\tau(\phi g) = \sum_{t' \in G/H} \phi(t') \otimes_{FH} t'^{-1}g = \tau(\phi)g$. Damit ist τ ein FG-Modulmorphismus. Dass τ auch ein A-Linksmodulmorphismus ist, ist leichter zu sehen. Denn in diesem Fall ist $\tau(a\phi) = \sum_{t \in G/H} (a\phi)(t) \otimes t^{-1} = \sum_{t \in G/H} a \cdot \phi(t) \otimes t^{-1} = a \sum_{t \in G/H} \phi(t) \otimes t^{-1} = a\tau(\phi)$.
Des Weiteren besteht Kern τ nur aus dem Nullmorphismus, da aus der Definition von $\tau(\phi)$ folgt, dass $\tau(\phi)$ genau dann gleich null ist, wenn $\phi(t) = 0$ ist für alle $t \in G/H$. Da ϕ ein FH-Modulmorphismus ist, verschwindet ϕ somit auf FG. Um zu sehen, dass τ surjektiv ist, definieren wir zu gegebenem $v \otimes t^{-1} \in \mathrm{ind}^G_H(V)$ ein $\phi \in \mathrm{coind}^G_H(V)$ durch $\phi(t) := v$ und $\phi(t') := 0$ für alle $t \neq t' \in G/H$. Dann ist $\tau(\phi) = \phi(t) \otimes t^{-1} = v \otimes t^{-1}$. ∎

(3.5) Bemerkung
Im Beweis von Lemma (3.4) haben wir zur Definition des Isomorphismus nur benutzt, dass die gewählte Linkstransversale von H in G endlich ist. Damit gilt die Isomorphie des induzierten Moduls zum Koinduzierten auch für nicht endliche Gruppen, solange diese Endlichkeitsbedingung erfüllt ist.

(3.6) Definition
Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißen *adjungiert*, falls eine Isotransformation $\tau = (\tau_{X,Y})_{X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}}$ existiert, sodass $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), =)$ vermöge τ isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(=))$ in der Kategorie der Funktoren von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ in die Kategorie der Mengen ist. Wir nennen F dann *linksadjungiert* zu G, bzw. G *rechtsadjungiert* zu F.

(3.7) Satz (Adjungiertheitssatz)
Es seien A, B, C und D Ringe, sowie ${}_AM_C$, ${}_CL_D$ und ${}_BN_D$ entsprechende Bimoduln. Es ist

$$\mathrm{Hom}_C({}_AM_C, \mathrm{Hom}_D({}_CL_D, {}_BN_D)) \cong \mathrm{Hom}_D({}_AM \underset{C}{\otimes} L_D, {}_BN_D)$$

als B-A-Bimoduln.
Insbesondere ist der Funktor $- \otimes_C L_D$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Hom}_D({}_CL_D, =)$.

Beweis: Nach Bemerkung (3.1) sind beide angegebenen Morphismenmengen B-A-Bimoduln. Es sei $\phi \in \mathrm{Hom}_C({}_AM_C, \mathrm{Hom}_D({}_CL_D, {}_BN_D))$. Wir definieren eine Abbildung τ zwischen den angegebenen B-A-Bimoduln über $\tau(\phi) := (m \otimes l \mapsto \phi(m)(l))$. Die Abbildung τ ist ein B-A-Bimodulmorphismus, denn es gilt für alle $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$ und $l \in L$ die Gleichung $\tau(b\phi a)(m \otimes l) = (b\phi a)(m)(l) = (b \cdot \phi(am))(l) = b(\phi(am)(l)) = b \cdot \tau(\phi)(am \otimes l) = (b\tau(\phi)a)(m \otimes l)$, wie man ebenfalls unter Beachtung der Bimodulstruktur aus Bemerkung (3.1) sieht. Wir definieren eine Umkehrabbildung λ, indem wir $\lambda(\varphi) : {}_AM_C \to \mathrm{Hom}_D({}_CL_D, {}_BN_D)$ als $\lambda(\varphi)(m)(l) := \varphi(m \otimes l)$ für ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_D({}_AM \otimes_C L_D, {}_BN_D)$ festsetzen. In der Tat ist damit $(\tau \circ \lambda)(\varphi) = \varphi$ und $(\lambda \circ \tau)(\phi) = \phi$ für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_D({}_AM \otimes_C L_D, {}_BN_D)$ und $\phi \in \mathrm{Hom}_C({}_AM_C, \mathrm{Hom}_D({}_CL_D, {}_BN_D))$. Wegen $\lambda(b\phi a)(m) = (l \mapsto (b\phi a)(m \otimes l) = (l \mapsto b \cdot \phi(am \otimes l)) = b \cdot (l \mapsto \varphi(am \otimes l)) = b \cdot \lambda(\varphi)(am) = (b\lambda(\varphi)a)(m)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist λ ebenfalls ein B-A-Modulmorphismus.
Für die zweite Behauptung zeigen wir, dass τ eine Transformation zwischen den Bifunktoren $\mathrm{Hom}_D(F(-), =)$ und $\mathrm{Hom}_C(-, G(=))$ liefert, wobei wir abkürzend F für den Tensorfunktor $- \otimes_C L_D$ und G für den Funktor $\mathrm{Hom}_D({}_CL_D, =)$ schreiben. Des Weiteren weisen wir die Moduln nun nicht mehr explizit als Bimoduln aus und verzichten auf das Symbol „$\circ$“ bei der Verkettung von Morphismen. Für zwei Morphismen $g : N \to N'$ und $f : M' \to M$ ist zu zeigen, dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(M, G(N)) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "{(f,G(g))}"'] & \mathrm{Hom}_D(F(M), N) \arrow[d, "{(F(f),g)}"] \\
\mathrm{Hom}_C(M', G(N')) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Hom}_D(F(M'), N')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "{(f,g_*)}"] & \tau(\phi) \arrow[d, mapsto, "{(f\otimes \mathrm{id}_L,g)}"] \\
g\phi f \arrow[r, mapsto] & \tau(g\phi f) \overset{!}{=} g\tau(\phi)(f \otimes \mathrm{id}_L)
\end{tikzcd}$$

kommutieren. Dabei bezeichne (f, g) für zwei Morphismen $\mathrm{Hom}(f, g) = f^*g_*$. Dazu betrachten wir für $m' \otimes l' \in M' \otimes L$ die folgende Gleichung: Es ist

$$\begin{aligned}
g\tau(\phi)(f \otimes \mathrm{id}_L)(m' \otimes l') &= (g\tau(\phi))(f(m') \otimes l') \\
&= \big(g\phi(f(m'))\big)(l') \\
&= (g\phi f)(m')(l') \\
&= \tau(g\phi f)(m' \otimes l').
\end{aligned}$$

Also folgt auch die zweite Behauptung. ■

(3.8) Proposition
Es seien A und B Ringe und ${}_AM_{FH}$ sowie ${}_BN_{FG}$ entsprechende Bimoduln.

(i) Induktion ind_H^G ist der linksadjungierte Funktor der Restriktion res_H^G, d.h. es gilt

$$\mathrm{Hom}_{FG}(\mathrm{ind}_H^G({}_AM_{FH}), {}_BN_{FG}) \cong \mathrm{Hom}_{FH}({}_AM_{FH}, \mathrm{res}_H^G({}_BN_{FG}))$$

als B-A-Bimoduln.

(ii) Die Koinduktion coind_H^G ist der rechtsadjungierte Funktor der Restriktion res_H^G, d.h. es gilt

$$\mathrm{Hom}_{FH}(\mathrm{res}_H^G({}_BN_{FG}), {}_AM_{FH}) \cong \mathrm{Hom}_{FG}({}_BN_{FG}, \mathrm{coind}_H^G({}_AM_{FH}))$$

als A-B-Bimoduln.

Beweis: Beide Adjunktionen sind Spezialfälle das Satzes (3.7). Wir müssen in diesen Fällen nur beachten, dass $\mathrm{ind}_H^G = - \otimes_{FH} FG_{FG}$ und res_H^G nach Bemerkung (3.3) isomorph zum Tensorfunktor $- \otimes_{FG} FG_{FH}$ ist. ■

(3.9) Korollar (Frobenius-Reziprozität)
Es sei V ein FG-Modul und W ein FH-Modul. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(W{\uparrow}^G, V) &= \dim_F \mathrm{Hom}_{FH}(W, V{\downarrow}_H), \\ \dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(V, W{\uparrow}^G) &= \dim_F \mathrm{Hom}_{FH}(V{\downarrow}_H, W). \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Proposition (3.8) unter Benutzung der Isomorphismen aus Bemerkung (3.3) und Lemma (3.4). ■

Abschließend wollen wir noch bei einem weiteren wohlbekannten Ergebnis zeigen, dass der in der Literatur gemeinhin angegebene Isomorphismus abelscher Gruppen auch eine Bimodulstruktur erhält.

(3.10) Lemma
Ist A ein Ring, V ein A-FG-Bimodul und $e \in FG$ ein Idempotent, so ist

$$\mathrm{Hom}_{FG}(eFG, V) \cong Ve$$

als A-$eFGe$-Bimoduln.

Beweis: Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{FG}(eFG, V)$. Der Isomorphismus ist gegeben durch $\tau : \varphi \mapsto \varphi(e)$, was wegen $(\varphi \cdot ege) \mapsto \varphi(ege \cdot e) = \varphi(e)ege$ und $(a\varphi) \mapsto (a\varphi)(e) = a \cdot \varphi(e)$ offensichtlich ein A-$eFGe$-Bimodulmorphismus ist. Des Weiteren ist wegen $\varphi(eg) = \varphi(e)g$ für alle $g \in G$ der Morphismus φ genau dann gleich Null, wenn $\varphi(e) = 0$ ist. ■

(3.11) Korollar
Es sind $\mathrm{End}_{FG}(eFG)$ und $eFGe$ isomorphe F-Algebren.

Beweis: Dies ist klar mit Lemma (3.10), wenn wir dort A durch $eFGe$ und V durch eFG ersetzen. Dann ist insbesondere $(\varphi \circ \psi)(e) = \varphi(\psi(e)) = \varphi(e\psi(e)) = \varphi(e)\psi(e)$ und τ aus Lemma (3.10) damit ein Algebrenisomorphismus. ■

4 Die MeatAxe

Mit wachsendem Defekt ist es zunehmend schwieriger, die Zerlegungsmatrix eines Blocks mit theoretischen Methoden zu bestimmen. Dies lieferte die Motivation für Richard Parker zu Beginn der 1980er Jahre die rechnergestützte Darstellungstheorie voranzutreiben. Sein Ziel war es, grundlegende Fragen, wie die nach der Irreduzibilität oder den Kompositionsfaktoren eines FG-Moduls V, durch konkrete Rechnungen mit den von V bewirkten Matrixdarstellungen zu beantworten. Zusammen mit Jon Thackray schuf er eine Sammlung von Computerprogrammen, die unter dem Namen MeatAxe [36] bekannt wurde. Im Laufe der Jahre ist sie durch zahlreiche Arbeiten verschiedener Autoren um viele Funktionen erweitert worden und heute zu einem wichtigen Werkzeug der modularen Darstellungstheorie heran gereift. Die derzeit aktuelle Fassung ist die C-MeatAxe von Michael Ringe in der Version 2.4.3, deren wichtigstes Programm `chop` einen Modul vollautomatisch in seine Kompositionsfaktoren zerlegt, deren Isomorphietypen bestimmt und einfache Matrixdarstellungen auf den Kompositionsfaktoren ausgibt.

Eine Vorstellung aller MeatAxe-Algorithmen sprengt den Rahmen dieser Arbeit. Der interessierte Leser sei an dieser Stelle auf [27] und [36] verwiesen, um Details über die Implementation der grundlegenden Algorithmen zu erfahren. Wir wollen in diesem Abschnitt nur konzis den theoretischen Unterbau von Parkers Pionierarbeit auf dem Gebiet der rechnergestützten Darstellungstheorie vorstellen und gleichzeitig die Legitimation für unsere in späteren Abschnitten eingeführten Methoden liefern.

Die zentrale Aufgabe, einen FG-Modul V auf Irreduzibilität zu testen, kann naiv so gelöst werden, dass für jedes Element $0 \neq v \in V$ der kleinste Teilmodul von V bestimmt wird, der v enthält. Das dazu benötigte Verfahren, das allgemeiner zu einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{V}$ von V den Abschluss $\mathcal{V}A$ dieser Menge unter der Operation mit A bestimmt, ist im Umfang der MeatAxe enthalten und wird als „Aufspinnen von $\mathcal{V}$“ bezeichnet. Spinnt jedes Element $0 \neq v \in V$ zum ganzen Modul V auf, so wissen wir, dass V irreduzibel ist. Ist V hingegen nicht irreduzibel, so finden wir durch die erschöpfende Suche mit Sicherheit einen nicht-trivialen Untermodul von V. Der offensichtliche Nachteil dieses naiven Ansatzes ist, dass seine Anwendbarkeit stark von der Dimension von V und der Größe des Körpers F abhängt. Eine geschickte Verbesserung dieses naiven Irreduzibilitätstests liefert das folgende von Simon Norton stammende Kriterium.

(4.1) Satz (Nortons Irreduzibilitätskriterium)
Es sei A eine F-Algebra, V ein A-Modul und $\delta : A \to \mathrm{End}_F(V)$ eine von V bewirkte Darstellung. Weiter sei $a \in A$ ein Element, sodass $\mathrm{Kern}\,\delta(a)$ echt in V enthalten und nicht-trivial ist. Dann gilt:
Der Modul V ist genau dann irreduzibel, wenn alle $0 \neq v \in \mathrm{Kern}\,\delta(a)$ zum ganzen Modul V aufspinnen und es ein $0 \neq v^* \in \mathrm{Kern}\,\delta(a)^*$ gibt, das zum dualen A-Linksmodul V^* aufspinnt.

Beweis: Ist V irreduzibel, so sind seine einzigen Untermoduln V und 0. Damit folgt, dass alle $0 \neq v \in \mathrm{Kern}\,\delta(a)$ bzw. alle $0 \neq v^* \in \mathrm{Kern}\,\delta(a)^*$ zu V bzw. V^* aufspinnen. Ist umgekehrt V nicht irreduzibel, so existiert ein nicht-trivialer Untermodul W. Dann ist sein Annullator $W^0 \leq V^*$ ebenfalls nicht-trivial und echt in V^* enthalten. Enthält W außer der Null weitere

Elemente von Kern $\delta(a)$, so existiert ein $0 \neq v \in W \cap \operatorname{Kern} \delta(a)$, das zu einem Untermodul von W aufspinnt. Schneiden sich W und Kern $\delta(a)$ trivial, so ist die Einschränkung $\delta(a)|_W$ ein Automorphismus von W, d.h. insbesondere gilt Bild $\delta(a)|_W = W$. Da Kern $\delta(a)^* = (\operatorname{Bild} \delta(a))^0$ ist, ist der Kern von $\delta(a)^*$ in W^0 enthalten. Damit spinnt jedes Element von Kern $\delta(a)^*$ zu einem Untermodul von W^0 auf. ■

Nach Wahl einer Basis von V erhalten wir in der Praxis die in Nortons Kriterium benötigte Darstellung δ^* auf dem dualen Modul V^* als Matrixdarstellung durch Transponieren der darstellenden Matrizen von A auf V. Damit lässt sich Satz (4.1) direkt rechnerisch implementieren. Iterieren wir die Anwendung des Irreduzibilitätskriteriums, indem wir als Eingabe für den Algorithmus Matrixdarstellungen auf dem gefundenen Untermodul bzw. dem zugehörigen Faktormodul wählen, so zerlegen wir den Ausgangsmodul sukzessive in seine Kompositionsfaktoren. Dies ist im Wesentlichen das Vorgehen des Programms `chop` der C-MeatAxe. Es hat sich deswegen die denglische Formulierung etabliert, „einen Modul zu choppen".

Die Voraussetzung für dieses Vorgehen ist, dass wir in vertretbarer Zeit Elemente der Algebra finden, auch Worte genannt, welche die Voraussetzung erfüllen, dass sie singulär sind. Zusätzlich ist es zweckmäßig, singuläre Worte zu wählen, die einen möglichst niedrig-dimensionalen Kern besitzen, damit nicht so sehr viele Vektoren überprüft werden müssen. Nach einem Ergebnis von Derek Holt und Sarah Rees [18] kann dazu die Suche nach geeigneten Worten systematisch organisiert werden, sodass es in der Praxis kein Problem darstellt, Worte zu finden, die singulär sind und deren Kerne von kleinstmöglicher Dimension sind.

Das Programm `chop` ermöglicht es uns, reduzible Darstellungen wie z.B. Permutationsdarstellungen in ihre irreduziblen Konstituenten zu zerlegen. Auf diese Weise erhalten wir direkt einfache Darstellungen der untersuchten Gruppe. Insbesondere können wir durch Zerlegen von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen hoffen, in ihrer Zerlegung neue, noch nicht bekannte einfache Darstellungen zu finden. Theoretisch ist es sogar möglich, auf diese Weise alle einfachen Darstellungen einer endlichen Gruppe konstruktiv zu bestimmen, wie ein Satz von Brauer und Burnside zeigt.

(4.2) Satz (Burnside-Brauer)
Es sei ψ ein treuer Brauercharakter von G, der genau n verschiedene Werte auf $G_{p'}$ annimmt. Dann ist jeder einfache Brauercharakter $\phi \in \operatorname{IBr}(G)$ ein Konstituent einer der Charaktere ψ^j für $0 \leq j \leq n$.

Beweis: Es seien $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_1 = \psi(1)$ die verschiedenen von ψ angenommenen Werte und $C_i = \{g \in G_{p'} \mid \psi(g) = a_i\}$ die zu a_i gehörende Vereinigung von Konjugiertenklassen. Es sei weiter $\Phi \in \operatorname{IPr}(G)$ ein projektiv unzerlegbarer Charakter und $\phi_i = \sum_{g \in C_i} \Phi(g^{-1})$. Dann ist

$$\left\langle \psi^j, \Phi \right\rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G_{p'}} \psi(g)^j \Phi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{n} a_i^j \phi_i.$$

Ist der zu Φ gehörende einfache Brauercharakter für kein $0 \leq j \leq n$ in ψ^j enthalten, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j \phi_i = 0, \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Fassen wir dies als ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in den n Unbekannten ϕ_i auf, so ist die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems die Vandermondsche Determinante $\pm \prod_{i<j}(a_i - a_j)$ und damit insbesondere ungleich Null. Folglich muss $\phi_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ sein. Wegen der Treue von ψ ist $C_1 = \{1\}$. Damit ist aber $\phi_1 = \Phi(1) \neq 0$ und wir erhalten einen Widerspruch. ■

Es gilt natürlich folgendes für uns interessantes Korollar:

(4.3) Korollar
Es sei G eine einfache Gruppe und V ein nicht-trivialer FG-Modul. Dann kommt jeder einfache FG-Modul W für ein $n \in \mathbb{N}$ als Kompositionsfaktor im n-fachen Tensorprodukt $V^{\otimes n}$ vor.

Beweis: Diese Umformulierung von Satz (4.2) ist aufgrund der Beziehungen zwischen Moduln und Brauercharakteren klar. ■

Jon Alperin formuliert in [1] eine Variante von Satz (4.2), die über die ursprüngliche Aussage hinausgeht. Eine Schranke für die maximale Tensorpotenz, die zu betrachten ist, kann in diesem Fall aber nicht mehr angegeben werden:

(4.4) Satz
Ist V ein treuer FG-Modul und P ein unzerlegbarer projektiver FG-Modul, dann ist P isomorph zu einem direkten Summanden des n-fachen Tensorproduktes $V^{\otimes n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Dies ist Satz 1 in Abschnitt 7 von [1]. ■

Wir können folgendes Analogon zu Korollar (4.3) formulieren:

(4.5) Korollar
Es sei G eine einfache Gruppe und V ein nicht-trivialer FG-Modul. Dann kommt jeder einfache FG-Modul W für ein $n \in \mathbb{N}$ sowohl als Quotient als auch als Untermodul im n-fachen Tensorprodukt $V^{\otimes n}$ vor.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz (4.4) und der Struktur projektiv unzerlegbarer Moduln. ■

Wollen wir folglich alle einfachen Brauercharaktere bzw. Darstellungen einer endlichen Gruppe bestimmen, so können wir theoretisch das von Richard Parker in [36] vorgeschlagene Programm verfolgen: Zunächst besorgen wir uns durch Choppen etwa eines Permutationsmoduls ein paar kleine einfache Darstellungen. Dann bilden wir mit ihnen alle möglichen Tensorprodukte und zerlegen diese wiederum mit der MEATAXE. Dieses Vorgehen iterieren wie solange, bis wir alle einfachen Darstellungen erhalten haben.

Natürlich ist es in der Praxis aufgrund der uns gesetzten Speicher- und Rechenleistungsgrenzen im Allgemeinen nicht möglich, alle Darstellungen einer Gruppe zu klassifizieren, indem wir sie konstruieren und als Matrixdarstellungen abspeichern. Eine Anwendung der MEATAXE ist daher nur für kleine Moduln bzw. Darstellungen möglich und sinnvoll.

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir sehen, mit welchen Methoden wir bei einer direkten Herangehensweise Unmögliches wieder in das Korsett der rechnerischen Handhabbarkeit zwängen, um in einer Abwandlung von Parkers Programm alle einfachen Darstellungen bzw. Brauercharaktere einer endlichen Gruppe zu bestimmen.

Kapitel II

Morita-Äquivalenz und Kondensation

Wie bereits in Abschnitt I.4 erwähnt, stößt der durch die Programme der MEATAXE nahe gelegte konstruktive Zugang in der Praxis schnell an seine Grenzen. Dem naiven Vorgehen, die modularen Darstellungen zwecks ihrer Klassifikation zu konstruieren, wird durch die zur Verfügung stehenden Speicher- und Rechenzeitkapazitäten bei größeren Graden ein Ende gesetzt. Ein Beispiel soll dies illustrieren: Besitzt eine endliche Gruppe G beispielsweise zwei irreduzible Darstellungen der Grade 350 und 4500 mit Einträgen in GF(2), so hat die Darstellung auf dem Tensorprodukt der zugrunde liegenden Moduln den Grad 1 575 000. Eine darstellende Matrix belegt damit etwa 289 GB Speicher und ist zum gegenwärtigen Stand der Technik nicht in vertretbarer Zeit rechnerisch handhabbar. In der Tat werden wir uns in Kapitel V einer Darstellung dieser Größenordnung gegenüber sehen.

In diesem Kapitel wollen wir einen Ausweg aus dieser Sackgasse vorstellen. Wir können nämlich anstelle der riesigen Darstellungen der Gruppenalgebra die Darstellungen einer anderen wesentlich kleineren Algebra untersuchen. Die theoretische Grundlage dieses Reduktionsprozesses wird durch die sogenannte Morita-Äquivalenz der zugehörigen Algebren formalisiert.

1 Morita-Äquivalenz

Die Morita-Äquivalenz zweier F-Algebren, wobei F ein Körper ist, ist über die Äquivalenz der zugrunde liegenden Modulkategorien definiert.

(1.1) Definition
Zwei Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen *äquivalent*, falls zwei kovariante Funktoren $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $\mathcal{F}' : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ existieren, so dass $\mathcal{F}' \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}'$ natürlich äquivalent zum jeweiligen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ bzw. $\mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ sind.
Ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{mod}\text{-}B$ für zwei F-Algebren A und B, so heißen A und B *Morita-äquivalent* (vermöge $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$), falls $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ äquivalent sind.

Sind A und B Morita-äquivalente Algebren vermöge $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$, so übertragen sich viele Eigenschaften eines A-Moduls V auf den B-Modul $\mathcal{F}(V)$. Wir wollen im Folgenden die für uns wichtigsten Eigenschaften, die bei diesem Übergang erhalten bleiben, vorstellen. Die Beweise sind dabei recht technischer Natur, weshalb wir sie hier nicht angeben werden. Der interessierte Leser kann sie Kapitel 6 von [2] entnehmen.

Zunächst stellen wir fest, dass Morita-Äquivalenz kurze exakte Sequenzen erhält.

(1.2) Proposition
Es seien A und B Morita-äquivalente Algebren. Die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$$

ist genau dann (zerfallend und) exakt in $\mathfrak{mod}$-A, wenn die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\mathcal{F}(\iota)} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{F}(W) \longrightarrow 0$$

(zerfallend und) exakt in $\mathfrak{mod}$-B ist.

Beweis: Man vergleiche Proposition 21.4. in [2]. ■

Darüber hinaus bleiben die folgenden Eigenschaften beim Übergang von $\mathfrak{mod}$-A zu $\mathfrak{mod}$-B vermöge $\mathcal{F}$ erhalten.

(1.3) Proposition
Sind A und B Morita-äquivalent und $V \in \mathfrak{mod}$-A, so gilt

(i) Der Untermodulverband von V ist isomorph zum Untermodulverband von $\mathcal{F}(V)$.

(ii) V ist projektiv genau dann, wenn $\mathcal{F}(V)$ projektiv ist.

(iii) V ist genau dann einfach, wenn $\mathcal{F}(V)$ einfach ist.

(iv) V ist unzerlegbar genau dann, wenn $\mathcal{F}(V)$ unzerlegbar ist.

(v) Die Zentren $Z(A)$ und $Z(B)$ sind isomorphe Ringe.

Beweis: Teil (i) ist Aussage der Proposition 21.7. in [2]. Teil (ii) wird in Proposition 21.6. in [2] bewiesen. Die Teile (iii) und (iv) folgen aus (i). Behauptung (v) ist Gegenstand von Proposition 21.10 in [2] ■

(1.4) Korollar
Sind A und B Morita-äquivalente Algebren, so ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Moduln die gleiche für A und B.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Teil (iii) aus Proposition (1.3). ■

Mit Proposition (1.3) und Korollar (1.4) sehen wir nun, dass wir, um Auskunft über die Zerlegung eines A-Moduls V in seine Kompositionsfaktoren zu erhalten, stattdessen den B-Modul $\mathcal{F}(V)$ zerlegen können. Wissen wir darüber hinaus die durch $\mathcal{F}$ induzierte Zuordnung der einfachen A-Moduln zu den einfachen B-Moduln, so können wir alle relevanten Informationen über V aus $\mathcal{F}(V)$ gewinnen.

Wir wollen als nächstes den Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ aus Definition (1.1), die eine Morita-Äquivalenz liefern, ein Gesicht geben. Der Prototyp eines solchen Funktors ist ein Tensorfunktor, der einen Modul mit einem geeigneten Bimodul für beide Algebren tensoriert.

(1.5) Satz
Es seien A und B zwei F-Algebren, M ein A-B-Bimodul und N ein B-A-Bimodul. Ist dann $M \otimes_B N \cong A$ als A-A-Bimoduln und $N \otimes_A M \cong B$ als B-B-Bimoduln, dann definieren die Tensor-Funktoren $- \otimes_A M$ und $- \otimes_B N$ eine Morita-Äquivalenz zwischen A und B.

Beweis: Es sei W ein B-Modul. Damit ist $(- \otimes_A M) \circ (- \otimes_B N)(W) = - \otimes_A M(W \otimes_B N) = (W \otimes_B N) \otimes_A M$. Aufgrund der natürlichen Isomorphie $(W \otimes_B N) \otimes_A M \cong W \otimes_B (N \otimes_A M) \cong W \otimes_B B \cong W$, ist $(- \otimes_A M) \circ (- \otimes_B N)$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathfrak{mod}\text{-}B}$. Ebenso lässt sich zeigen, dass $(- \otimes_B N) \circ (- \otimes_A M)$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathfrak{mod}\text{-}A}$ ist. ■

(1.6) Definition
Ist Q ein projektiver A-Modul, sodass für jeden einfachen A-Modul S die projektive Hülle von S bis auf Isomorphie ein direkter Summand von Q ist, so heißt Q ein *Progenerator* von $\mathfrak{mod}$-A.

Ist Q ein Progenerator von $\mathfrak{mod}$-A, so ist A zum Endomorphismenring von Q Morita-Äquivalent.

(1.7) Korollar
Es sei Q ein Progenerator von $\mathfrak{mod}$-A und $P := \mathrm{Hom}_A(Q, A)$. Dann ist A Morita-äquivalent zu $E := \mathrm{End}_A(Q)$ und die Äquivalenz ist gegeben durch $\mathcal{F} = - \otimes_A P$ und $\mathcal{F}' = - \otimes_E Q$.

Beweis: Wir definieren die Abbildungen $\Phi : P \otimes_E Q \to A, \varphi \otimes q \mapsto \varphi(q)$ und dazu entsprechend $\Psi : Q \otimes_A P \to E, q \otimes \varphi \mapsto (q' \mapsto q\varphi(q'))$. Dann ist Φ ein A-A-Bimodulhomomorphismus und Ψ ein E-E-Bimodulhomomorphismus. Da Q ein Progenerator von $\mathfrak{mod}$-A ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\pi \in \mathrm{Hom}_A(Q^{(n)}, A)$ mit $\mathrm{Bild}\, \pi = A$. Folglich existiert zu gegebenem $a \in A$ ein $\varphi \in P$ und ein $q \in Q$ mit $\varphi(q) = a$. Damit ist Φ surjektiv. Der Homomorphismus Ψ ist ebenfalls surjektiv, da Q projektiv ist und epimorphes Bild einer direkten Summe von Kopien von A ist. Folglich ist jeder Endomorphismus von Q eine Summe von Endomorphismen, die über A faktorisieren.
Um die Injektivität von Φ und Ψ zu zeigen, beachten wir die beiden elementaren Identitäten

$$\begin{aligned} \phi\Psi(q \otimes \varphi) &= \Phi(\phi \otimes q)\varphi, \\ \Psi(q \otimes \varphi)q' &= q\Phi(\varphi \otimes q'), \end{aligned}$$

wobei $\phi, \varphi \in P$ und $q, q' \in Q$ sind. Es sei nun $\sum_i \varphi_i \otimes q_i \in \mathrm{Kern}\, \Phi$. Da Φ surjektiv ist, können wir die $1 \in A$ als Bild unter Φ darstellen, d.h. es existiert ein Element $\sum_j \varphi'_j \otimes q'_j \in P \otimes Q$ mit $\Phi(\sum_j \varphi'_j \otimes q'_j) = 1$. Folglich erhalten wir unter Anwendung der Identitäten, dass $\sum_i \varphi_i \otimes q_i = \sum_{i,j} \varphi_i \otimes q_i \Phi(\varphi'_j \otimes q'_j) = \sum_{i,j} \Phi(\varphi_i \otimes q_i)\varphi'_j \otimes q'_j = \sum_i \Phi(\varphi_i \otimes q_i) \sum_j \varphi'_j \otimes q'_j = 0$ ist und damit ist Φ injektiv. In analoger Weise folgt aus der Surjektivität von Ψ, dass wir $\mathrm{id}_Q \in E$ als Bild unter Ψ darstellen können und wir schließen ebenso, dass Ψ injektiv ist. Nun folgt aus Satz (1.5), dass E und A Morita-äquivalent sind. ■

Durch Satz (1.5) können wir vermöge eines geeigneten Bimoduls zweier Algebren, durch geeignete Tensorfunktoren eine Morita-Äquivalenz erhalten. Umgekehrt lässt sich jede Morita-Äquivalenz ebenfalls durch einen Tensorfunktor realisieren, wie der folgende Satz von Morita zeigt.

(1.8) Satz (Morita)
Sind A und B Morita-äquivalente Algebren vermöge der Funktoren $\mathcal{F} : \mathfrak{mod}\text{-}A \to \mathfrak{mod}\text{-}B$ und $\mathcal{F}' : \mathfrak{mod}\text{-}B \to \mathfrak{mod}\text{-}A$. Dann ist $P := \mathcal{F}(A)$ ein A-B-Bimodul, $Q := \mathcal{F}'(B)$ ein B-A-Bimodul und $P \otimes_B Q \cong A$ als A-A-Bimoduln und $P \otimes_A Q \cong B$ als B-B-Bimoduln. Darüber hinaus gilt:

(i) P ist ein Progenerator von $\mathfrak{mod}\text{-}B$ und $A\text{-}\mathfrak{mod}$, und Q ist ein Progenerator von $\mathfrak{mod}\text{-}A$ und $B\text{-}\mathfrak{mod}$.

(ii) Es existieren Bimodulisomorphismen

$$Q \cong \mathrm{Hom}_A(P, A) \cong \mathrm{Hom}_B(P, B),$$
$$P \cong \mathrm{Hom}_A(Q, A) \cong \mathrm{Hom}_B(Q, B).$$

(iii) Es existieren Ringisomorphismen

$$A \cong \mathrm{End}_B(P) \cong \mathrm{End}_B(Q),$$
$$B \cong \mathrm{End}_A(P) \cong \mathrm{End}_A(Q).$$

(iv) Die Tensor-Funktoren $- \otimes_A P$ und $- \otimes_B Q$ liefern eine Morita-Äquivalenz zwischen $\mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\mathfrak{mod}\text{-}B$.

(v) Die Hom-Funktoren $\mathrm{Hom}_A(Q, -)$ und $\mathrm{Hom}_B(P, -)$ liefern eine Morita-Äquivalenz zwischen $\mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\mathfrak{mod}\text{-}B$.

Beweis: Dies ist Gegenstand der Proposition 22.1. in [2]. ■

2 Kondensation

Die Methode der Kondensation ermöglicht es im Idealfall eine Morita-Äquivalenz zwischen einer F-Algebra A und einer in ihr enthaltenen kleineren Algebra herzustellen. Die theoretischen Grundlagen dazu sind von James A. Green in Abschnitt 6.2 von [11] erstmalig ausgeführt. Ihre Anwendbarkeit auf die rechnergestützte Darstellungstheorie ist etwa zur selben Zeit unabhängig von Greens Ergebnissen von Richard Parker und Jon Thackray entdeckt und umgesetzt worden. Die Bezeichnung „Kondensation“ geht ebenfalls auf Richard Parker zurück. Es ist auch in Jon Thackrays Dissertation [38], dass die Methode der Kondensation in ihrer Anwendung zur Untersuchung von Darstellungen erstmalig schriftlich festgehalten worden ist.

Ausgangspunkt dieses Abschnitts ist das Korollar (1.7). Es besagt, dass eine F-Algebra A und der Endomorphismenring $\mathrm{End}_A(V)$ eines A-Moduls V Morita-äquivalent sind, falls V ein Progenerator der Modulkategorie $\mathfrak{mod}\text{-}A$ ist. In diesem Abschnitt betrachten wir nun den projektiven A-Modul $V = eA$, wobei $e \in A$ ein Idempotent ist. Die Orthogonalität der Idempotente e und $(1 - e)$ induziert eine Zerlegung der Algebra in eine direkte Summe von F-Vektorräumen (die sogenannte *Pierce-Zerlegung*):

$$A = eAe \oplus eA(1 - e) \oplus (1 - e)Ae \oplus (1 - e)A(1 - e).$$

Gleichsam induziert das Idempotent e die Zerlegung eines beliebigen A-Moduls W in eine direkte Summe von F-Vektorräumen $W = We \oplus W(1-e)$. Der Summand eAe der Pierce-Zerlegung von A ist selbst eine Algebra mit Einselement e und offensichtlich ist der direkte Summand Ve von V ein Modul dieser Algebra. Den auf diese Weise erreichten Übergang von $\mathfrak{mod}\text{-}A$ zu $\mathfrak{mod}\text{-}eAe$, wollen wir nun formalisieren. Wir folgen dabei [27].

2.1 Kondensation und Morita-Äquivalenz

In diesem Abschnitt stellen wir den Kondensationsfunktor vor und gehen im Lichte von Abschnitt 1 der Frage nach, unter welchen Bedingungen die beiden Algebren A und eAe Morita-äquivalent sind.

(2.1) Definition
Es sei A eine F-Algebra und $e \in A$ ein Idempotent. Die Teilalgebra eAe von A nennen wir die *zu e gehörende kondensierte Algebra*. Wir definieren den zugehörigen *Kondensationsfunktor* $\mathrm{cond}^A_{eAe} : \mathfrak{mod}\text{-}A \to \mathfrak{mod}\text{-}eAe$ durch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{cond}^A_{eAe} : V & \mapsto & Ve, \\ \varphi & \mapsto & \varphi|_{Ve} \end{array}$$

für $V \in \mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$. Der aus V resultierende eAe-Modul Ve wird als *kondensierter Modul* bezeichnet.

Bevor wir Bedingungen angeben, die sichern, dass der Kondensationsfunktor eine Morita-Äquivalenz induziert, stellen wir zunächst fest, dass die nahe liegende Wahl der Tensorfunktoren $(- \otimes_A Ae)$ und $(- \otimes_{eAe} eA)$ fast eine natürliche Äquivalenz der Modulkategorien $\mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\mathfrak{mod}\text{-}eAe$ liefert.

(2.2) Bemerkung
Ist A eine F-Algebra und e ein Idempotent, dann ist $eA \otimes_A Ae \cong eAe$ als eAe-eAe-Bimoduln. Folglich ist $(- \otimes_A Ae) \circ (- \otimes_{eAe} eA)$ natürlich äquivalent zu $\mathrm{id}_{\mathfrak{mod}\text{-}eAe}$. Darüber hinaus sind die Funktoren $- \otimes_A Ae$ und cond^A_{eAe} natürlich äquivalent vermöge der natürlichen Transformation $(\tau_V)_{V \in \mathfrak{mod}\text{-}A}$ mit $\tau_V : V \otimes_A Ae \to Ve, v \otimes e \mapsto ve$, so dass wir anstelle des Tensor-Funktors den Kondensationsfunktor betrachten können.

Zur Morita-Äquivalenz zwischen A und eAe fehlt uns folglich nur noch, dass der Funktor $(- \otimes_{eAe} eA) \circ (- \otimes_A Ae)$ natürlich äquivalent zum Identitätsfunktor auf $\mathfrak{mod}\text{-}A$ ist. Dazu geben wir jetzt eine Reihe äquivalenter Bedingungen an, unter denen wir eine Morita-Äquivalenz vermöge $(- \otimes_{eAe} eA)$ und $(- \otimes_A Ae)$ erhalten.

(2.3) Satz
Es sei $e \in A$ ein Idempotent und $e_1A, \dots, e_rA$ Repräsentanten der Isomorphieklassen der projektiv unzerlegbaren Moduln von A. Weiter seien $S_1, \dots, S_r$ Repräsentanten der Isomorphieklassen von einfachen A-Moduln, sodass $e_iA/\operatorname{rad} e_iA \cong S_i$ ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Tensor-Funktoren $- \otimes_{eAe} eA$ und $- \otimes_A Ae$ induzieren eine Morita-Äquivalenz zwischen den Algebren A und eAe.

(ii) Es ist $AeA = A$.

(iii) Für alle $1 \leq i \leq r$ ist der A-Modul $e_i A$ ein direkter Summand von eA.

(iv) Es ist $S_i e \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Beweis: (i)⇒(iv): Ist S ein einfacher A-Modul, so ist $S \otimes_A Ae \cong Se$ nach Proposition (1.3) ebenfalls einfach und damit ist insbesondere $Se \neq 0$.
(iv)⇒(iii): Da $\mathrm{Hom}_A(eA, S_i) \cong S_i e$ nach Lemma I.(3.10) ist und damit $\mathrm{Hom}_A(eA, S_i) \neq \{0\}$ ist, muss $e_i A$ ein direkter Summand von eA sein.
(iii)⇒(ii): Ist f ein primitives Idempotent in A, dann ist $fA \cong e_i A$ für ein $1 \leq i \leq r$. Bezeichnen wir mit φ den zugehörigen Isomorphismus, so sei $a := \varphi(f)$ und $a' := \varphi^{-1}(e_i)$. Folglich ist $f = \varphi^{-1}(\varphi(f)) = \varphi^{-1}(a) = \varphi^{-1}(e_i a) = \varphi^{-1}(e_i) e_i a = a' e_i a$. Damit ist $f \in AeA$. Da f beliebig ist, enthält das zweiseitige Ideal AeA das Element $1 \in A$ und somit ist $AeA = A$.
(ii)⇒(iii): Der projektiv unzerlegbare Modul $e_i A$ ist genau dann ein direkter Summand von eA, wenn $\mathrm{Hom}_A(eA, S_i) \neq \{0\}$ ist. Nach (ii) ist $S_i eA = S_i AeA = S_i A = S_i$ und deshalb muss $S_i e \neq 0$ sein und somit auch $\mathrm{Hom}_A(eA, S_i)$.
(iii)⇒(i): Da $e_i A$ ein direkter Summand von eA ist für alle $1 \leq i \leq r$, ist eA ein Progenerator von $\mathfrak{mod}\text{-}A$ (man vgl. (1.6)). Damit liefern die Tensor-Funktoren $- \otimes_A Ae$ und $- \otimes_{eAe} eA$ nach Korollar (1.7) und Korollar I.(3.11) eine Morita-Äquivalenz zwischen $\mathfrak{mod}\text{-}A$ und $\mathfrak{mod}\text{-}eAe$. ■

Insbesondere Bedingung (iv) aus Satz (2.3) lässt sich in der Praxis relativ leicht überprüfen, wie wir in Abschnitt III.1 noch ausführen werden.

(2.4) Definition
Es sei A eine F-Algebra und $e \in A$ ein Idempotent. Erfüllt e eine der Bedingungen von (2.3), so nennen wir e ein *treues* Idempotent von A.

(2.5) Korollar
Es sei e ein treues Idempotent von A und V ein A-Modul. Dann ist $Ve \otimes_{eAe} eA$ isomorph zu $V = VeA$ als A-Modul.

Beweis: Da e treu ist, ist der Funktor $\mathcal{F} := (- \otimes_A Ae) \circ (- \otimes_{eAe} eA)$ natürlich äquivalent zum Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathfrak{mod}\text{-}A}$. Da V somit isomorph zu $\mathcal{F}(V)$ ist, können wir unmittelbar folgern, das V auch isomorph zu $(- \otimes_A Ae)(Ve) = Ve \otimes_{eAe} eA$ ist. Aus der Treue von e folgt mit Satz (2.3)(ii) weiter, dass $V = VA = VAeA = VeA$ ist. ■

Wir können folglich aus einem kondensierten Modul den ursprünglichen Modul zurückgewinnen. Dieses Gegenstück zur Kondensation bezeichnen wir deshalb als Entkondensation.

(2.6) Definition
Wir wollen im Folgenden den Tensor-Funktor $- \otimes_{eAe} eA : \mathfrak{mod}\text{-}eAe \to \mathfrak{mod}\text{-}A$ als *Entkondensationsfunktor* bezeichnen und ihn als $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}$ schreiben.

2.2 Nicht-treue Kondensation

Der Idealfall einer Kondensation mit treuem Idempotent stellt sich in der Praxis in seltenen Fällen ein. Im Allgemeinen können wir nicht auf ein treues Idempotent hoffen. Obwohl die Modulkategorien $\mathfrak{mod}$-A und $\mathfrak{mod}$-eAe dann nicht mehr äquivalent sind, erhält der Kondensationsfunktor weiterhin genügend viele Eigenschaften von A-Moduln. Auf diese Weise erlaubt eine Analyse des kondensierten Moduls auch bei nicht-treuer Kondensation, Rückschlüsse auf den ursprünglichen Modul zu ziehen. Wir halten zunächst ein Analogon zu Satz (1.2) fest:

(2.7) Lemma
Der Kondensationsfunktor cond_{eAe}^{A} ist exakt. Insbesondere entspricht der Quotient zweier kondensierter Moduln dem Kondensierten des Quotienten der ursprünglichen Moduln.

Beweis: Da nach Definition (2.1) der Kondensationsfunktor ein Restriktionsfunktor ist, ist dies limpid. ■

Des weiteren gelten im Allgemeinen zwar nicht die Äquivalenzen aus (1.3), aber für einfache Moduln gilt die folgende Aussage.

(2.8) Lemma
Ist S ein einfacher A-Modul, so ist $\mathrm{cond}_{eAe}^{A}(S) = Se$ ein einfacher eAe-Modul oder 0.

Beweis: Es sei $0 \neq v \in Se$. Dann erhalten wir unmittelbar $v \cdot eAe = v \cdot Ae = Se$, da S einfach ist. Folglich ist Se einfach. ■

Obwohl wir bei einer Kondensation mit einem nicht-treuen Idempotent eventuell einige Kompositionsfaktoren des ursprünglichen Moduls beim Übergang zu seinem Kondensierten verschwinden, erhalten wir doch stets eine Kompositionsreihe, deren Faktoren Informationen über die Faktoren einer Kompositionsreihe des Ausgangsmoduls liefern.

(2.9) Korollar
Der Kondensationsfunktor cond_{eAe}^{A} bildet Kompositionsreihen von A-Moduln auf Kompositionsreihen von eAe-Moduln ab.

Beweis: Dies folgt aus den Lemmata (2.7) und (2.8). ■

Sind wir folglich nur an der Vielfachheit eines theoretisch zu erwartenden Kompositionsfaktors eines FG-Moduls interessiert, so genügt es, ein Kondensationsidempotent zu wählen, das nur die Bedingung erfüllt, den vermuteten einfachen Modul nicht zu Null zu kondensieren. Ein praktisches Beispiel für diesen Fall werden wir in Abschnitt V.2 sehen, wenn wir die Gruppe $2.\mathrm{Fi}_{22}.2$ betrachten.

Im Falle einer treuen Kondensation erlaubt uns die Anwendung des Funktors $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}$, aus dem kondensierten Modul Ve, den ursprünglichen A-Modul V zurückzugewinnen (man vgl. Korollar (2.5)). In der Situation, dass e kein treues Idempotent mehr ist, gilt diese Entkondensation so nicht mehr. Zwar ist der Funktor $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}$ auch im nicht-treuen Fall ein Rechtsinverses des Kondensationsfunktors, wie wir in Bemerkung (2.2) gezeigt haben, aber kein Linksinverses mehr.

Wird für ein nicht-treues Idempotent e ein einfacher $eFGe$-Modul entkondensiert, so kann der resultierende Modul einen Untermodul besitzen, der durch Multiplikation mit e annulliert wird. Dazu formulieren wir wie in [11] die folgende Definition:

(2.10) Definition
Für einen A-Modul V bezeichnen wir mit $V_{(e)}$ die Summe aller Untermoduln von V, die von e annulliert werden, d.h. $V_{(e)}$ ist der größte A-Untermodul von V, der in $V(1-e)$ liegt.

Um nach erfolgter Kondensation eines einfachen Moduls durch Entkondensation wieder einen einfachen zu erhalten, müssen wir den störenden Untermodul $V_{(e)}$ herausfaktorisieren.

(2.11) Proposition
Es sei W ein einfacher eAe-Modul. Dann ist $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(W)_{(e)}$ der eindeutige maximale Untermodul von $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(W)$ und der Faktormodul $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(W)/\,\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(W)_{(e)}$ ein einfacher A-Modul. Insbesondere ist jeder einfache eAe-Modul der kondensierte eines einfachen A-Moduls.

Beweis: Es sei W ein einfacher eAe-Modul und V die abkürzende Bezeichnung des zugehörigen entkondensierten Moduls $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(W)$. Der Modul $V_{(e)}$ ist ein echter Untermodul von V, denn es ist $(V/V_{(e)})e \cong W$ nach (2.7) und (2.2), und W ist nicht der Nullmodul. Es sei $V' \lneqq V$ ein echter Untermodul. Ist $V'e \neq 0$, so ist $V'e = Ve$, da $V'e \leq Ve \cong W$ und W einfach ist. Folglich erhalten wir $V' \supseteq V'eA = VeA = W \otimes_{eAe} eA = V$, was ein Widerspruch zur Wahl von V' ist. Also ist $V'e = 0$ und damit liegt V' in $V_{(e)}$. Damit ist gezeigt, dass der Untermodul $V_{(e)}$ der eindeutige maximale Untermodul von V ist. Setzen wir $U := V/V_{(e)}$, so erhalten wir mit U einen einfachen A-Modul mit $Ue = W$. ■

Faktorisieren wir nach erfolgter Entkondensation eines einfachen eAe-Moduls den maximalen Untermodul heraus, so erhalten wir wieder den ursprünglichen Modul.

(2.12) Proposition
Es sei V ein einfacher A-Modul mit $Ve \neq 0$. Dann ist $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(Ve)/\,\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(Ve)_{(e)}$ isomorph zu V.

Beweis: Wir definieren einen A-Modulmorphismus $\varphi : Ve \otimes_{eAe} eA \to V$ über $ve \otimes a \mapsto vea$ für alle $v \in V$ und $a \in A$. Das Bild von φ ist $VeA = V$, da nach Voraussetzung $Ve \neq 0$ und V einfach ist. Folglich ist der Kern von φ ein maximaler Untermodul von $\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(Ve)$. Da dieser nach Proposition (2.11) eindeutig ist, ist $\mathrm{Kern}\,\varphi = (\mathrm{uncond}_{eAe}^{A}(Ve))_{(e)}$, woraus die Behauptung folgt. ■

(2.13) Korollar
Sind V und V' zwei einfache A-Moduln, die nicht zum Nullmodul kondensieren, so ist $Ve \cong V'e$ genau dann, wenn $V \cong V'$ ist.

Beweis: Dies folgt aus den Propositionen (2.11) und (2.12). ■

(2.14) Korollar
Es sei $\{V_1, \dots, V_r\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem einfacher A-Moduln. Dabei gelte $V_i e \neq 0$ für $1 \leq i \leq s$ für ein $s \leq r$. Dann ist $\{V_1 e, \dots, V_s e\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem einfacher eAe-Moduln.

Beweis: Folgt aus den Propositionen (2.11) und (2.12). ■

2.3 Peakwort-Kondensation

Durch die Arbeit [28] von Klaus Lux, Jürgen Müller und Michael Ringe hat sich neben der klassischen Kondensation die sogenannte Peakwort-Kondensation etabliert. Hierbei geht es aber nicht mehr nur darum, einen FG-Modul V mit einem vorgegebenen Idempotent e auf seinen Unterraum Ve zu projizieren, sondern Kenntnisse über die Untermoduln des Moduls selbst zu liefern. Dazu ermöglicht die Methode der Peakwort-Kondensation, den gesamten Untermodulverband von V zu bestimmen. Obwohl wir uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf andere Methoden konzentrieren werden, wollen wir doch diese Methode der Vollständigkeit halber kurz darstellen.

Wir bezeichnen im Folgenden für ein $a \in A$ mit $\mathrm{Kern}_V\, a$ den Kern des durch Rechtsmultiplikation mit a auf einem A-Modul V induzierten F-Endomorphismus.

(2.15) Definition
Es sei S ein einfacher A-Modul.

(i) Ein A-Modul V heißt S-*lokal*, falls $V/\operatorname{rad} V \cong S$ ist.

(ii) Ein Idempotent $e \in A$ heißt S-*primitiv*, falls der Modul eA ein S-lokaler Modul ist.

(iii) Ein Element $a_S \in A$ heißt S-*Peakwort* bezüglich V, falls gilt

  (a) $\mathrm{Kern}_T\, a_S = 0$ für alle Kompositionsfaktoren T von V mit $T \ncong S$.
  (b) $\dim(\mathrm{Kern}_S\, a_S^2) = [\mathrm{End}_A(S) : F]$.

(2.16) Lemma
Es sei $e \in A$ ein Idempotent und W ein eAe-Modul. Ist S ein Konstituent von $\bar{W} := W \otimes_{eAe} eA/\operatorname{rad}(W \otimes_{eAe} eA)$, dann ist $Se \neq 0$. Damit hat $\bar{W}$ nur S als Konstituenten, falls e ein S-primitives Idempotent ist.

Beweis: Dies ist Lemma 2.2 in [28]. ■

(2.17) Definition
Es sei S ein einfacher A-Modul und $\mathcal{M}(V)$ der Untermodulverband des A-Moduls V. Weiter bezeichne $\mathcal{L}_S(V)$ die Menge der S-lokalen A-Untermoduln und $\mathcal{M}_S(V)$ die Teilmenge der A-Untermoduln W, für die $W/\operatorname{rad} W$ isomorph zu einer direkten Summe ist, deren Summanden alle isomorph zu S sind. Ein Element von $\mathcal{M}_S(V)$ heißt S-*radikal*.

Die Untermodulverbände S-radikaler Moduln lassen sich durch Kondensation bestimmen.

(2.18) Satz
Es sei $e \in A$ ein S-primitives Idempotent und mit $\mathcal{M}(Ve)$ sei der eAe-Untermodulverband von Ve bezeichnet. Dann ist die Abbildung

$$\kappa : \mathcal{M}_S(V) \to \mathcal{M}(Ve), W \mapsto We$$

ein Verbandsisomorphismus. Sein Inverses ist gegeben durch

$$\kappa^{-1} : \mathcal{M}(Ve) \to \mathcal{M}_S(V), \bar{W} \mapsto \bar{W}A.$$

Beweis: Siehe Satz 2.1 in [28]. ■

Des weiteren erhalten wir die folgende Beschreibung von $\mathcal{L}_S(V)$.

(2.19) Satz
Es sei $e \in A$ ein S-primitives Idempotent. Dann gilt:

(i) Die Menge der lokalen eAe-Untermoduln von Ve ist die Menge der zyklischen eAe-Untermoduln von Ve, d.h. die Menge der Untermoduln, die von einem $0 \neq v \in Ve$ erzeugt werden.

(ii) $\mathcal{L}_S(V)$ ist die Menge der A-Untermoduln, die von der Form vA für ein $0 \neq v \in Ve$ sind.

Beweis: Dies ist Satz 2.3 in [28]. ■

Die Menge der S-lokalen Untermoduln von V spielt eine entscheidende Rolle in der Bestimmung des vollständigen Untermodulverbands. Nach einem Satz von Benson und Conway ([3], bzw. Satz 1.1 in [28]) genügt die Kenntnis von $\mathcal{L}_S(V)$ für alle Konstituenten S von V, die Inklusionsbeziehungen zwischen den lokalen Untermoduln und eine weitere Relation in $\mathcal{L}_S(V)$ (die sogenannten „Dotted-Lines“, man vgl. Definition 1.1 in [28]), um daraus den vollständigen Verband $\mathcal{M}(V)$ zu gewinnen.

Die Bedeutung der Peakworte liegt nun darin, dass sie S-primitive Idempotente liefern.

(2.20) Satz
Es sei V ein treuer A-Modul und $a \in A$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Idempotent $e \in A$ mit der Eigenschaft: Ist $V = \mathrm{Kern}_V\, a^r \oplus \mathrm{Bild}_V\, a^r$ die Fitting-Zerlegung von V bezüglich des durch a induzierten Endomorphismus, dann ist $\mathrm{Kern}_V\, a^r = Ve$ und $\mathrm{Bild}_V\, a^r = V(1-e)$. Ist a ein S-Peakwort bezüglich V, dann ist e ein S-primitives Idempotent.

Beweis: Dies ist eine Zusammenfassung der Sätze 3.1, 3.2 und 3.4 in [28]. ■

Zusammen mit Lemma (2.16) wird nun auch die Bedeutung des Namens „Peakwort“ klar: Ist das Element $a \in A$ ein S-Peakwort bezüglich V, so erhalten wir durch Entkondensation von $\mathrm{Kern}_V\, a^r$ des vorangestellten Satzes (2.20) und Aufspinnen eines von Null verschiedenen Vektors des Resultats, einen S-lokalen Untermodul von V. In diesem Sinne liefert uns a einen Modul, dessen „Gipfel“ (engl. peak) durch S gegeben ist.

Für die Peakwortkondensation muss zu jedem Kompositionsfaktor S von V ein S-Peakwort gefunden werden. Dazu werden in der Implementation von Lux, Müller und Ringe für jedes S

systematisch Elemente der Algebra, sogenannte Worte, generiert und auf ihre Peakworteigenschaften nach Definition (2.15) hin untersucht. Besitzt V folglich viele nicht-isomorphe Kompositionsfaktoren, so werden entsprechend viele Bedingungen an ein Algebraelement gestellt, um ein Peakwort eines bestimmten Kompositionsfaktors zu sein. Demzufolge schnellt die Rechenzeit in diesem Fall in die Höhe und die Suche kann in der Praxis nach geraumer Zeit erfolglos abbrechen. Näheres zu diesem Verfahren findet man in den Abschnitten 4 und 5 von [28].

Kapitel III

Kondensation mit linearen Idempotenten

In Kapitel II haben wir die theoretischen Grundlagen für die Methode der Kondensation gelegt. In diesem Kapitel wollen wir nun auf die Theorie die Praxis folgen lassen.
Dazu sei fortan G ein endliche Gruppe und $A := FG$ die zu G gehörende Gruppenalgebra. Weiter sei im Folgenden $K \leq G$ eine p'-Untergruppe von G, d.h. die Charakteristik p des Körpers F ist kein Teiler der Ordnung von K. Damit ist FK halbeinfach und zentral-primitive Idempotente lassen sich aus den Schur-Relationen (man vgl. (3.41) in [7]) bestimmen. Die Untergruppe K liefert uns auf diese Weise Idempotente, die wir zu Kondensationszwecken heranziehen können. Wir nennen K deswegen die *Kondensationsuntergruppe*.
Der kanonische Kandidat für ein Idempotent $e \in A$ ist das zur trivialen Darstellung von K gehörende zentral-primitive Idempotent. In der Vergangenheit hat sich diese restriktiv anmutende Festlegung als besonders fruchtbar erwiesen und somit hat sich dieses Idempotent in der Anwendung an erster Stelle etabliert. Denn ist V ein FG-Modul und e das zur trivialen Darstellung von K gehörende Idempotent, so lässt sich Ve als der Fixraum von K in V beschreiben, d.h. als der Raum aller Vektoren von V, die unter der Operation von K fest bleiben. Diese Beschreibung macht diesen Fall rechnerisch besonders handhab- und implementierbar, so dass alle dem Autor bekannten rechnerisch zur Verfügung stehenden Verfahren zur Kondensation von A-Moduln auf diesem Ansatz basieren.
Wir wollen einer Anregung von Jon Thackray folgend in dieser Arbeit diese Situation verallgemeinern, um die wichtige Methode der Kondensation auf eine größere Klasse von Idempotenten auszuweiten. Dieses Vorgehen bringt entscheidende Verbesserungen mit sich. Zum einen erweitern wir unser Arsenal von Idempotenten einer Kondensationsuntergruppe, um so eventuell ein treues Idempotent zu finden, wenn unsere erste Wahl, nämlich das triviale, kein treues Idempotent ist. Zum anderen erweist sich die vergrößerte Klasse von Idempotenten besonders bei der Kondensation von zentralen Erweiterungen als hilfreich. Enthält eine Kondensationsuntergruppe nämlich das Zentrum der Gruppe, so kondensieren bei traditioneller Kondensation alle treuen Moduln dieser zu null, da die zentralen Elemente wie Skalare operieren und somit der Unterraum der K-Fixpunkte trivial ist. Mit allgemeineren Idempotenten haben wir in diesem Fall die Möglichkeit, Kondensationsuntergruppen zu wählen, die das Zentrum enthalten.
Eine weiterführende Untersuchung der Endomorphismenringe monomialer Moduln zu den hier vorgestellten Idempotenten findet der Leser in [32].

1 Lineare Idempotente

Wir wollen als erstes die Klasse von Idempotenten, die wir zur Kondensation zulassen, festlegen.

(1.1) Definition
Es sei λ eine irreduzible Darstellung von K vom Grad 1. Wir setzen

$$e_\lambda := \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \lambda(k^{-1})k$$

und nennen e_λ ein *lineares Idempotent* (zu K) von FG. Ist λ die triviale Darstellung, so nennen wir $e_\lambda = e_1$ das *triviale Idempotent* (zu K) von FG. Den bis auf Isomorphie eindeutigen zu λ gehörenden FK-Modul $e_\lambda FK$ bezeichnen wir mit Λ.

(1.2) Proposition
Es sei F ein Zerfällungskörper für FK und V ein irreduzibler FG-Modul, der den Brauercharakter φ bewirkt. Weiter sei e_λ ein lineares Idempotent von FG und $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_K$ das Standardskalarprodukt auf $\mathrm{IBr}_F(K)$. Dann gilt

$$\dim Ve_\lambda = \langle \lambda, \varphi{\downarrow_K} \rangle_K \, .$$

Beweis: Es ist $Ve_\lambda \cong \mathrm{Hom}_{FG}(e_\lambda FG, V)$ als $e_\lambda FGe_\lambda$-Moduln. Da $e_\lambda FG \cong \Lambda{\uparrow^G}$ ist, erhalten wir unter Verwendung der Frobenius-Reziprozität (Korollar I.(3.9)) die Gleichung $\dim Ve_\lambda = \dim \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, V{\downarrow_K})$. Schließlich ist letztere Dimension durch $\langle \lambda, \varphi{\downarrow_K} \rangle_K$ gegeben. ■

(1.3) Korollar
Es sei e_λ ein lineares Idempotent von FG. Die beiden Tensor-Funktoren $- \otimes_{FG} FGe_\lambda$ und $- \otimes_{e_\lambda FGe_\lambda} e_\lambda FG$ induzieren genau dann eine Morita-Äquivalenz zwischen den Algebren FG und $e_\lambda FGe_\lambda$, wenn für alle irreduziblen Brauercharaktere $\varphi \in \mathrm{IBr}_F(G)$ das charaktertheoretische Skalarprodukt der Einschränkung von φ auf K mit λ nicht null ist.

Beweis: Aus Satz II.(2.3) wissen wir, dass die beiden Tensor-Funktoren genau dann eine Morita-Äquivalenz zwischen den Algebren induzieren, wenn kein einfacher FG-Modul zu Null kondensiert. Diese Bedingung lässt sich mit Proposition (1.2) in die angegebene Skalarproduktbedingung umformulieren. ■

In der Praxis genügt es uns, wenn wir eine Morita-Äquivalenz zwischen einzelnen Blöcken durch Kondensation erhalten.

(1.4) Korollar
Es sei B ein Block von FG. Ist die Bedingung aus Korollar (1.3) für alle Charaktere des Blocks B erfüllt, dann induzieren die Tensor-Funktoren $- \otimes_{e_\lambda FGe_\lambda} e_\lambda FG$ und $- \otimes_{FG} FGe_\lambda$ eine Morita-Äquivalenz zwischen B und dem Block $e_\lambda Be_\lambda$ von $e_\lambda FGe_\lambda$.

Beweis: Ist B ein Block von FG zum zentral-primitiven Idempotent f, so ist er ein zweiseitiges Ideal der Algebra. Damit ist auch $e_\lambda Be_\lambda$ ein zweiseitiges Ideal der kondensierten Algebra

$e_\lambda FGe_\lambda$. Die angegebene Charakterbedingung ist nach (1.2) äquivalent dazu, dass jeder einfache Modul in B nicht zum Nullmodul kondensiert. Somit liefert Satz II.(2.3), dass die zweiseitigen Ideale B und $e_\lambda Be_\lambda$ als Algebren betrachtet Morita-äquivalent sind. Wäre nun $e_\lambda Be_\lambda$ eine Vereinigung von Blöcken, so existierte eine Zerlegung $e_\lambda fe_\lambda = f_1 + f_2$ in nicht-triviale zentrale Idempotente von $e_\lambda Be_\lambda$. Da nach Proposition II.(1.3) die Zentren beider Algebren isomorph sind und f zentral-primitiv ist, ist $e_\lambda Be_\lambda$ ein Block von $e_\lambda FGe_\lambda$. ■

2 Kondensation von Tensorprodukten

Nach dem Satz I.(4.2) von Burnside und Brauer genügt es, Tensorprodukte von einfachen Moduln zu betrachten, um alle einfachen FG-Moduln bis auf Isomorphie zu bestimmen. Die Tensorprodukte stellen folglich eine besonders wichtige Klasse von Moduln dar. Da sie aber auch gerade dazu neigen, besonders große Dimensionen zu besitzen, werden sie erst durch Verwendung der Kondensation rechnerisch handhabbar. In diesem Abschnitt wollen wir uns deshalb den theoretischen und praktischen Voraussetzungen zur Anwendung der Kondensation von Tensorprodukten widmen. Die auftretenden Tensorprodukte sind dabei stets als Tensorprodukte über dem Körper F aufzufassen, sofern sie nicht anders gekennzeichnet sind.

(2.1) Lemma
Es seien S und T zwei FK-Moduln. Dann gilt: $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, S \otimes T) \cong \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda \otimes S^*, T)$ als FK-Moduln. Insbesondere ist $Ve_\lambda \cong (\Lambda^* \otimes V)e_1$ für einen FK-Modul V.

Beweis: Die Gruppe K operiert via $\varphi k(v) := \varphi(vk^{-1})k$ auf der Menge der F-Homomorphismen zwischen zwei FK-Moduln V und W. Dabei ist $\mathrm{Hom}_{FK}(V, W)$ die Menge der Fixpunkte unter dieser Operation. Damit ist $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, S \otimes T) = \mathrm{Hom}_F(\Lambda, S \otimes T)e_1$. Die Menge der F-Homomorphismen $\mathrm{Hom}_F(\Lambda, S \otimes T)$ ist als FK-Modul isomorph zu $\Lambda^* \otimes S \otimes T$. Nutzen wir die Assoziativität des Tensorproduktes, so erhalten wir schließlich $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, S \otimes T) \cong_{FK} \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda \otimes S^*, T)$. ■

Die Methode der Kondensation von Tensorprodukten wird von Klaus Lux und Markus Wiegelmann in [29] vorgestellt. Wir wollen diese Methode hier auf die Kondensation mit linearen Idempotenten verallgemeinern. Grundlage ist der folgende Satz, der für Kondensation mit trivialem Idempotent auf Lux und Wiegelmann zurückgeht (man vgl. Proposition 1.2 in [29]).

(2.2) Satz
Es seien V und W FG-Moduln und $\mathcal{S}$ ein vollständiges Repräsentantensystem einfacher FK-Moduln. Weiter sei

$$V{\downarrow_K} = \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \bigoplus_{i=1}^{m_S} S_i, \quad W{\downarrow_K} = \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \bigoplus_{j=1}^{n_{\Lambda\otimes S^*}} T_j,$$

wobei m_S die Vielfachheit von S als Kompositionsfaktor von $V{\downarrow_K}$ und $n_{\Lambda\otimes S^*}$ die Vielfachheit von $\Lambda \otimes S^*$ als Kompositionsfaktor von $W{\downarrow_K}$ bezeichnet. Für die einfachen Summanden gelte

$S_i \cong S$ für $i = 1, \dots, m_S$ und $T_j \cong \Lambda \otimes S^*$ für $j = 1, \dots, n_{\Lambda \otimes S^*}$. Dann gilt:

$$(V \otimes W)e_\lambda = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \bigoplus_{i=1, j=1}^{m_S, n_{\Lambda \otimes S^*}} (S_i \otimes T_j)e_\lambda.$$

Beweis: Es ist $(V \otimes W)e_\lambda \cong \mathrm{Hom}_{FG}(e_\lambda FG, V \otimes W)$ nach Lemma I.(3.10). Da $e_\lambda FG$ isomorph zu $\Lambda{\uparrow}^G$ ist, erhalten wir unter Benutzung der Frobenius-Reziprozität (man vgl. Korollar I.(3.9)), dass $(V \otimes W)e_\lambda$ und $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, (V \otimes W){\downarrow}_K)$ isomorphe Vektorräume sind. Nun folgt aus der Distributivität des Tensorproduktes und der Additivität des Hom-Funktors, dass wir $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, (V \otimes W){\downarrow}_K)$ als direkte Summe von Homomorphismenmengen $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, S_i \otimes T_j)$ schreiben können. Nach Lemma I.(3.10) ist $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, S_i \otimes T_j)$ als FK-Modul isomorph zu $(S_i \otimes T_j)e_\lambda$. Nun folgt mit obigem Lemma (2.1) und der Tatsache, dass $\mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda \otimes S_i^*, T_j)$ genau dann ungleich Null ist, wenn $\Lambda \otimes S_i^* \cong T_j$ ist, die Behauptung. ∎

Dieser Satz legt uns nahe, die Berechnung einer Darstellung von $e_\lambda FGe_\lambda$ auf dem kondensierten Modul $(V \otimes W)e_\lambda$, durch Darstellungen, die von kondensierten Tensorprodukten gewisser Paare der einfachen Konstituenten der halbeinfachen FK-Moduln bewirkt werden, zu bestimmen. Die theoretischen Implikationen aus Satz (2.2) lassen sich zu folgendem Vorgehen umsetzen (man vgl. auch Algorithmus 1.3 in [29]):

(2.3) Bemerkung

1. Bestimme die paarweise nicht-isomorphen Kompositionsfaktoren $S_1, \dots, S_s$ von $V{\downarrow}_K$ und ihre Entsprechungen $T_1, \dots, T_t$ von $W{\downarrow}_K$ zusammen mit ihren Vielfachheiten m_i von S_i und n_j von T_j. Sortiere sie so, dass $\Lambda^* \otimes S_i \cong T_i^*$ für $i = 1, \dots, r \leq s$ ist.

2. Für alle $i = 1, \dots, r$, für die $m_i, n_i \neq 0$ sind, bestimme eine Basis $\mathcal{Q}_i$ von $(S_i \otimes T_i)e_\lambda$. Vereinige diese zu einer Basis $\mathcal{Q}$ von $(V \otimes W)e_\lambda$.

3. Für $g \in G$ bestimme die Operation von $e_\lambda ge_\lambda$ auf $(V \otimes W)e_\lambda$ bezüglich der Basis $\mathcal{Q}$. D.h. projiziere die Elemente qg für $q \in \mathcal{Q}$ mit e_λ auf $(V \otimes W)e_\lambda$ und drücke das Ergebnis als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{Q}$ aus.

Bei der praktischen Umsetzung sehen wir uns einem großen Problem gegenüber: In Schritt 3 müssen wir die Operation von G auf $V \otimes W$ kennen. Benötigten wir hierzu eine Darstellung von G auf $V \otimes W$, so wäre dieses Vorgehen nur in wenigen Fällen anwendbar. In diesen müsste die Dimension des Tensorprodukts klein genug sein, um die auftretenden Matrizen rechnerisch handhabbar zu machen. Tatsächlich ist es so, dass wir sowohl zur Anwendung eines $g \in G$ als auch zur Projektion mit e_λ in Schritt 3, eine explizite Rechnung in $V \otimes W$ vermeiden können.

Wir wollen unsere Aufmerksamkeit zunächst dem Problem der Anwendung eines $g \in G$ widmen. Hier basiert die rechnerische Realisierung des Verfahrens auf der Wahl einer speziellen Basis $\mathcal{P}$ von $V \otimes W$. Ihr zu Grunde liegen Basen für die Faktoren, in welchen die Darstellungen von FK die Halbeinfachheit von $V{\downarrow}_K$ bzw. $W{\downarrow}_K$ in einer Blockdiagonalgestalt widerspiegeln. Eine solche Basis eines halbeinfachen Moduls nennen wir „symmetriegerecht“. Diese Begriffsbildung geht auf Stiefel und Fässler zurück (man vgl. Abschnitt 2.3 in [37]).

(2.4) Definition
Es sei A eine endlich dimensionale F-Algebra und V ein halbeinfacher A-Modul, der in eine direkte Summe der paarweise nicht-isomorphen einfachen A-Moduln $S_1, \dots, S_s$ zerfällt. In dieser Zerlegung besitze der Modul S_i die Vielfachheit n_i für $i = 1, \dots, s$. Eine Basis $\mathcal{B}$ von V heißt *symmetriegerecht*, wenn die Matrixdarstellung jedes $a \in A$ auf V bezüglich $\mathcal{B}$ eine Blockdiagonalmatrix ist, deren Blöcke in der Reihenfolge $B_{11}, \dots, B_{1n_1}, B_{21}, \dots, B_{2n_2}, \dots, B_{rn_r}$ vorkommen und für die gilt, dass für festes $i \in \{1, \dots, s\}$ die Blöcke B_{ik} für $1 \le k \le n_i$ durch die gleiche Matrixdarstellung von a auf S_i gegeben sind.

(2.5) Bemerkung
Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ symmetriegerechte Basen von $V{\downarrow_K}$ bzw. $W{\downarrow_K}$, so zerfallen sie gemäß der Blockzerlegung der zugehörigen Matrixdarstellung auf $V{\downarrow_K}$ bzw. $W{\downarrow_K}$ in die Teilbasisfolgen $\mathcal{B}_{ik} \subseteq \mathcal{B}$ für $1 \le k \le n_i$ und $1 \le i \le s$ bzw. $\mathcal{C}_{jl} \subseteq \mathcal{C}$ für $1 \le l \le m_j$ und $1 \le j \le t$.
Diese Unterteilung impliziert eine Partition der darstellenden Matrizen wie folgt: Ist $\delta_{\mathcal{B}}$ eine Darstellung auf V bezüglich $\mathcal{B}$, so können wir für jedes $g \in G$ die Matrix $\delta_{\mathcal{B}}(g)$ in Blöcke $M_{iki'k'}(g)$ aufteilen mit $1 \le i, i' \le s$, $1 \le k \le n_i$ und $1 \le k' \le n_{i'}$. Dabei ist $M_{iki'k'}(g)$ die Koeffizientenmatrix der Bilder der Elemente von $\mathcal{B}_{ik}$ unter Multiplikation mit g bezüglich der Teilbasisfolge $\mathcal{B}_{i'k'}$.

(2.6) Definition
Für zwei beliebige Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ die Standardbasis des Tensorprodukts der durch $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gegebenen Moduln, d. h.

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} := \{b_1 \otimes c_1, b_1 \otimes c_2, \dots, b_1 \otimes c_n, b_2 \otimes c_1, \dots, b_m \otimes c_n\},$$

bezüglich der die bewirkte Darstellung das Kroneckerprodukt der Darstellungen auf den Faktoren ist.
Für unsere Zwecke ordnen wir die Standardbasis von $V \otimes W$ wie folgt an:

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{j=1}^{t} \bigsqcup_{i=1}^{s} \bigsqcup_{l=1}^{n_i} \bigsqcup_{k=1}^{m_j} \mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl},$$

dabei steht $\sqcup$ für die Verkettung der Basisfolgen $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$.

Wir erreichen dadurch, dass sich das Bild eines Elements von $V \otimes W$, welches bezüglich der Basis $\mathcal{P}$ von Null verschiedene Koeffizienten nur bezüglich einer Teilbasisfolge $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$ hat, unter Rechtsmultiplikation mit einem $g \in G$ abschnittsweise bestimmt werden kann.

(2.7) Lemma
Es gelten die Bezeichnungen aus Bemerkung (2.5). In Analogie zum angegebenen Ort sei ein Block von $\delta_{\mathcal{C}}(g)$ mit N bezeichnet. Es sei $x \in V \otimes W$ ein Element, dessen Koeffizientenvektor $\kappa_{\mathcal{P}}(x)$ nur nicht-verschwindende Koeffizienten bezüglich der Basiselemente aus $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$ für ein festes Quadrupel (i, k, j, l) hat. Partitionieren wir $\kappa_{\mathcal{P}}(y)$ in Teilvektoren $\kappa_{\mathcal{B}_{i'k'} \otimes \mathcal{C}_{j'l'}}(y)$ gemäß der Definition der Basis $\mathcal{P}$ für alle $y \in V \otimes W$, so gilt

$$\kappa_{\mathcal{B}_{i'k'} \otimes \mathcal{C}_{j'l'}}(xg) = \kappa_{\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}}(x) \cdot M_{iki'k'}(g) \otimes N_{jlj'l'}(g)$$

für $1 \le i' \le s$, $1 \le j' \le t$, $1 \le k' \le n_{i'}$ und $1 \le l' \le m_{j'}$.

Beweis: Dies ist elementar, denn nach Wahl der Basen ist $M_{iki'k'}(g) \otimes N_{jlj'l'}(g)$ die Koeffizientenmatrix der Basisvektoren aus $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$ unter Rechtsmultiplikation mit g bezüglich der Teilbasisfolge $\mathcal{B}_{i'k'} \otimes \mathcal{C}_{j'l'}$. ■

Wählen wir eine Basis $\mathcal{Q}$ des kondensierten Moduls $(V \otimes W)e_\lambda$, welche die direkte Summenzerlegung aus Satz (2.2) respektiert, so ist sie die Vereinigung von Basisfolgen der direkten Summanden $(S_i \otimes T_j)e_\lambda$ mit $\Lambda \otimes S_i^* \cong T_j$. Folglich sind die Basisvektoren einer solchen Folge für geeignete k und l Linearkombinationen der Basiselemente von $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$. Dementsprechend erfüllen ihre Elemente die Voraussetzung des obigen Lemmas und wir können zur Bestimmung des Bildes unter Rechtsmultiplikation mit einem $g \in G$ eine explizite Rechnung im Tensorprodukt $V \otimes W$ vermeiden.

Zur Bestimmung der Operation von $e_\lambda g e_\lambda$ bedarf es nach der Rechtsmultiplikation von q mit g in Schritt 3 von Bemerkung (2.3) der Projektion auf den kondensierten Modul. Wir können auch in diesem Fall vermeiden, eine Matrixdarstellung des Gruppenalgebraelements e_λ zu berechnen, obwohl die Elemente qg im allgemeinen die Voraussetzung von Lemma (2.7) nicht erfüllen.

Es seien im folgenden die Isomorphietypen $S_1, \ldots, S_s$ bzw. $T_1, \ldots, T_t$ der Kompositionsfaktoren von $V{\downarrow_K}$ bzw. $W{\downarrow_K}$ so nummeriert, dass $\Lambda^* \otimes S_i \cong T_i$ ist für alle $1 \leq i \leq r$ für ein $r \leq s$.

(2.8) Definition/Bemerkung
Es sei $\mathcal{B}_{ik}$ bzw. $\mathcal{C}_{il}$ Basis eines Kompositionsfaktors von von $V{\downarrow_K}$ bzw. $W{\downarrow_K}$ gemäß den in Bemerkung (2.5) eingeführten Bezeichnungen. Die Matrixdarstellung des Idempotents e_λ auf einem zu $S_i \otimes T_i$ isomorphen Tensorprodukt mit Basis $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}$ ist aufgrund der Symmetriegerechtheit der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ unabhängig von k und l stets dieselbe und wir können sie mit E_i bezeichnen. Ist $\mathcal{Q}_i$ eine Basis des Zeilenraums von E_i, so bezeichnen wir mit q_i die Matrix, deren Zeilen die Koeffizienten der Basis $\mathcal{Q}_i$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}$ enthalten. Da q_i eine Basis des Zeilenraums von E_i ist, gibt es genau eine Matrix p_i mit $p_i q_i = E_i$.

(2.9) Lemma
Es sei v ein Element des durch die Basis $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}$ gegebenen Moduls. Mit den Bezeichnungen aus Definition (2.8) gilt

$$\kappa_{\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}}(ve_\lambda) \cdot p_i = \kappa_{\mathcal{Q}_i}(ve_\lambda).$$

Beweis: Nach Definition von p_i ist $p_i q_i = E_i$. Aus der Eindeutigkeit von p_i und der Tatsache, dass E_i ein Idempotent ist, folgt $p_i q_i p_i = p_i$. Nach Definition hat p_i denselben Rang wie E_i. Damit ist das Produkt $q_i p_i$ eine Einheitsmatrix, denn die Spalten von p_i sind linear unabhängig. Da nach Definition von q_i die Gleichung $\kappa_{\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}}(ve_\lambda) = \kappa_{\mathcal{Q}_i}(ve_\lambda) \cdot q_i$ gilt, erhalten wir hieraus durch Multiplikation mit p_i die die Behauptung. ■

(2.10) Korollar
Mit den Bezeichnungen aus Lemma (2.9) gilt

$$\kappa_{\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}}(v) \cdot p_i = \kappa_{\mathcal{Q}_i}(ve_\lambda).$$

Beweis: Nach Definition von E_i ist $\kappa_{\mathcal{B}_{ik}\otimes\mathcal{C}_{il}}(v)E_i = \kappa_{\mathcal{B}_{ik}\otimes\mathcal{C}_{il}}(ve_\lambda)$. Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit p_i liefert die Behauptung mit Lemma (2.9), da $E_i = p_i q_i$ und $q_i p_i$ eine Einheitsmatrix ist. ■

Die Wahl der speziellen Basis $\mathcal{P}$ induziert eine Basis $\tilde{\mathcal{P}}$ des kondensierten Moduls $(V \otimes W)e_\lambda$. Dazu streichen wir aus $\mathcal{P}$ die Basisfolgen der Untermoduln, welche zu Null kondensieren. Diese sind nach Satz (2.2) genau die Basisfolgen $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{jl}$ mit $i \neq j$. Die verbleibenden $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}$ ersetzen wir durch Einbettung von $\mathcal{Q}_i$ in $(V \otimes W)e_\lambda$ für alle k und l. Entfernen wir entsprechend der Streichungen der $\mathcal{B}_{ij} \otimes \mathcal{C}_{jl}$ für $i \neq j$ die zugehörigen Zeilen und Spalten einer darstellenden Matrix eines g auf $V \otimes W$ bezüglich $\mathcal{P}$, so erhalten wir eine Teilmatrix $C(g)$. Diese Matrix besitzt wieder eine Partitionierung in Blöcke, die durch die verbleibenden Basisfolgen bestimmt ist. Jeder Block ist folglich durch ein Sechstupel (i, k, i', k', l, l') indiziert und der Block $C_{iki'k'll'}(g)$ enthält die Koeffizienten der Bilder der Basisfolge $\mathcal{B}_{ik} \otimes \mathcal{C}_{il}$ unter Rechtsmultiplikation mit g bezüglich der Basisfolge $\mathcal{B}_{i'k'} \otimes \mathcal{C}_{i'l'}$.

Diese Blockeinteilung zusammen mit Korollar (2.10) erlaubt es uns, g auf einen Basisvektor von $\tilde{\mathcal{P}}$ anzuwenden und das Ergebnis mit e_λ zurück auf den kondensierten Modul zu projizieren, indem wir wieder abschnittsweise nur mit einzelnen Blöcken arbeiten.

(2.11) Proposition

Es gelten die Bezeichnungen aus Lemma (2.7) und Korollar (2.10). Für ein $g \in G$ sei die darstellende Matrix $\delta_{\tilde{\mathcal{P}}}(e_\lambda g e_\lambda)$ gemäß $\tilde{\mathcal{P}}$ in Blöcke partitioniert. Dann gilt

$$[\delta_{\tilde{\mathcal{P}}}(e_\lambda g e_\lambda)]_{iki'k'll'} = q_i \cdot M_{iki'k'}(g) \otimes N_{ili'l'}(g) \cdot p_{i'}$$

für alle $1 \leq k \leq n_i$, $1 \leq l \leq m_i$, $1 \leq k' \leq n_{i'}$ und $1 \leq l' \leq m_{i'}$.

Beweis: Aufgrund der symmetriegerechten Basen sind die Zeilen der Matrix q_i nach Definition (2.8) eine Basis aller direkten Summanden der rechten Seite von Satz (2.2), die isomorph zum kondensierten Modul $(S_i \otimes T_i)e_\lambda$ sind. Sie erfüllen nach der im Anschluss an Lemma (2.7) gemachten Bemerkung die Voraussetzung von Lemma (2.7). Folglich kann der Koeffizientenvektor bezüglich $\mathcal{P}$ des Bildes eines Zeilenvektors von q_i unter g durch Multiplikation mit $M_{iki'k'}(g) \otimes N_{ili'l'}(g)$ für die angegebenen k, k', l und l' abschnittsweise bestimmt werden. Nach Korollar (2.10) können wir das resultierende Bild durch Multiplikation mit $p_{i'}$ auf den kondensierten direkten Summanden $(S_{i'} \otimes T_{i'})e_\lambda$ in der Basis $\mathcal{Q}_{i'}$ projizieren. Insgesamt erhalten wir also wie behauptet die Matrix des durch $e_\lambda g e_\lambda$ induzierten Endomorphismus in der Basis $\tilde{\mathcal{P}}$. ■

Sind wir im Besitz der p- und q-Matrizen, so besteht Schritt 3 aus Bemerkung (2.3) lediglich daraus, Kroneckerprodukte gewisser Untermatrizen der Matrixdarstellungen von g auf den Tensorfaktoren mit diesen zu multiplizieren und die resultierenden Matrizen zu der Matrix $\delta_{\tilde{\mathcal{P}}}(e_\lambda g e_\lambda)$ zusammenzusetzen.

Wir fassen die vorbereitende Rechnung in einem Programm namens `Precond` zusammen. Dieses Programm ist in GAP implementiert und ersetzt das Programm `precond` der C-MeatAxe, das nur eine Kondensation mit trivialem Idempotent e_1 zulässt. Die Ausgabe des Programms umfasst neben den p- und q-Matrizen auch eine sogenannte Tensorprodukt-Informationsdatei, kurz tki-Datei. Diese Datei wird benötigt, um das Programm `tcond` der C-MeatAxe aufrufen zu können. In ihr werden die Paarungen der Kompositionsfaktoren gespeichert, um `tcond` die Information bereitzustellen, welche Unterblöcke der darstellenden Matrizen auf den Tensorfaktoren zur Bestimmung einer Darstellung auf $(V \otimes W)e_\lambda$ herangezogen werden müssen. Auf diese Weise können wir die Berechnung auch im allgemeinen Fall eines nicht-trivialen Idempotents vom Programm `tcond` durchführen lassen. Es ist dazu generisch genug, da die Rechnungen aus Proposition (2.11) keinen Gebrauch von der speziellen Wahl des Idempotents e_λ machen.

(2.12) Algorithmus (`Precond`)

EINGABE: Eingeschränkte Tensorfaktoren $V{\downarrow_K}$ und $W{\downarrow_K}$, jeweils in einer symmetriegerechten Basis.

AUSGABE: p- und q-Matrizen, *tki*-Datei.

1 Für alle Kompositionsfaktoren S von V

- 1.1 Bestimme einen Kompositionsfaktor T von W mit $\Lambda \otimes S^* \cong T$. Wenn kein solches T existiert, dann wiederhole Schritt 1 mit dem nächsten Kompositionsfaktor von V.
- 1.2 Berechne eine darstellende Matrix E von e_λ auf $S \otimes T$ und speichere eine Basis ihres Zeilenraums in q.
- 1.3 Bestimme p aus Definition (2.8) aus der Gleichung $pq = E$.
- 1.4 Schreibe die p- und q-Matrizen raus.

2 Berechne $\dim(V \otimes W)e_\lambda$ und schreibe die Informationsdatei heraus.

Wie bereits in der Vorstellung der Tensorproduktkondensation angedeutet wurde, geht die Effizienz dieses Verfahrens auf die symmetriegerechten Basen der Tensorfaktoren zurück. Wir wollen deshalb den nächsten Abschnitt der Berechnung dieser Basen widmen.

3 Berechnung symmetriegerechter Basen

Zur Bestimmung einer symmetriegerechten Basis von $V{\downarrow_K}$ für einen FG-Modul V geben Lux und Wiegelmann zwei Verfahren an.
Das erste Verfahren ist die sogenannte Deltawort-Methode, die auch im Fall einer beliebigen halbeinfachen Matrixalgebra angewandt werden kann. Dazu sei S ein Kompositionsfaktor von $V{\downarrow_K}$. Ein S-Deltawort ist ein Element von FK, dessen induzierter Endomorphismus auf allen Kompositionsfaktoren von $V{\downarrow_K}$, die nicht isomorph zu S sind, trivial ist und auf S einen Kern minimaler Dimension besitzt. Im Unterschied zu der Definition eines S-Peakworts (man vgl. Definition II.(2.15)) fordern wir nicht, dass der Kern höherer Potenzen des Endomorphismus auf S derselbe ist. Demnach ist jedes Peakwort ein Deltawort und die rechnerische Implementation dieser Methode in der C-MEATAXE macht nur von Peakworten Gebrauch. Dabei ist es erforderlich, dass für jeden Kompositionsfaktor S von $V{\downarrow_K}$ ein S-Peakwort gefunden wird. Bei der

Suche nach geeigneten Worten werden Algebraelemente durchlaufen und auf ihre Peakworteigenschaften untersucht. Zerfällt $V{\downarrow}_K$ in viele Faktoren, wie es z.B. in unseren Anwendungen der Fall ist, so führt diese Methode nur selten zum Erfolg. Denn die zahlreich vorkommenden, nicht isomorphen Faktoren stellen ebenso viele zu erfüllende Bedingungen an die Peakworte. Eine pseudo-zufällige Suche hat demnach keine Aussichten auf Erfolg, mit vertretbarem zeitlichen Aufwand für jeden Isomorphietyp der Kompositionsfaktoren ein solches Wort zu liefern.

Die zweite Methode wird γ-Operator Methode genannt und ist bereits in Abschnitt 2.3 von [37] zu finden. In ihr nutzt man die Gruppenalgebrastruktur von FK, wenn F ein Zerfällungskörper für K ist, um mit Hilfe der Schur-Relationen (man vgl. (3.41) in [7]) primitive Idempotente zu bestimmen, aus denen sich eine symmetriegerechte Basis berechnen lässt. Als großen Nachteil dieser Methode geben Lux und Wiegelmann an, dass man zur Durchführung in der Lage sein muss, durch alle Elemente der Gruppe K in der Darstellung auf V laufen zu können. Dies ist je nach Größe der Gruppe K und der Dimension des Moduls V ein nicht-triviales Unterfangen, das sehr rechenzeitintensiv werden kann.

Wir wollen in diesem Abschnitt eine neue Methode vorstellen, die im Falle einer Gruppenalgebra das Beste aus den anderen beiden vereint: Zum einen werden wir Rechenzeit sparen, indem wir nicht anhand pseudo-zufälliger Elemente die Gruppenalgebra durchsuchen, und zum anderen werden wir Rechenzeit sparen, indem wir dabei nicht durch alle Elemente der Gruppe K laufen, sondern uns auf möglichst wenige beschränken.

Eng verwandt mit einer symmetriegerechten Basis von V ist eine Basis, die an eine Kompositionsreihe von V angepasst ist.

(3.1) Definition
Es sei V ein endlich dimensionaler Modul einer endlich dimensionalen F-Algebra A. Weiter sei $\mathcal{C} : \{0\} = V_0 \gneqq V_1 \gneqq \ldots \gneqq V_l = V$ eine Kompositionsreihe von V. Eine Basis $\mathcal{B}$ von V heißt *angepasst an die Kompositionsreihe* $\mathcal{C}$, wenn die Matrixdarstellung jedes $a \in A$ auf V bezüglich $\mathcal{B}$ eine Block-Unteredreiecksmatrix ist, deren Diagonalblöcke mit $B_1, \ldots, B_l$ bezeichnet seien. Dabei ist für $1 \leq i \leq l$ der Block B_i die Matrixdarstellung von a auf dem Kompositionsfaktor V_i / V_{i-1} von V.

Die Berechnung einer solchen Basis kann zeitgleich mit der Bestimmung der Kompositionsfaktoren von V mit geringem zusätzlichen Aufwand einhergehen. Leider ist es in der derzeitig aktuellen Version 2.4.3 der C-MeatAxe nicht vorgesehen, die dazu notwendige Information bei der Ausführung des Programms `chop` mitzuführen. Zur Lösung dieses Problems implementieren wir das GAP-Programm `CompositionseriesAdaptedBasis`, welches elementare Routinen der GAP-MeatAxe von Holt, Hulpke und Rees verwendet und in einer Erweiterung des Programms `chop` wie in Algorithmus (3.2) die Basis von V en passant anpasst.
An Kompositionsreihen angepasste Basen sind nicht nur als Ausgangspunkt zur Bestimmung von symmetriegerechten Basen interessant, sondern auch von allgemeinerem Interesse, wie wir in Abschnitt IV.6 ausführen werden.

(3.2) Algorithmus (`CompositionseriesAdaptedBasis`)

EINGABE: Modul V mit Basis in $\mathcal{B}$.

AUSGABE: Eine an eine Kompositionsreihe von V angepasste Basis in $\mathcal{B}$.

1. Setze `queue` $\leftarrow \{V\}$.
2. Solange `queue` nicht-leer nimm M aus `queue`.
   - 2.1 Falls M irreduzibel ist vergleiche M mit bisherigen gefundenen Kompositionsfaktoren.
     Ist M isomorph zu einem bekannten Kompositionsfaktor, dann bestimme Basiswechsel T und ersetze die zu M gehörende Teilbasisfolge $\mathcal{B}_M \leftarrow T \cdot \mathcal{B}_M$.
     Ist M ein neuer Kompositionsfaktor, so standardisiere M. Bestimme zugehörigen Basiswechsel T und ersetze die zu M gehörende Teilbasisfolge $\mathcal{B}_M \leftarrow T \cdot \mathcal{B}_M$. Nimm M in die Liste der bekannten Kompositionsfaktoren auf.
   - 2.2 Sonst ist M reduzibel, d.h. wir finden einen Untermodul S mit Quotienten Q. Bestimme Basiswechsel T zu einer an S angepassten Basis von M. Ersetze die zu M gehörende Teilbasisfolge $\mathcal{B}_M \leftarrow T \cdot \mathcal{B}_M$. Hänge S und Q an die Warteschlange an.
3. Gib $\mathcal{B}$ zurück.

(3.3) Bemerkung
Die im Algorithmus vorkommenden Standardisierungen der Darstellungen sind bereits ein integraler Bestandteil des gewöhnlichen `chop`-Algorithmus, sodass als zusätzlicher Aufwand nur die Transformationen der Untermodulbasisfolgen hinzukommt. Um dazu einem Modul M der Dimension d seine Teilbasisfolge in $\mathcal{B}$ zuzuordnen, speichern wir für M lediglich die Nummer des Eintrags der Basisfolge $\mathcal{B}$, welcher der erste Basisvektor von M ist. Die gesamte Basisfolge des Moduls ergibt sich dann aus den darauffolgenden $d-1$ Stück. Durch die Standardisierung erreichen wir auch, dass die Diagonalblöcke der darstellenden Matrizen in der berechneten Basis identisch sind, falls sie zu isomorphen Kompositionsfaktoren gehören.

Eine Basis, die an eine Kompositionsreihe des halbeinfachen FK-Moduls $V{\downarrow_K}$ angepasst ist, können wir durch folgende Überlegungen in eine symmetriegerechte Basis überführen.

(3.4) Definition/Bemerkung
Es seien V und W zwei FK-Moduln und $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$ ein Vektorraumhomomorphismus von V nach W. Wir definieren $\mathrm{Tr}(\varphi)$ durch

$$\mathrm{Tr}(\varphi)(v) := \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \varphi(vk^{-1})k,$$

für alle $v \in V$. Dann ist $\mathrm{Tr}(\varphi)$ ein FK-Homomorphismus und wir nennen die zugehörige Abbildung $\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}_F(V, W) \to \mathrm{Hom}_{FK}(V, W)$ die *Trace-Abbildung*.

Die Trace-Abbildung ermöglicht es uns, Endomorphismen zu bestimmen, welche die nötigen Basiswechsel liefern. Dabei bedienen wir uns des folgenden wohlbekannten Ergebnisses, mit welchem eine Implikation des Satzes von Maschke bewiesen werden kann.

(3.5) Lemma
Es sei $\mathcal{B}$ eine an eine Kompositionsreihe von $V{\downarrow_K}$ angepasste Basis. Weiter sei S ein Glied dieser Kompositionsreihe mit Teilbasisfolge $\mathcal{B}_S$ von $\mathcal{B}$. Folglich partitionieren wir $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \sqcup \mathcal{B}_Q$ in einen Untermodul- und in einen Quotientenanteil. Nach Definition von $\mathcal{B}$ hat jedes $a \in FK$ die Form

$$\begin{bmatrix} \delta_{\mathcal{B}_S}(a) & 0 \\ * & \delta_{\mathcal{B}_Q}(a) \end{bmatrix}.$$

Es sei $\pi \in \mathrm{End}_F(V)$ die Projektion auf S. Setzen wir $\mathcal{B}'_Q := (\mathrm{id} - \mathrm{Tr}(\pi))(\mathcal{B}_Q)$, so ist $\mathcal{B}_S \sqcup \mathcal{B}'_Q$ eine Basis von $V{\downarrow_K}$, bezüglich der jedes $a \in FK$ die Form

$$\begin{bmatrix} \delta_{\mathcal{B}_S}(a) & 0 \\ 0 & \delta_{\mathcal{B}_Q}(a) \end{bmatrix}$$

hat. Man beachte, dass die Darstellung auf dem Quotienten sich bei diesem Übergang nicht ändert.

Beweis: Es ist $\mathrm{id} - \pi$ die Projektion auf ein Vektorraumkomplement von S und damit ist der FK-Homomorphismus $\mathrm{id} - \mathrm{Tr}(\pi)$ die Projektion auf ein K-invariantes Komplement von S. Die Darstellung auf dem Quotienten bleibt erhalten, da für alle $v \in \mathcal{B}_Q$ und $a \in K$ die Gleichung $(\mathrm{id} - \mathrm{Tr}(\pi))(v)a = va - \mathrm{Tr}(\pi)(va) = va - \pi(va)$ gilt. ■

Lemma (3.5) erlaubt uns folglich aus der Basis, die nach Algorithmus (3.2) an eine Kompositionsreihe angepasst ist, eine Basis zu gewinnen, welche die Halbeinfachheit widerspiegelt und bis auf Anordnung der Blöcke eine symmetriegerechte Basis ist. Wir können folglich eine symmetriegerechte Basis wie folgt in zwei Stufen berechnen:

1. Iteriere den Basiswechsel für jeden Kompositionsfaktor durch Lemma (3.5) und geeigneten Projektionen, sodass die verbleibenden Blöcke der darstellenden Matrizen die Darstellungen auf den Kompositionsfaktoren sind.

2. Sortiere die Blöcke so um, dass Darstellungen auf isomorphen Kompositionsfaktoren aufeinander folgen.

Schritt 2 ist von elementarer Natur: Ist eine Halbeinfachheitsbasis einmal bestimmt, so bedarf es nur einer Permutation der Basisvektoren, um Symmetriegerechtheit nach Definition (2.4) herzustellen. Der aufwendige Schritt ist die Errechnung und Anwendung der geeigneten Projektionen. Um Rechenzeit zu sparen, können wir uns die inhärente Rekursivität des Problems zu Nutze machen: Haben wir durch die Methode aus Lemma (3.5) die Basis so angepasst, dass wir die direkte Summe aus Untermodul und Quotient erhalten, so können wir die weitere Berechnung auf den Untermodul bzw. den Quotienten reduzieren. Iterieren wir dieses Vorgehen dann subsequent, so profitieren wir aufgrund der kleiner werdenden Matrizen und der Komplexität der elementaren Matrixalgorithmen von einem Geschwindigkeitsgewinn. Um diese Beschleunigung zu maximieren, versuchen wir den aktuell betrachteten Modul in einen Untermodul und zugehörigen Quotienten von idealerweise der gleichen Dimension zu spalten.

Dieses Vorgehen lässt sich zu folgendem Algorithmus zusammenfassen, der die Bezeichnungen aus Lemma (3.5) verwendet.

(3.6) Algorithmus (`SemiSimplicityBasis`)

EINGABE: Halbeinfacher Modul V mit Kompositionsreihenbasis in $\mathcal{B}$.

AUSGABE: Halbeinfachheitsbasis von V in $\mathcal{B}$.

$\boxed{1}$ Bestimme ein Glied S der Kompositionsreihe, so dass $\dim S$ möglichst nahe an $\frac{1}{2}\dim V$ ist.

$\boxed{2}$ Für die F-Projektion $\pi : V \twoheadrightarrow S$ berechne $\mathrm{Tr}(\pi)$ in der Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \sqcup \mathcal{B}_Q$ und wende Lemma (3.5) an: Ersetze $\mathcal{B}_Q \leftarrow (\mathrm{id} - \mathrm{Tr}(\pi))(\mathcal{B}_Q)$.

$\boxed{2.1}$ Ist S reduzibel, dann wende Algorithmus (3.6) auf den Modul S mit Basis $\mathcal{B}_S$ an und ersetze $\mathcal{B}_S$ durch das Ergebnis.

$\boxed{2.2}$ Ist Q reduzibel, dann wende Algorithmus (3.6) auf den Modul Q mit Basis $\mathcal{B}_Q$ an und ersetze $\mathcal{B}_Q$ durch das Ergebnis.

$\boxed{3}$ Gib $\mathcal{B}$ zurück.

(3.7) Bemerkung

In Schritt 1 einen Untermodul S von V zu finden, dessen Dimension der angegebenen Bedingung genügt, ist ohne nennenswerten rechnerischen Aufwand zu bewältigen, da wir über die vorliegende Kompositionsreihenbasis von V und der damit einhergehenden Kenntnis der Kompositionsfaktoren, unverzüglich einen solchen Modul mittels seiner Basis angeben können. Gleichsam wissen wir dann auch, ob dieser Untermodul S bzw. sein Komplement Q irreduzibel ist, oder nicht – ohne dass wir in Schritt 2.1 bzw. Schritt 2.2 auf Irreduzibilität testen müssen.

Zur Bestimmung der FK-Projektion $\mathrm{Tr}(\pi)$ in Schritt 2 erscheint es notwendig, definitionsgemäß durch alle Gruppenelemente von K laufen zu müssen. Diese Annahme, die auch eine wesentliche Einschränkung der γ-Operator-Methode zur Bestimmung einer symmetriegerechten Basis darstellt, ist falsch. Wir wollen nun ein Verfahren zur Bestimmung von $\mathrm{Tr}(\pi)$ vorstellen, das mit wenigen Gruppenelementen auskommt und darüber hinaus auch zur effizienten Berechnung eines linearen Idempotents in einer beliebigen Darstellung verwendet werden kann.

Bezeichnen wir in V die Rechtsmultiplikation mit $k \in K$ durch ρ_k, so können wir

$$\mathrm{Tr}(\pi) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \rho_k \pi \rho_k^{-1}$$

schreiben. Die Berechnung von $\mathrm{Tr}(\pi)$ kann rekursiv erfolgen.

(3.8) Proposition

Es sei $K' \leq K$ ein Untergruppe. Mit $K' \backslash K$ bezeichnen wir eine Rechtstransversale von K' in K. Dann gilt

$$\mathrm{Tr}(\pi) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K' \backslash K} \rho_k \left(\sum_{k' \in K'} \rho_{k'} \pi \rho_{k'}^{-1} \right) \rho_k^{-1}.$$

Beweis: Da wir jedes Element $x \in K$ eindeutig als Produkt $x = k'k$ für ein $k' \in K'$ und ein $k \in K' \backslash K$ schreiben können und $\rho_{k'k} = \rho_k \rho_{k'}$ ist, ist die Behauptung offensichtlich. ■

Proposition (3.8) liefert unmittelbar durch Iterieren der Reduktionsmethode eine größtmögliche Reduktion des Rechenaufwands wie folgt.

(3.9) Korollar
Es sei $\{1\} = K_0 \lneqq K_1 \lneqq \ldots \lneqq K_l = K$ eine Untergruppenreihe von K. Dann gilt

$$\mathrm{Tr}(\pi) = \frac{1}{|K|} \sum_{k_l \in K_{l-1} \backslash K_l} \rho_{k_l} \left(\sum_{k_{l-1} \in K_{l-1} \backslash K_l} \rho_{k_{l-1}} \left(\cdots \sum_{k_1 \in K_1} \rho_{k_1} \pi \rho_{k_1}^{-1} \cdots \right) \rho_{k_{l-1}}^{-1} \right) \rho_{k_l}^{-1}.$$

Diese unscheinbar anmutende Umformulierung vermag in der praktischen Anwendung die Rechenzeit erheblich zu reduzieren.

(3.10) Bemerkung
Erfolgt die Berechnung der FK-Projektion $\mathrm{Tr}(\pi)$ über eine Untergruppenreihe nach Korollar (3.9), so müssen wir anstelle aller Elemente von K nur noch für $i = 1, \ldots, l$ die Transversalelemente von $K_{i-1} \backslash K_i$ bestimmen. Dabei können wir voraussetzen, dass $1 \in K$ in allen Transversalen enthalten ist. Eine Abschätzung des Aufwands bei definitionsgemäßer Implementation der Berechnung von $\mathrm{Tr}(\pi)$ liefert, dass etwa $2|K|$ Multiplikationen und $|K|$ Invertierungen notwendig sind. Im Gegensatz dazu können wir durch Korollar (3.9) den Aufwand durch etwa $\sum_{i=1}^{l} [K_i : K_{i-1}]$ Invertierungen und doppelt so viele Multiplikationen ersetzen.
In den praktischen Anwendungen werden wir im Rahmen dieser Arbeit K stets als ℓ-Gruppe wählen, wobei $\ell \neq p$ ein Primzahl ist. In diesem Fall ist die gesparte Rechenzeit besonders groß, denn ist K eine ℓ-Gruppe der Ordnung ℓ^n, so existiert eine Kompositionsreihe von K der Länge n, in der alle Kompositionsfaktoren Ordnung ℓ haben. Folglich benötigen wir in etwa $2n\ell$ anstatt $2\ell^n$ Multiplikationen und $n\ell$ Invertierungen anstatt ℓ^n Stück.

Dieselbe Idee können wir auch zur Reduktion des Rechenaufwands bei der Bestimmung eines linearen Idempotents in einer beliebigen Darstellung verwenden. Dies ist aber nur ein Spezialfall des folgenden Verfahrens, einen vollständigen Satz primitiver orthogonaler Idempotente zu einer beliebigen (nicht-linearen) Darstellung der Kondensationsuntergruppe K zu berechnen. Dazu sei V ein m-dimensionaler absolut irreduzibler FK-Modul mit Darstellung δ.
Aus den Schur-Relationen (Theorem (3.41) in [7]) folgt (man vgl. auch Problem (2.20) in [19]), dass $\{e_\delta^{(i)} \mid i = 1, \ldots, m\}$ mit

$$e_\delta^{(i)} := \frac{m}{|K|} \sum_{k \in K} \delta(k^{-1})_{ii}\, k$$

ein vollständiger Satz primitiver orthogonaler Idempotente zu δ ist.
Es sei W ein weiterer FK-Modul mit Darstellung D. Um nun $D(e_\delta^{(i)})$ zu berechnen, betrachten wir das Tensorprodukt $V^* \otimes W$ und führen unsere Rechnungen in der bewirkten Darstellung $\delta^* \otimes D$ (in der zugehörigen Standardbasis) durch. Auf diese Weise können wir ein Analogon zu Proposition (3.8) formulieren, vermöge dessen wir alle $e_\delta^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, m$ simultan bestimmen. Für ein $k \in K$ bezeichnen wir dazu im folgenden mit $[\delta^*(k) \otimes D(k)]_{[ij]}$ die Teilmatrix $\delta^*(k)_{ij} D(k)$ von $\delta^*(k) \otimes D(k)$.

(3.11) Bemerkung
Für $i = 1, \dots, m$ ist

$$D(e_\delta^{(i)}) = \frac{m}{|K|}\left[\sum_{k\in K} \delta^*(k) \otimes D(k)\right]_{[ii]} .$$

Beweis: Nach Wahl der in Definition (2.6) festgelegten Standardbasis für das Tensorprodukt zweier Moduln, entspricht der i-te Diagonalblock $m/|K|[\sum_k \delta^*(k) \otimes D(k)]_{[ii]}$ dem Idempotent $D(e_\delta^{(i)}) = m/|K| \sum_k \delta(k^{-1})_{ii} D(k)$, da $\delta^*(k) = \delta(k^{-1})^{\mathrm{tr}}$ und damit insbesondere $\delta^*(k)_{ii} = \delta(k^{-1})_{ii}$ ist. ∎

Die Betrachtung des Tensorproduktes $V^* \otimes W$ ermöglicht es uns auszunutzen, dass $\delta^* \otimes D$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Auf diese Weise können wir die Rechnung analog zu Proposition (3.8) aufspalten.

(3.12) Korollar
Es sei $K' \leq K$ ein Untergruppe. Dann gilt für $i = 1, \dots, m$

$$D(e_\delta^{(i)}) = \left[\Big(\sum_{k'\in K'} \delta^*(k') \otimes D(k')\Big) \cdot \Big(\sum_{k\in K'\backslash K} \delta^*(k) \otimes D(k)\Big)\right]_{[ii]} .$$

Beweis: Da $\delta^* \otimes D$ eine Darstellung von FK auf dem Modul $V^* \otimes W$ ist, ist $\delta^*(k'k) \otimes D(k'k) = (\delta^*(k') \otimes D(k')) \cdot (\delta^*(k) \otimes D(k))$ für alle $k, k' \in K$. Schreiben wir also jedes $k'' \in K$ wieder als Produkt $k'' = k'k$ mit $k' \in K'$ und $k \in K'\backslash K$, so folgt unmittelbar die Behauptung. ∎

Im Vergleich zur direkten Berechnung eines primitiven Idempotents zu δ in der Darstellung D erfordert der Übergang zum Tensorprodukt $V^* \otimes W$, dass wir mit Matrizen rechnen müssen, die in Abhängigkeit von der Dimension von V^* um ein Vielfaches größer als die Matrizen sind, die von den Darstellungen auf W herrühren. Auf der anderen Seite erhalten wir auf diese Weise aber auch simultan einen vollständigen Satz primitiver orthogonaler Idempotente und wir können von der Faktorisierung des Problems profitieren, um möglichst wenig Gruppenelemente multiplizieren zu müssen. Es ist in der Praxis folglich von Fall zu Fall abzuwägen, ob die auftretenden Dimensionen von V und W eine rasche Berechnung auf diese Weise zulassen.
Wir sind in dieser Arbeit vornehmlich an der Berechnung von linearen Idempotenten interessiert, sodass wir diesen Spezialfall noch einmal aufgreifen wollen.

(3.13) Korollar
Es sei e_λ ein lineares Idempotent und $K' \leq K$ eine Untergruppe. Dann gilt

$$e_\lambda = \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K} \lambda(k^{-1})k = \frac{1}{|K|}\sum_{k'\in K'} \lambda(k'^{-1})k' \cdot \sum_{k\in K'\backslash K} \lambda(k^{-1})k.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Korollar (3.12), da $\lambda(k^{-1}) = \lambda^*(k)$ für alle $k \in K$ ist. ∎

Iterieren wir Korollar (3.13), so führen wir den Aufwand für die Berechnung von e_λ auf die Länge einer Untergruppenreihe von K zurück. Dabei müssen wir nur auf die Multiplikationsreihenfolge Acht geben, falls K keine abelsche Gruppe ist.

(3.14) Korollar
Es sei K eine endliche Gruppe und $\{1\} = K_0 \lneqq K_1 \lneqq \ldots \lneqq K_l = K$ eine Untergruppenreihe von K. Dann gilt

$$e_\lambda = \frac{1}{|K|} \prod_{i=1}^{l} \sum_{k_i \in K_{i-1} \setminus K_i} \lambda(k_i^{-1}) k_i .$$

Dabei multiplizieren wir die Faktoren in der Reihenfolge des aufsteigenden i.

Beweis: Dies folgt sofort aus Korollar (3.13). ■

4 Kondensation von induzierten Moduln

Obwohl es zur Bestimmung aller einfachen Darstellungen theoretisch genügt, nur Tensorprodukte von einfachen Moduln zu untersuchen, kann es in der Praxis sein, dass diese Beschränkung zu einem unverhältnismäßig großen Rechenaufwand führt. Schließlich können bereits kleinere Moduln, die keine Tensorprodukte sind, genügend Informationen enthalten, um eine Frage zu beantworten, deren Beantwortung sonst sehr viel Rechenzeit verschlänge. Es empfiehlt sich deshalb generell mehr Klassen von Moduln mittels Kondensation untersuchen zu können. In diesem Zusammenhang haben Jürgen Müller und Jens Rosenboom in [33] erstmalig die Kondensation von induzierten Moduln behandelt und sie erfolgreich zur Bestimmung der 2-modularen Charaktere der sporadischen Gruppe Co_2 genutzt.

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Kondensationsmethode zur Behandlung von induzierten Moduln entwickeln, die im Gegensatz zu [33] ein beliebiges lineares Idempotent der Algebra FK zur Kondensation zulässt.

Da die Klasse der induzierten Moduln auch die der Permutationsmoduln umfasst, können wir mit den hier vorgestellten Methoden natürlich auch Permutationsmoduln kondensieren. Es sei aber an dieser Stelle angemerkt, dass die Algorithmen aufgrund ihrer allgemeineren Anwendbarkeit nicht für die Behandlung von Permutationsmoduln optimiert sind. Insbesondere für die Kondensation mit trivialem Idempotent existiert mit dc von Frank Lübeck und Max Neunhöffer (man vgl. [26]) eine effiziente parallele Implementation, die in der Lage ist Permutationsmoduln zu kondensieren, die aufgrund ihrer Dimension jenseits des Vermögens des hier vorgestellten sequentiellen Algorithmus' liegen.

In diesem Abschnitt sei H eine beliebige Untergruppe von G und V ein FH-Modul. Weiter sei δ eine Darstellung von FH auf V und $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

Unser Ziel ist es zunächst eine Basis des kondensierten Moduls $V{\uparrow^G} e_\lambda$ zu bestimmen, die wir dann in einem zweiten Schritt zur Konstruktion einer Matrixdarstellung eines Elements der kondensierten Algebra $e_\lambda FG e_\lambda$ verwenden. Dazu betrachten wir zuerst, welche Auswirkungen die Projektion mit e_λ auf Elemente von $V{\uparrow^G}$ hat.

(4.1) Lemma
Es sei $v \in V$ und $y \in G$. Dann gilt

$$v \underset{FH}{\otimes} ye_\lambda = \frac{|H \cap {}^yK|}{|K|} ve_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}} \underset{FH}{\otimes} y \sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} \lambda(k^{-1})k.$$

Dabei ist $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}} = |H \cap {}^yK|^{-1} \sum_{k\in H\cap {}^yK} \lambda(y^{-1}k^{-1}y)k$ das lineare Idempotent zur Darstellung ${}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}$ von $F(H \cap {}^yK)$.

Beweis: Ersetzen wir auf der linken Seite e_λ durch seine Definition und schreiben dabei jedes Element von K als Produkt $k'k$ mit $k' \in H^y \cap K$ und $k \in (H^y \cap K)\backslash K$, so erhalten wir $|K|^{-1} \sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} v \sum_{k'\in H^y\cap K} \lambda(k'^{-1})yk'y^{-1} \otimes yk\lambda(k^{-1})$. Ergänzen wir den Quotienten $|H^y \cap K|^{-1}$, so lässt sich die innere Summe zu $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ umformulieren, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. ■

Aus Lemma (4.1) können wir nun eine Basis eines kondensierten induzierten Moduls ableiten.

(4.2) Proposition
Für ein $y \in H\backslash G/K$ sei mit $\mathcal{Q}_y$ eine Basis des Unterraums $Ve_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ bezeichnet. Dann ist die Verkettung

$$\bigsqcup_{y\in H\backslash G/K} \{v \underset{FH}{\otimes} y\big(\sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} \lambda(k^{-1})k \big) \mid v \in \mathcal{Q}_y\}$$

eine Basis von $V{\uparrow^G} e_\lambda$.

Beweis: Nach Lemma I.(3.10) sind $V{\uparrow^G}e_\lambda$ und $\mathrm{Hom}_{FG}(\Lambda{\uparrow^G}, V{\uparrow^G})$ isomorphe $e_\lambda FGe_\lambda$-Moduln. Durch Anwendung der Frobenius-Reziprozität und des Satzes von Mackey erhalten wir dann, dass

$$\begin{aligned}
V{\uparrow^G}e_\lambda &\cong \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, V{\uparrow^G}{\downarrow_K}) \\
&\cong \bigoplus_{y\in H\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda, V^y{\downarrow_{H^y\cap K}}{\uparrow^K}) \\
&\cong \bigoplus_{y\in H\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{F(H^y\cap K)}(\Lambda{\downarrow_{H^y\cap K}}, V^y{\downarrow_{H^y\cap K}}) \\
&\cong \bigoplus_{y\in H\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{F(H\cap^y K)}(\Lambda^{y^{-1}}{\downarrow_{H\cap^y K}}, V{\downarrow_{H\cap^y K}}) \\
&\cong \bigoplus_{y\in H\backslash G/K} V{\downarrow_{H\cap^y K}} e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap^y K}}
\end{aligned}$$

als F-Vektorraum ist. Folglich ist die Kardinalität der prospektiven Basis höchstens die Dimension des kondensierten Moduls. Die Menge $\{v \otimes_{FH} g \mid v \in \mathcal{B}, g \in H\backslash G\}$ ist eine Basis von $V{\uparrow^G}$. Multiplizieren wir die Elemente dieser Basis mit e_λ, so erhalten wir ein Erzeugendensystem von $V{\uparrow^G}e_\lambda$. Da e_λ das zentral-primitive Idempotent zur Darstellung λ von FK ist, erfüllen alle $k \in K$ die Gleichung $ke_\lambda = \lambda(k)e_\lambda$. Damit genügt zur Erzeugung von $V{\uparrow^G}e_\lambda$ die Menge

$\{v \otimes_{FH} ge_\lambda \mid v \in \mathcal{B}, g \in H\backslash G/K\}$. Mit Lemma (4.1) sehen wir jetzt, dass die in der Behauptung angegebene Menge ebenfalls ein Erzeugendensystem des kondensierten Moduls ist. Folglich ist sie eine Basis. ∎

(4.3) Bemerkung/Definition
Aufgrund der transitiven Operation von G auf $H\backslash G$ existiert zu gegebenen $g \in G$, $y \in H\backslash G/K$ für jedes $k \in K$ genau ein $\hat{y}(k) \in H\backslash G/K$ und ein $\hat{k}(k) \in K$ mit $Hykg = H\hat{y}(k)\hat{k}(k)$. Folglich existiert ein $\hat{h}(k) \in H$ mit $ykg = \hat{h}(k)\hat{y}(k)\hat{k}(k)$, d.h. es ist $\hat{h}(k) = ykg\hat{k}(k)^{-1}\hat{y}(k)^{-1}$.
Nach Proposition (4.2) ist der elementare Tensor $v \otimes y(\sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} \lambda(k^{-1})k\ )$ ein Basisvektor. Wir schreiben für die rechte Seite dieses Elements abkürzend $\sigma(y)$. Damit bezeichnen wir die Basis von $V{\uparrow}^G e_\lambda$ in Anlehnung an Definition (2.6) mit

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{y\in H\backslash G/K} \mathcal{Q}_y \underset{FH}{\otimes} \sigma(y).$$

In der gewählten Basis ergibt sich die Operation eines Elements $e_\lambda g e_\lambda$ auf $V{\uparrow}^G e_\lambda$ wie folgt:

(4.4) Proposition
Es gelten die Bezeichnungen aus Proposition (4.2) und Bemerkung (4.3). Es seien $g \in G$ und $y \in H\backslash G/K$. Es sei weiter $v \in \mathcal{Q}_y$. Dann gilt

$$v \underset{FH}{\otimes} \sigma(y) \cdot e_\lambda g e_\lambda = \sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} \frac{|H \cap {}^{\hat{y}(k)}K|}{|K|} \lambda(k^{-1}\hat{k}(k))\ v\hat{h}(k) e_{{}^{\hat{y}(k)}\lambda\downarrow_{H\cap{}^{\hat{y}(k)}K}} \underset{FH}{\otimes} \sigma(\hat{y}(k)).$$

Beweis: Da $v \in \mathcal{Q}_y$ ist, ist $ve_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap{}^yK}} = v$, und nach Lemma (4.1) folgt damit $v \otimes ye_\lambda = |H\cap{}^yK|/|K|\cdot v\otimes\sigma(y)$. Folglich ist $v\otimes\sigma(y)e_\lambda = v\otimes\sigma(y)$. Damit erhalten wir $v\otimes\sigma(y)\cdot e_\lambda g e_\lambda = \sum_{k\in(H^y\cap K)\backslash K} \lambda(k^{-1})v \otimes ykg \cdot e_\lambda$. Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung (4.3) lassen sich die Tensoren der Summe als $v\otimes ykg = v\hat{h}(k)\otimes\hat{y}(k)\hat{k}(k)$ umformen. Die Auswirkungen der Rechtsmultiplikation mit e_λ lassen sich nun wie folgt ableiten. Da e_λ das zentral-primitive Idempotent zur Darstellung λ von FK ist, gilt die Gleichheit $v\hat{h}(k)\otimes\hat{y}(k)\hat{k}(k)e_\lambda = \lambda(\hat{k}(k))\ v\hat{h}(k)\otimes\hat{y}(k)e_\lambda$. Wenden wir nun Lemma (4.1) auf $\lambda(\hat{k}(k))\ v\hat{h}(k) \otimes \hat{y}(k)e_\lambda$ an, so erhalten wir

$$\frac{|H \cap {}^{\hat{y}(k)}K|}{|K|} \lambda(\hat{k}(k))\ v\hat{h}(k) e_{{}^{\hat{y}(k)}\lambda\downarrow_{H\cap{}^{\hat{y}(k)}K}} \otimes \sigma(\hat{y}(k)),$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

Sehen wir von den Koeffizienten einmal ab, so müssen wir für diese Operation für jeden H-K-Doppelnebenklassenvertreter $y \in H\backslash G/K$ die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{Q}_y$ unter jeweils dem induzierten Element $\hat{h}(k)$ berechnen und diese dann im Falle von $\hat{y}(k) = y'$ mit dem Idempotent zu ${}^{y'}\lambda\downarrow_{H\cap{}^{y'}K}$ auf den entsprechenden Unterraum projizieren. Wir befinden uns also in einer ähnlichen Situation wie der, welche bei der Kondensation von Tensorprodukten auftritt und dort durch Proposition (2.11) zur effizienten Rechnung ausgenutzt wird. Dasselbe Proposition (2.11) zugrunde liegende Vorgehen können wir auch bei der Kondensation von induzierten Modul nutzen.

Dazu wählen wir in der Praxis $\mathcal{Q}_y$ definitionsgemäß als eine Basis des Zeilenraums der Matrixdarstellung von $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ auf V bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Bezeichnen wir mit q_y die Koeffizientenmatrix dieser Basis bezüglich $\mathcal{B}$, so erhalten wir in Analogie zu Definition (2.8) eine durch die Gleichung $p_y q_y = E_y$ eindeutig festgelegte Matrix p_y. Diese Matrix besitzt wieder folgende Projektionseigenschaft.

(4.5) Lemma
Es sei $v \in V$. Dann gilt für die Koeffizientenvektoren

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v) \cdot p_y = \kappa_{\mathcal{Q}_y}(ve_\lambda).$$

Beweis: Man vergleiche Korollar (2.10). ∎

Die Basis $\mathcal{P}$ liefert ebenfalls eine Unterteilung der darstellenden Matrizen auf $V\uparrow^G e_\lambda$ wie folgt.

(4.6) Bemerkung
Die Konstruktion der Basis $\mathcal{P}$ induziert für jedes $g \in G$ eine Partition der zugehörigen darstellenden Matrix von $e_\lambda g e_\lambda$ in Teilmatrizen, die durch zwei Elemente von $H\backslash G/K$ indiziert sind. Dabei enthält die Teilmatrix zum Paar (y, y') die Koeffizienten der Bilder von $Q_y \otimes \sigma(y)$ unter $e_\lambda g e_\lambda$ bezüglich der Teilbasisfolge $Q_{y'} \otimes \sigma(y')$.

In Analogie zu Proposition (2.11) können wir mit Lemma (4.5) die gesamte Matrix über diese Teilmatrizen berechnen.

(4.7) Proposition
Es sei $\delta_{\mathcal{B}}$ die von V bewirkte Darstellung bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und $\delta_{\mathcal{P}}$ die von $V\uparrow^G e_\lambda$ bewirkte Darstellung bezüglich $\mathcal{P}$. Der Kürze wegen setzen wir $c(k) := |H \cap {}^{\hat{y}(k)}K|/|K| \cdot \lambda(k^{-1})\lambda(\hat{k}(k))$. Damit erhalten wir

$$[\delta_{\mathcal{P}}(e_\lambda g e_\lambda)]_{[y,y']} = \sum_{\substack{k \in (H \cap {}^yK)\backslash K \\ \hat{y}(k) = y'}} c(k)\, q_y \cdot \delta_{\mathcal{B}}(\hat{h}(k)) \cdot p_{y'},$$

wobei auf der linken Seite der Index $[y, y']$ die Teilmatrix zum Paar (y, y') aus Bemerkung (4.6) kennzeichnet.

Beweis: Wir identifizieren $\mathcal{Q}_y$ mit $\mathcal{Q}_y \otimes \sigma(y)$. Die Teilmatrix zum Paar (y, y') bestimmen wir durch eine direkte Anwendung von Proposition (4.4). Ihr zufolge ergibt sich damit die Teilmatrix zum Paar (y, y') der Operation eines $e_\lambda g e_\lambda$ in der Basis $\mathcal{P}$, indem auf der Basis $\mathcal{Q}_y$ die durch g induzierten Elemente $\hat{h}(k)$ aus Bemerkung (4.3) operieren. Die resultierenden Bilder werden auf den Raum mit Basis $\mathcal{Q}_{y'}$ projiziert und mit den entsprechenden Skalaren $c(k)$ multipliziert aufsummiert. Nach Definition der Matrizen q_y und $p_{y'}$ folgt mit Lemma (4.5), dass die benötigten Rechnungen gleichbedeutend zu den angegebenen Matrixprodukten sind. ∎

(4.8) Bemerkung
Neben den H-K-Doppelnebenklassenvertretern benötigen wir zur Berechnung der darstellenden Matrix von $e_\lambda g e_\lambda$ wiederum eine Darstellung des Elements $\hat{h}(k)$ auf V. Wie bereits durch

Bemerkung (4.3) angedeutet, errechnen wir $\hat{h}(k)$ aus den K-Bahnen auf der Menge der Rechtsnebenklassen von H in G. In einer vorbereitenden Rechnung im Permutationsmodul mit Basis $H \backslash G$ bestimmen wir deshalb die benötigten Informationen. Dazu führen wir in der zugehörigen Permutationsdarstellung einen G-Bahnenalgorithmus durch und enumerieren zu jedem Punkt, der in einer noch unbekannten K-Bahn liegt, diese K-Bahn vollständig. Gleichzeitig halten wir in den zugehörigen Schreiervektoren fest, welche Erzeuger angewendet werden. Auf diese Weise erhalten wir einerseits kürzest mögliche Worte in den Erzeugern von G für einen Repräsentanten y jeder K-Bahn, den wir als einen H-K-Doppelnebenklassenvertreter wählen. Andererseits können wir vermöge der Schreiervektoren der einzelnen K-Bahnen zu einem gegebenen Punkt $\omega \in H\backslash G$ seine zugehörige K-Bahn $O_K(\omega)$ nachschlagen und ein Wort in den Erzeugern von K bestimmen, dessen Auswertung in K den ausgewählten Repräsentanten $y \in (H\backslash G/K) \cap O_K(\omega)$ auf den gegebenen Punkt abbildet.

Die Berechnung der p- und q-Matrizen erfolgt wie bei der Kondensation von Tensorprodukten in einer Präkalkulation. Dabei bedarf jeweils die Bestimmung des Idempotents $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ in der Darstellung δ etwas Arbeit, die wir im Anschluss erläutern.

(4.9) Algorithmus (`IndPrecond`)

EINGABE: Erzeuger von G und K in der Permutationsdarstellung auf $H\backslash G$, K-Bahnen auf $H\backslash G$ mit Schreiervektoren und Worten für Repräsentanten.

AUSGABE: p- und q-Matrizen.

1 Für jedes $y \in H\backslash G/K$

1.1 Bestimme den Stabilisator $U \leftarrow \mathrm{Stab}_K(Hy) = H^y \cap K$ und seine Erzeuger `Ugens`.

1.3 Berechne λ(`Ugens`), d.h. für jedes Element von `Ugens` bestimme Worte in den Erzeugern von K und evaluiere sie in $\lambda(K)$.

1.4 Setze $U \leftarrow {}^yU$, bestimme Worte in den Erzeugern von H für die Erzeuger von U und evaluiere sie in $\delta(H)$.

1.6 Berechne eine darstellende Matrix E von $e_{1\downarrow_U}$ in der Darstellung ${}^y\lambda^* \otimes \delta$ und speichere eine Basis ihres Zeilenraums in q_y.

1.7 Ist $q_y = [\,]$, so setze $p_y \leftarrow [\,]$.
Sonst bestimme die Projektionsmatrix p_y aus der Gleichung $p_y q_y = E$.

1.8 Speichere die p_y- und q_y-Matrizen ab.

2 Gib Liste aller p- und q-Matrizen zurück.

(4.10) Bemerkung

In Schritt 1.6 von Algorithmus (4.9) bedienen wir uns der in Bemerkung (3.11) vorgestellten Methode, um das Idempotent $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ in der Darstellung δ auf V zu berechnen. Wir benötigen dazu, wie im Algorithmus bezeichnet, explizite Kenntnis über die Darstellung ${}^y\lambda^*$. Dazu berechnen wir zunächst in Schritt 1.3 die Bilder eines Satzes von Erzeugern für $H^y \cap K$ unter λ. Da wir durch Konjugation der Erzeuger mit y einen Satz von Erzeugern von $H \cap {}^yK$ erhalten, kennen wir damit auch die Darstellung ${}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}$. Der Übergang zur kontragredienten Darstellung erfolgt

dann aufgrund der Linearität von λ durch eine Invertierung der Bilder. Dann erhalten wir durch Berechnung des trivialen Idempotents auf $U = H \cap {}^yK$ in der Darstellung ${}^y\lambda^* \otimes \delta$ in Schritt 1.6 das Idempotent $e_{{}^y\lambda\downarrow_{H\cap {}^yK}}$ in der Darstellung δ.
Ist $\lambda = 1$ die triviale Darstellung von K, so ist Schritt 1.3 natürlich unnötig und wird in diesem Fall weggelassen.

Mit den Informationen über die K-Bahnen auf $H\backslash G$ und den p- und q-Matrizen lässt sich der eigentliche Kondensationsalgorithmus wie folgt beschreiben. Dabei fangen wir die Paare (y, y') ab, für die eine der Basen $\mathcal{Q}_y$ oder $\mathcal{Q}'_y$ leer ist. Um den Algorithmus leichter formulieren zu können, nehmen wir dabei die Ordnung auf $H\backslash G/K$ und auf den K-Bahnen an, die aus der Enumeration im durchgeführten Bahnenalgorithmus entsteht (man vgl. (4.8)). In diesem Sinne können wir von einem „ersten", bzw. „nächsten" Element der jeweiligen Menge sprechen.

(4.11) Algorithmus (`IndCond`)

EINGABE: Informationen über die Bahnen aus Bemerkung (4.8), Ausgabe von `IndPrecond` und ein $g \in G$.

AUSGABE: Matrix M der Operation $e_\lambda g e_\lambda$ auf $V\uparrow^G e_\lambda$ in der Basis $\mathcal{P}$.

$\boxed{1}$ Initialisiere $M \leftarrow 0$ und nimm erstes $y \in H\backslash G/K$.

$\boxed{2}$ Ist $q_y \neq [\,]$, dann nimm erstes $\omega \in O_K(Hy)$.

- $\boxed{2.1}$ Bestimme $y' \in (H\backslash G/K) \cap O_K(\omega g)$.
- $\boxed{2.2}$ Ist $q_{y'} \neq [\,]$, dann
  - $\boxed{2.2.1}$ Finde mit dem zu $O_K(Hy')$ gehörenden Schreiervektor ein $k' \in K$ mit $\omega g = Hy'k'$ und setze $h' \leftarrow ykgk'^{-1}y'^{-1}$.
  - $\boxed{2.2.2}$ Schreibe h' als Wort in den Erzeugern von H und evaluiere es in $\delta(H)$.
  - $\boxed{2.2.3}$ Berechne die Matrix $c(k)\, q_y \delta(h') p_{y'}$ mit $c(k)$ wie in Proposition (4.4) und addiere sie zum (y, y')-Block der Ergebnismatrix M (man vgl. Bemerkung (4.6)).
- $\boxed{2.3}$ Nimm nächstes $\omega \in O_K(Hy)$ und gehe zu Schritt 2.1.

$\boxed{3}$ Nimm nächstes $y \in H\backslash G/K$ und gehe zu Schritt 2.

$\boxed{4}$ Gib M zurück.

(4.12) Bemerkung

Zur Berechnung der Matrix M im Algorithmus (4.11) müssen wir in Schritt 2.2.2 zu jedem Punkt einer K-Bahn $O_K(Hy)$ mit $\mathcal{Q}_y \neq \emptyset$, dessen Bild unter g wiederum in einer Bahn $O_K(Hy')$ mit $\mathcal{Q}_{y'} \neq \emptyset$ liegt, das induzierte Element h' als Wort in den Erzeugern von H schreiben. Diese Aufgabe stellt nach erfolgter Präkondensation den zeitlich aufwendigsten Rechenschritt im Algorithmus dar. Je nach Länge und Anzahl der K-Bahnen müssen bei der Berechnung von M sehr viele Elemente in einen festen Satz von Erzeugern zerlegt werden, damit man das jeweilige h' in der Darstellung δ erhalten kann. Es ist bei der Implementierung von Algorithmus (4.11) folglich Sorge zu tragen, dass dieser Schritt rasch durchgeführt werden kann. Er sollte demnach das Hauptziel nachträglicher Optimierungsbemühungen sein.

Kapitel IV

Das Erzeugnisproblem

Die Einführung der Kondensation hat das Problem gelöst, auch große Moduln, die bei einer direkten Herangehensweise die Grenzen des Möglichen sprengen, rechnergestützten Methoden zugänglich zu machen. Sind die Kondensationsuntergruppe K und ein zugehöriges lineares Idempotent e_λ so, dass die Gruppenalgebra FG Morita-äquivalent zur kondensierten Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ ist, so verlieren wir beim Übergang von $\mathfrak{mod}$-FG nach $\mathfrak{mod}$-$e_\lambda FGe_\lambda$ sogar keine Informationen über die für uns wichtigen Modulstrukturen wie z.B. Kompositionsreihen. Leider bezahlen wir für die Wiedererlangung der rechnerischen Handhabbarkeit aber auch einen Preis.

In diesem Kapitel wollen wir die aus der Kondensation resultierende Hauptschwierigkeit, nämlich das Erzeugnisproblem, und zwei mögliche Maßnahmen zur Überwindung desselbigen vorstellen.

1 Das Erzeugnisproblem

Während wir gute Kenntnis davon haben, auf welche Weise sich die Gruppenalgebra FG minimal als F-Algebra erzeugen lässt – hier genügt ein Erzeugendensystem der Gruppe G – wissen wir nicht, wie wir die zugehörige kondensierte Algebra ebenfalls mit möglichst wenig Elementen erzeugen können. In der Tat ist es so, dass es nicht genügt, ein Erzeugendensystem der Gruppenalgebra zu kondensieren, da man damit im Allgemeinen nur eine Teilalgebra von $e_\lambda FGe_\lambda$ erhält. Diese Wissenslücke, welche Elemente die kondensierte Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ erzeugen, bezeichnen wir als das *Erzeugnisproblem*. Es ist für unsere praktischen Anwendungen von grundlegender Bedeutung: Einen Modul V einer Algebra A können wir mit der MeatAxe nur anhand darstellender Matrizen einiger Algebraelemente untersuchen. Dabei müssen wir genügend viele Elemente betrachten, sodass die von ihren darstellenden Matrizen erzeugte Algebra isomorph zum Bild von A in $\mathrm{End}_F(V)$ ist.

(1.1) Bezeichnungen
Für eine Teilmenge $X \subseteq FG$ und ein lineares Idempotent e_λ, bezeichnen wir mit $e_\lambda Xe_\lambda$ die Menge ihrer kondensierten Elemente, d.h. $e_\lambda Xe_\lambda = \{e_\lambda xe_\lambda \mid x \in X\}$. Die von $e_\lambda Xe_\lambda$ erzeugte F-Algebra wird mit $\mathcal{C}$ bezeichnet. Wir nennen $\mathcal{C}$ die *Kondensationsalgebra* (zu X).

Nach Wahl von X ist die Kondensationsalgebra eine Teilalgebra der kondensierten Algebra. Ist diese Inklusion echt, so können wir aus den Informationen, welche die MEATAXE liefert, nur Schlüsse für den eingeschränkten Modul $V{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ gewinnen. Dazu definieren wir:

(1.2) Definition
Es sei V ein $e_\lambda FGe_\lambda$-Modul und $W \leq V$ ein $\mathcal{C}$-invarianter Unterraum. Wir nennen den $\mathcal{C}$-Modul W *genuin*, falls er auch ein $e_\lambda FGe_\lambda$-Modul, also invariant unter $e_\lambda FGe_\lambda$ ist.

Nur die Genuinität eines Moduls erlaubt Schlussweisen, welche sich auf die Invarianz von Moduleigenschaften unter Kondensation aus Abschnitt II.2 berufen. Unter der Annahme, dass die Kondensierten der in X zusammengefassten, ausgewählten Elemente von FG nicht die gesamte kondensierte Algebra erzeugen, müssen wir weitere Anstrengungen unternehmen, um in $Ve_\lambda{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ genügend genuine Moduln zu identifizieren, die Rückschlüsse auf V erlauben.

In der Vergangenheit sind dazu zahlreiche, zum Teil sophistizierte Methoden entstanden, um Informationen aus $Ve_\lambda{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ für den ursprünglichen FG-Modul V zu gewinnen.Wir wollen an dieser Stelle einige davon kurz vorstellen, um dem Leser eine Vorstellung des Aufwands zu geben, der mit dem Erzeugnisproblem einhergeht.

Da bei der Einschränkung auf die Kondensationsalgebra $\mathcal{C}$ die $e_\lambda FGe_\lambda$-Moduln zerfallen können, muss bei der Betrachtung von $\mathcal{C}$-Moduln folglich von Fall zu Fall entschieden werden, ob ein Untermodul bzw. Kompositionsfaktor die Einschränkung eines entsprechenden Gegenstücks von Ve_λ ist. Insbesondere muss aus den Daten, welche die MEATAXE liefert, geschlossen werden, ob ein einfacher Modul nicht tatsächlich von einem $e_\lambda FGe_\lambda$-Kompositionsfaktor „abgebrochen" ist, d.h. ob ein nicht $e_\lambda FGe_\lambda$-invarianter Untermodul in der $\mathcal{C}$-Kompositionsreihe vorkommt und zu einer Unterteilung eines $e_\lambda FGe_\lambda$-Kompositionsfaktors führt. Ein Verfahren, die Genuinität eines einfachen $\mathcal{C}$-Moduls zu zeigen, besteht folglich darin, auszuschließen, dass er ein „Bruchstück" eines einfachen $e_\lambda FGe_\lambda$-Moduls ist. In diesem Zusammenhang hat Christoph Jansen in seiner Dissertation [20] den Begriff der Separiertheit eines $\mathcal{C}$-Moduls geprägt.

Die Kriterien für Separiertheit sind recht technisch. Durch eine intensive Analyse der Struktur lokaler Untermoduln (vgl. Definition II.(2.15)) und durch Ausnutzen ihrer Symmetrien mit Hilfe von Untermodulverbänden wird z.B. in [23], [24] und insbesondere in [20] über Separiertheit die Genuinität vieler Moduln gewonnen.

Ein weiteres Hilfsmittel in diesem Kontext ist der Satz von Zassenhaus und Thompson.

(1.3) Satz (Zassenhaus-Thompson)
Es sei (K, R, F) ein p-modulares System für G und M ein R-freier RG-Modul mit gewöhnlichem Charakter χ, sodass sich χ als $\chi' + \chi''$ in gewöhnliche Charaktere zerlegt. Dann existiert ein R-reiner RG-Untermodul $N \leq M$ mit Charakter χ'.

Beweis: Man vergleiche Theorem I.17.3 in [25]. ■

In den bereits erwähnten Arbeiten und z.B. auch in [12] findet dieser Satz bei der Analyse von Permutationsmoduln Anwendung. In diesem Fall kann die Zerlegung des zugehörigen gewöhnlichen Charakters in seine gewöhnlichen Konstituenten leicht mit GAP bestimmt werden. Damit liefert der Satz von Zassenhaus und Thompson die Existenz von entsprechend dimensionalen FG-Untermoduln des Permutationsmoduls über F, deren Brauercharaktere durch die Einschränkung der gewöhnlichen Konstituenten auf die p-regulären Klassen von G gegeben sind. Durch Anwendung von Proposition III.(1.2) erhalten wir auf diese Weise Kenntnis der Dimensionen der zugehörigen $e_\lambda FGe_\lambda$-Untermoduln des kondensierten Permutationsmoduls. Eine Untersuchung des Untermodulverbands mit Methoden der Peakwort-Kondensation erlaubt es uns, diese Information mit den Dimensionen der auftretenden $\mathcal{C}$-Moduln zu vergleichen. Da sie untere Schranken für die Dimensionen der $e_\lambda FGe_\lambda$-Moduln liefern, von denen sie eventuell „abgebrochen“ sind, erhalten wir bei einer Übereinstimmung, dass mindestens einer der $\mathcal{C}$-Moduln genuin sein muss.

Das explizite Entkondensieren von Untermoduln kann natürlich auch direkt zur Verifikation der Genuinität von $\mathcal{C}$-Moduln angewandt werden. Die Kenntnis des Verbands von $Ve_\lambda{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ aus der Peakwort-Kondensation des Moduls erlaubt es uns, gezielt durch Entkondensation den kleinsten FG-Modul zu bestimmen, der den ausgewählten $\mathcal{C}$-Modul enthält. Auf diese Weise können wir verifizieren, dass er tatsächlich der Kondensierte eines FG-Moduls, also ein $e_\lambda FGe_\lambda$-Modul ist, wenn wir die tatsächliche Dimension mit der theoretisch zu erwartenden vergleichen. Eine Bearbeitung mit der MeatAxe liefert dann ebenfalls direkt Kompositionsfaktoren des ursprünglichen Moduls V. Da bei diesem Vorgehen ein FG-Modul explizit konstruiert wird, sind uns natürlich in der Praxis Grenzen gesetzt, bis zu welcher Größe wir auf diese Weise Genuinität zeigen können.

Allen den hier vorgestellten Methoden ist folglich gemein, dass erst mit zum Teil erheblichem theoretischem und rechnerischem Aufwand in einer Nachbearbeitung der Kondensation, die darin enthaltene Information zugänglich gemacht werden kann.

In dieser Arbeit wollen wir einen anderen Weg beschreiten. Wir wollen eine Nachbearbeitung vermeiden und uns dem eigentlichen Problem widmen, das Erzeugnisproblem für unsere Anwendungen zu lösen. Dies geschieht im Folgenden auf zwei Arten: Zum einen geben wir neue Erzeugendensysteme von $e_\lambda FGe_\lambda$ an, die in der Praxis in vielen Fällen klein genug sind, um von Nutzen zu sein. Um darüber hinaus ihre Größe zu reduzieren, führen wir den Begriff eines Keims ein und formulieren einen zugehörigen Reduktionsalgorithmus. Zum anderen formulieren wir ein neues Kriterium, um eine Teilmenge der kondensierten Algebra als ein Erzeugendensystem nachzuweisen. Dieses Kriterium stellt gleichzeitig eine Verallgemeinerung eines alten Kriteriums dar, welches von Markus Wiegelmann entdeckt wurde (vgl. Satz 2.4.5 in [39]) und sich nach Kenntnis des Autors als einziges in der Vergangenheit praktisch bewährt hat (vgl. z.B. [17], [27] und [29]).

2 Träge Erzeugendensysteme

Wir wollen in diesem Abschnitt die kondensierte Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ genauer untersuchen. Unser Ziel ist es, ein Erzeugendensystem anzugeben, das genügend klein ist, um uns in den praktischen Problemen dienlich zu sein.

Dazu treffen wir etwas speziellere Voraussetzungen. Es seien im Folgenden G eine endliche Gruppe und F ein Körper der Charakteristik $p > 0$, sodass p ein Teiler der Ordnung von G ist.

Weiter sei $K \leq G$ die Kondensationsuntergruppe, deren Ordnung nicht durch p teilbar ist. Mit λ bezeichnen wir einen linearen Charakter von K, der vom FK-Modul Λ bewirkt wird. Zusätzlich sei $N \leq G$ eine weitere Untergruppe, die K normalisiert.

Ausgehend von der Basis G der Gruppenalgebra FG ist es unser erstes Ziel, eine Basis der kondensierten Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ zu finden. Dazu halten wir zunächst die folgende Interaktion von e_λ mit Elementen des Normalisators der Kondensationsuntergruppe fest.

(2.1) Lemma
Es ist $ne_\lambda n^{-1} = e_{{}^n\lambda}$ für alle $n \in N$. Für $n \in K$ gilt insbesondere $e_\lambda n = ne_\lambda = \lambda(n)e_\lambda$.

Beweis: Die Behauptung folgt durch Nachrechnen: Es ist $ne_\lambda n^{-1} = \frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\lambda(k)^{-1}nkn^{-1}$. Ersetzen wir nun k durch $n^{-1}k'n$, so erhalten wir wie behauptet die Summe $\frac{1}{|K|}\sum_{k'\in K}\lambda(n^{-1}k'n)k'$. Ist $n \in K$, so ersetzen wir in den in der Summendarstellung von $e_\lambda n$ auftretenden Summanden $\lambda(k)^{-1}kn$ die Faktoren kn durch k' und erhalten dadurch $e_\lambda n = |K|^{-1}\sum_{k'\in K}\lambda(k'n^{-1})^{-1}k'$. Aufgrund der Linearität von λ lässt sich der Faktor $\lambda(n)$ wie behauptet vor die Summe ziehen. Da e_λ ein zentral-primitives Idempotent von FK ist, ist natürlich $e_\lambda n = ne_\lambda$ für $n \in K$. ■

Beim Übergang von $g \in G$ zu $e_\lambda ge_\lambda$ kann es passieren, dass wir auf diese Weise mit $e_\lambda ge_\lambda$ nur eine andere Schreibweise für das Nullelement von $e_\lambda FGe_\lambda$ gefunden haben. Für diese Elemente lässt sich eine hinreichende Bedingung charaktertheoretisch formulieren.

(2.2) Lemma
Es sei $g \in G$. Dann gilt

$$e_\lambda ge_\lambda = e_\lambda ge_\lambda \left\langle \lambda^g{\downarrow_{K^g\cap K}}, \lambda{\downarrow_{K^g\cap K}}\right\rangle.$$

Beweis: Es ist $e_\lambda ge_\lambda = |K|^{-1}\sum_{l\in K}\lambda(l)^{-1}e_\lambda gl$. Wir schreiben jedes $l \in K$ als Produkt eines Elements aus $K^g \cap K$ und eines aus $(K^g\cap K)\backslash K$. Für die $k' \in K^g \cap K$ gilt mit Lemma (2.1) $e_\lambda gk' = e_\lambda \cdot gk'g^{-1}\cdot g = \lambda(gk'g^{-1})e_\lambda g$, da $gk'g^{-1} \in K$ ist. Ergänzen wir noch eine 1 in Form des Quotienten $|K^g \cap K|/|K^g\cap K|$, so erhalten wir schließlich

$$e_\lambda ge_\lambda = \frac{|K^g\cap K|}{|K|}\sum_{k\in(K^g\cap K)\backslash K}\lambda(k)^{-1}\left(\frac{1}{|K^g\cap K|}\sum_{k'\in K^g\cap K}\lambda(k')^{-1}\lambda^g(k')\right)e_\lambda gk.$$

Dabei ist der geklammerte Faktor das charaktertheoretische Skalarprodukt $\langle\lambda{\downarrow_{K^g\cap K}}, \lambda^g{\downarrow_{K^g\cap K}}\rangle$. Multiplizieren wir diese Gleichung von rechts mit e_λ, so werden die $k \in (K^g\cap K)\backslash K$ zugunsten eines Skalars $\lambda(k)$ gemäß Lemma (2.1) von dem Idempotent geschluckt und die Summanden hängen nicht mehr von k ab. Damit vereinfacht sich die rechte Seite zu dem behaupteten Ausdruck. ■

(2.3) Satz
Es sei

$$\mathcal{D} := \left\{g \in K\backslash G/K \;:\; \left\langle\lambda^g{\downarrow_{K^g\cap K}}, \lambda{\downarrow_{K^g\cap K}}\right\rangle = 1\right\}.$$

Dann ist $e_\lambda\mathcal{D}e_\lambda$ eine Basis von $e_\lambda FGe_\lambda$.

Beweis: Da $e_\lambda FG$ und $\Lambda\uparrow^G$ isomorphe FG-Moduln sind und $\Lambda\uparrow^G e_\lambda$ nach Lemma I.(3.10) zu $\mathrm{Hom}_{FG}(e_\lambda FG, \Lambda\uparrow^G)$ als $e_\lambda FGe_\lambda$-Modul isomorph ist, erhalten wir durch die Ausnutzung der Frobenius-Reziprozität und des Satzes von Mackey die Isomorphie

$$\begin{aligned} e_\lambda FGe_\lambda &\cong \mathrm{Hom}_{FG}(e_\lambda FG, \Lambda\uparrow^G) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda\uparrow^G\downarrow_K, \Lambda) \\ &\cong \bigoplus_{g\in K\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{FK}(\Lambda^g\downarrow_{K^g\cap K}\uparrow^K, \Lambda) \\ &\cong \bigoplus_{g\in K\backslash G/K} \mathrm{Hom}_{F(K^g\cap K)}(\Lambda^g\downarrow_{K^g\cap K}, \Lambda\downarrow_{K^g\cap K}) \end{aligned}$$

als F-Vektorräume. Da Λ^g den Charakter λ^g bewirkt, erhalten wir aus dieser Isomorphie folglich, dass $|\mathcal{D}| = \dim e_\lambda FGe_\lambda$ ist.
Ist $\eta \in e_\lambda FGe_\lambda$, so können wir $\eta = \sum_{g\in G} \mu_g e_\lambda g e_\lambda$ für geeignete $\mu_g \in F$ schreiben. Nach Lemma (2.1) genügt es, über die Doppelnebenklassenvertreter $K\backslash G/K$ zu summieren. Nun folgt nach Lemma (2.2), dass die Summation nur über die Menge $\mathcal{D}$ erfolgen muss. Demnach ist $e_\lambda \mathcal{D} e_\lambda$ ein Erzeugendensystem von $e_\lambda FGe_\lambda$ und somit ist $|\mathcal{D}| \geq |e_\lambda \mathcal{D} e_\lambda| \geq |\mathcal{D}|$. Damit ist $e_\lambda \mathcal{D} e_\lambda$ ein Erzeugendensystem dessen Kardinalität der Dimension entspricht, also eine Basis. ■

Mit Hilfe von Proposition III.(1.2) können wir die F-Dimension der kondensierten Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ natürlich ebenfalls charaktertheoretisch bestimmen.

(2.4) Korollar
Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das charaktertheoretische Skalarprodukt auf $\mathrm{IBr}_F(K)$ und F ein Zerfällungskörper für FK, so ist die F-Dimension von $e_\lambda FGe_\lambda$ gegeben durch $\langle \lambda\uparrow^G\downarrow_K, \lambda\rangle$.

Beweis: Da $e_\lambda FGe_\lambda$ und $\Lambda\uparrow^G e_\lambda$ isomorphe $e_\lambda FGe_\lambda$-Rechtsmoduln sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition III.(1.2). ■

Wir können nun eine vollständige Charakterisierung der Elemente $g \in G$ angeben, für die $e_\lambda g e_\lambda = 0$ ist.

(2.5) Korollar
Es sei $g \in G$. Dann ist $e_\lambda g e_\lambda$ genau dann gleich Null, wenn $\langle \lambda^g\downarrow_{K^g\cap K}, \lambda\downarrow_{K^g\cap K}\rangle = 0$ ist.

Beweis: Ist das Skalarprodukt gleich Null, so folgt unmittelbar aus Lemma (2.2), dass g zu Null kondensiert. Zur Umkehrung können wir dank Lemma (2.1) ohne Einschränkung $g \in K\backslash G/K$ wählen. Nun folgt die Behauptung aus Satz (2.3). ■

(2.6) Lemma
Es sei $T(\lambda)$ die Trägheitsgruppe von λ in N. Weiter seien $n, m \in T(\lambda)$ und $g \in G$.
Dann ist $e_\lambda n e_\lambda \cdot e_\lambda g e_\lambda \cdot e_\lambda m e_\lambda = e_\lambda ngm e_\lambda$.

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma (2.1). ■

Ob ein Gruppenelement zu Null kondensiert lässt sich auf die Frage zurückführen, ob ein Vertreter derselben Trägheitsgruppen-Doppelnebenklasse zu Null kondensiert.

(2.7) Proposition
Es seien n und m Elemente der Trägheitsgruppe von λ in N und $g \in G$. Dann ist $e_\lambda ngme_\lambda \neq 0$ genau dann, wenn $e_\lambda ge_\lambda \neq 0$ ist.

Beweis: Nach Lemma (2.1) ist $e_\lambda ngme_\lambda = ne_\lambda ge_\lambda m$. Da n und m Einheiten in FG sind, ist $ne_\lambda ge_\lambda m$ genau dann ungleich null, wenn $e_\lambda ge_\lambda$ ungleich null ist. ∎

Für die kondensierte Algebra der Trägheitsgruppe können wir stets ein Erzeugendensystem angeben.

(2.8) Proposition
Es sei $T := T(\lambda) \leq N$ die Trägheitsgruppe von λ in N. Ist $\mathcal{N} \subseteq T$ ein Vertretersystem der Elemente eines Erzeugendensystems der Faktorgruppe T/K, so wird die kondensierte Algebra $e_\lambda FTe_\lambda$ von der Menge $e_\lambda \mathcal{N} e_\lambda$ erzeugt.

Beweis: Nach Korollar (2.5) ist ein kondensiertes Element von N genau dann ungleich Null, wenn es in $T(\lambda)$ liegt. Des Weiteren sichern wir durch Lemma (2.6) für $n, m \in T(\lambda)$ die Gleichung $e_\lambda ne_\lambda \cdot e_\lambda me_\lambda = e_\lambda nme_\lambda$. Beachten wir noch Lemma (2.1), so sehen wir, dass folglich jedes Kondensat eines Elements von $T(\lambda)$ als Produkt von Elementen aus $e_\lambda \mathcal{N} e_\lambda$ geschrieben werden kann. ∎

Das Erzeugendensystem von $e_\lambda FTe_\lambda$ aus Proposition (2.8) ist minimal, da diese kondensierte Algebra isomorph zu einer verschränkten Gruppenalgebra von T/K ist. Um dies zu sehen, betrachten wir zunächst das zugehörige Faktorensystem.

(2.9) Definition/Bemerkung
Es sei $\mathfrak{T}$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von K in T. Wir bezeichnen die zugehörige Faktorgruppe mit T/K. Weiter sei

$$\begin{array}{rcl} \alpha_\lambda : T/K \times T/K & \to & F^*, \\ (Kt_1, Kt_2) & \mapsto & \lambda(\hat{k}(t_1, t_2)), \end{array}$$

wobei $\hat{k}(t_1, t_2) \in K$ definiert ist durch die Gleichung $t_1 t_2 = \hat{k}(t_1, t_2)t_3$ für ein $t_3 \in \mathfrak{T}$. Die so definierte Abbildung α_λ ist ein Faktorensystem, d.h. sie genügt der Gleichung

$$\alpha_\lambda(xy, z)\alpha_\lambda(x, y) = \alpha_\lambda(x, yz)\alpha_\lambda(y, z)$$

für alle $x, y, z \in T/K$.

Beweis: Es seien $t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}$ mit $x = Kt_1$, $y = Kt_2$ und $z = Kt_3$. Der Übersichtlichkeit wegen bezeichnen wir in diesem Beweis das Element von $\mathfrak{T}$, dessen Nebenklasse das Produkt $t_i t_j$ enthält, mit $t_{i,j}$ für $i, j = 1, 2, 3$. Ebenso sei $t_{1,2,3} \in \mathfrak{T}$, sodass $Kt_1t_2t_3 = Kt_{1,2,3}$ ist.
In T ist die Gleichheit $(t_1t_2)t_3 = t_1(t_2t_3)$ erfüllt. Aus der linken Seite dieser Gleichung erhalten wir $\hat{k}(t_1, t_2)t_{1,2}t_3 = \hat{k}(t_1, t_2)\hat{k}(t_{1,2}, t_3)t_{1,2,3}$. In Analogie dazu liefert die rechte Seite das Produkt $t_1\hat{k}(t_2, t_3)t_1^{-1}\hat{k}(t_1, t_{2,3})t_{1,2,3}$. Damit ist

$$\hat{k}(t_1, t_2)\hat{k}(t_{1,2}, t_3) = t_1\hat{k}(t_2, t_3)t_1^{-1}\hat{k}(t_1, t_{2,3})$$

erfüllt. Da T die Trägheitsgruppe von λ ist, liefert eine Anwendung von λ nun unmittelbar $\lambda(\hat{k}(t_1,t_2)\hat{k}(t_{1,2},t_3)) = \lambda(\hat{k}(t_1,t_{2,3})\hat{k}(t_2,t_3))$, was die Behauptung ist. ∎

(2.10) Bemerkung
Die kondensierte Algebra $e_\lambda FTe_\lambda$ ist isomorph zur verschränkten Gruppenalgebra $F^{\alpha_\lambda}(T/K)$ mit Faktorensystem α_λ. Insbesondere gilt: Ist $e_\lambda = e_1$ das triviale Idempotent, so ist $T = N$ und die kondensierte Algebra e_1FNe_1 ist isomorph zur Gruppenalgebra $F(N/K)$.

Beweis: Wir definieren $\psi : F^{\alpha_\lambda}(T/K) \to e_\lambda FTe_\lambda$ durch $Kt \mapsto e_\lambda te_\lambda$ für $t \in \mathfrak{T}$. Diese Abbildung ist ein Morphismus von Algebren, da

$$\begin{aligned}
\psi(Kt_1 \cdot Kt_2) &= \psi(\alpha_\lambda(t_1,t_2)Kt_{1,2}) = \alpha_\lambda(t_1,t_2)\psi(Kt_{1,2}) = \\
&= \alpha_\lambda(t_1,t_2)e_\lambda t_{1,2}e_\lambda = e_\lambda\hat{k}(t_1,t_2)t_{1,2}e_\lambda = \\
&= e_\lambda t_1 \cdot t_2 e_\lambda = e_\lambda t_1 e_\lambda \cdot e_\lambda t_2 e_\lambda = \\
&= \psi(Kt_1)\cdot\psi(Kt_2)
\end{aligned}$$

ist. Nach Satz (2.3) ist $\dim e_\lambda FTe_\lambda = |T/K|$, was auch die Dimension der verschränkten Algebra $F^{\alpha_\lambda}(T/K)$ ist. Da ψ offensichtlich surjektiv ist, folgt die Behauptung. ∎

Wir können jetzt das Hauptergebnis dieses Abschnitts formulieren. Zusammen mit der Kenntnis eines Erzeugendensystems von $e_\lambda FTe_\lambda$ und unserer Analyse von Produkten von Elementen aus $e_\lambda FTe_\lambda$ mit Elementen aus $e_\lambda FGe_\lambda$ erhalten wir ein Erzeugendensystem der kondensierten Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$.

(2.11) Satz
Es sei $T(\lambda)$ die Trägheitsgruppe von λ in N, die Menge $\mathcal{N} \subseteq T(\lambda)$ wie in Proposition (2.8) und $\mathcal{T}$ die Elemente eines vollständigen Repräsentantensystems der $T(\lambda)$-$T(\lambda)$-Doppelnebenklassen in G, welche nicht zu Null kondensieren. Dann wird die kondensierte Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ von der Menge $e_\lambda\mathcal{N}e_\lambda \cup e_\lambda\mathcal{T}e_\lambda$ erzeugt.

Beweis: Jedes Element $g \in G$ lässt sich als Produkt $g = ntm$ schreiben, wobei $n, m \in T := T(\lambda)$ sind und $t \in T\backslash G/T$ ist. Nach Proposition (2.7) und Lemma (2.6) lässt sich das Kondensat von g als Produkt $e_\lambda ne_\lambda \cdot e_\lambda te_\lambda \cdot e_\lambda me_\lambda$ schreiben, wobei die kondensierten Elemente von n und m der Algebra $e_\lambda FTe_\lambda$ entstammen und t in $\mathcal{T}$ liegt, falls $e_\lambda ge_\lambda \neq 0$ ist. Nun folgt mit Proposition (2.8) die Behauptung. ∎

Um im Folgenden deutlich zu machen, dass ein aus Satz (2.11) gewonnenes Erzeugendensystem der Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$ von den Doppelnebenklassen der Trägheitsgruppe des linearen Charakters λ von K abhängt, illustrieren wir diesen Zusammenhang, indem wir die folgende Bezeichnung einführen:

(2.12) Definition
Mit den Bezeichnungen aus Satz (2.11) nennen wir ein Erzeugendensystem von $e_\lambda FGe_\lambda$, das eine Teilmenge der Vereinigung von $e_\lambda\mathcal{T}e_\lambda$ und $e_\lambda\mathcal{N}e_\lambda$ ist, ein *träges Erzeugendensystem* der kondensierten Algebra.

3 Verkleinerung träger Erzeugendensysteme

Die Erzeugendensysteme, die wir aus Satz (2.11) gewinnen, stellen eine deutliche Verbesserung gegenüber der Wahl von $e_\lambda(K\backslash G/K)e_\lambda$ als garantiertem Erzeugendensystem dar. Dennoch kann es in der Praxis vorkommen, dass sie von einer Größenordnung sind, welche die gewünschten Berechnungen wieder sehr aufwendig macht. Es ist auch intuitiv klar, dass ein durch Satz (2.11) gefundenes, großes Erzeugendensystem eine erhebliche Redundanz aufweist. Zunächst einmal wird nicht genutzt, dass wir die Algebra nur in einer speziellen Charakteristik erzeugen wollen. Die gefundenen Elemente erzeugen stets die kondensierte Algebra, solange die Charakteristik des Körpers nicht die Ordnung der Kondensationsuntergruppe teilt. Des Weiteren legen Beobachtungen aus der Praxis die Vermutung nahe, dass oft eine kleine Teilmenge des Erzeugendensystems ebenfalls diese Eigenschaft besitzt. Der Nachweis dieser Vermutung gestaltet sich indes schwierig, da wir uns in einer ähnlichen Situation wie im Ausgangspunkt des Erzeugnisproblems befinden. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob der Umweg über die Bestimmung eines trägen Erzeugendensystems eine Rechenzeitersparnis bringt.
Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt eine neue rechnerische Methode vorstellen, die es erlaubt, die Kardinalität eines trägen Erzeugendensystems zu verkleinern, indem Elemente als redundant nachgewiesen werden.

Da wir für die folgenden Betrachtungen den linearen Charakter λ von K fest wählen, erlauben wir uns anstelle von e_λ abkürzend e zu schreiben. Des Weiteren gelten die in Abschnitt 2 eingeführten Bezeichnungen. Das heißt T sei die Trägheitsgruppe in N von λ und $\mathcal{T}$ die Menge der T-T-Doppelnebenklassenvertreter von G, welche nicht zu Null kondensieren. Darüber hinaus sei $\mathcal{E}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{C}$ die Teilalgebra von $eFGe$, die von $e\mathcal{E}e$ und $eFTe$ erzeugt wird.

Die Grundlage für das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren ist die folgende Beobachtung:

(3.1) Lemma
Es sei $\eta \in \mathcal{C}$ ein Element, das bezüglich der Basis $e\mathcal{D}e$ aus Satz (2.3) die Darstellung $\eta = \sum_{d\in\mathcal{D}} c_d ede$ mit $c_d \in F$ für alle $d \in \mathcal{D}$ habe. Ist $t \in \mathcal{E}$, dann ist auch $\eta - c_d ede$ ein Element von $\mathcal{C}$ für alle $d \in \mathcal{D}$ mit $KdK \subseteq TtT$.

Beweis: Da $KdK \subseteq TtT$ existieren $n, n' \in T$ mit $d = ntn'$. Weiter ist $ene \cdot ete \cdot en'e = entn'e = ede \in \mathcal{C}$ und damit auch $\eta - c_d\, ede \in \mathcal{C}$. ■

Da sich die Elemente aus $e\mathcal{D}e$ nach $T\backslash G/T$ sortieren lassen, bilden wir folgenden Begriff:

(3.2) Definition
Für ein $g \in G$ nennen wir $t \in \mathcal{T}$ den *Keim* von ege, falls $g \in TtT$ ist, d.h. es existieren $n, m \in T$ mit $ene \cdot ete \cdot eme = ege$.

Für zwei Gruppenelemente g und h seien ege und ehe in $\mathcal{C}$. Wir wollen nun das Produkt

$$ege \cdot ehe = egehe = \frac{1}{|K|} \sum_{k\in K} \lambda(k)^{-1} egkhe$$

untersuchen, um Information darüber zu gewinnen, welche Keime im Produkt von ege und ehe vorkommen, d.h. welche Keime die nicht verschwindenden Summanden des Produkts in der Basisdarstellung bzgl. $e\mathcal{D}e$ haben. Dazu bezeichnen wir mit $O_H(\omega)$ für eine Gruppe H die Bahn eines Elementes ω einer H-Menge Ω.

(3.3) Bemerkung/Definition
Die Gruppe G operiert auf den Rechtsnebenklassen von K in G durch Rechtsmultiplikation. Für ein $g \in G$ gibt es zur Rechtsnebenklasse Kg genau ein Element $d \in K\backslash G/K$, sodass Kg in der K-Bahn von Kd liegt. Dies ist gleichbedeutend zu $Kg \subseteq KdK$. Folglich gibt es genau ein Element $k \in (K^d \cap K)\backslash K$ mit $Kg = Kdk$, da $K^d \cap K$ der Stabilisator von Kd in K ist. Das so definierte Element wollen wir mit $\hat{g}_d$ bezeichnen.

Wir können nun eine Darstellung des Produkts $ege \cdot ehe$ in der Basis aus Satz (2.3) angeben.

(3.4) Lemma
Es seien $g, h \in G$ mit $ege \neq 0$ und $ehe \neq 0$. Dann gilt

$$ege \cdot ehe = \frac{1}{|O_K(Kg)|} \sum_{d \in \mathcal{D}} \Big(\sum_{\substack{k \in (K^g \cap K)\backslash K \\ Kgkh \subseteq KdK}} \lambda(k^{-1}\widehat{gkh}_d)\Big)\, ede,$$

wobei die Elemente $\widehat{gkh}_d$ wie in Bemerkung (3.3) definiert sind.

Beweis: Nach Definition des linearen Idempotents e ist das Produkt von ege und ehe die Summe $|K|^{-1} \sum_{k' \in K} \lambda(k')^{-1} egk'he$. Indem wir jedes $k' \in K$ schreiben als $k''k$ mit $k'' \in K^g \cap K$ und $k \in (K^g \cap K)\backslash K$, können wir diese Summe als Produkt

$$\frac{1}{|K|} \sum_{k'' \in K^g \cap K} \lambda(k'')^{-1} \lambda(gk''g^{-1}) \sum_{k \in (K^g \cap K)\backslash K} \lambda(k)^{-1} egkhe$$

schreiben. Dabei entsteht der Skalar $\lambda(gk''g^{-1})$ mit Lemma (2.1), indem wir $egk'' = egk''g^{-1}g$ schreiben und $gk''g^{-1} \in K$ ist für alle $k'' \in K^g \cap K$. Ergänzen wir eine Eins in Form des Quotienten $|K^g \cap K|/|K^g \cap K|$, so können wir die erste Summe zum Skalarprodukt $\langle \lambda{\downarrow}_{K^g \cap K}, \lambda^g{\downarrow}_{K^g \cap K} \rangle$ vereinfachen, was nach Korollar (2.5) gleich eins ist, da ege als nicht null vorausgesetzt ist. Wir erhalten folglich die Summe $|O_K(Kg)|^{-1} \sum_{k \in K^g \cap K \backslash K} \lambda(k)^{-1} egkhe$. Nun ist jedes $egkhe$ zu genau einem ede assoziiert, denn nach Bemerkung (3.3) ist die Gleichung $egkhe = ed \cdot \widehat{gkh}_d e$ erfüllt. Nach Lemma (2.1) „schluckt" das Idempotent e das Element $\widehat{gkh}_d$ zugunsten eines Skalars $\lambda(\widehat{gkh}_d)$. Damit ist $egkhe = \lambda(\widehat{gkh}_d) ede$. Dabei ist $egkhe$ genau dann zu ede assoziiert, wenn $Kgkh$ eine Teilmenge von KdK ist. Durch Umsortieren der Summanden nach den Basisvektoren ede, zu denen sie assoziiert sind, erhalten wir die Behauptung. ■

(3.5) Definition
Für ein $d \in \mathcal{D}$ definieren wir $c^d_{g,h} := |\{\omega \in O_K(Kg) \mid \omega h \in O_K(Kd)\}|$. Die p-modulare Reduktion des Quotienten dieser natürlichen Zahl mit der Bahnlänge $|O_K(Kg)|$ ist der Koeffizient

von ede in der Basisdarstellung von $ege \cdot ehe$ aus Lemma (3.4), wenn e das triviale Idempotent ist. Da ede genau dann den Keim $t \in \mathcal{T}$ besitzt, wenn $KdK \subseteq TtT$ ist, definieren wir

$$\tilde{c}^t_{g,h} := \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ KdK \subseteq TtT}} c^d_{g,h}$$

als die *Vielfachheit des Keims t* im Produkt $ege \cdot ehe$.

Diese Definition mag dem Leser zunächst etwas artifiziell erscheinen. Schließlich hängt es von der Summe $\sum \lambda(k^{-1}\widehat{gkh_d})$ aus Lemma (3.4) ab, ob ein Basisvektor ede in der Darstellung des Produktes bezüglich der Basis $e\mathcal{D}e$ überhaupt auftaucht, d.h. einen von Null verschiedenen Koeffizienten erhält. Damit weicht natürlich auch die tatsächliche Vielfachheit der vorkommenden Keime von der oben definiert Größe ab. Zwecks der Möglichkeit einer rechnerischen Bestimmung der Keimvielfachheiten verzichten wir aber bewusst auf die genaue Bestimmung der Koeffizienten. Hierzu wäre eine Kondensation des induzierten Moduls $\Lambda\uparrow^G$ mit dem linearen Idempotent e nötig. Wir wollen aber gerade diese aufwendige Rechnung, die aufgrund der von $eFGe$ erreichten Dimension von erheblicher Größe sein kann, vermeiden und ohne explizite Kondensation von Elementen etwas über die in ihren Produkten auftauchenden Vielfachheiten sagen. Aus diesem Grunde begnügen wir uns mit der reduzierten Information, dass in einem Produkt von ege mit ehe höchstens $\tilde{c}^t_{g,h}$ Basiselemente ede mit Keim t vorkommen.

Der Reiz an dieser Vereinfachung liegt insbesondere darin, dass wir die Vielfachheit eines Keims auf die Längen von K- und T-Bahnen der G-Mengen $K\backslash G$ und $T\backslash G$ zurück führen können. Dies erlaubt uns, zu deren Bestimmung in den zugehörigen ganzzahligen Permutationsmoduln zu rechnen.

(3.6) Proposition
Es ist

$$\tilde{c}^t_{g,h} = \frac{|O_K(Kg)|}{|O_K(Tg)|} |\{\omega \in O_K(Tg) \mid \omega h \in O_T(Tt)\}|.$$

Beweis: Nach Definition ist $c^d_{g,h} = |\{\omega \in O_K(Kg) \mid \omega h \in O_K(Kd)\}|$. Der Stabilisator eines $\omega \in O_K(Kg)$ ist gegeben durch $K^g \cap K$ und damit ist $\omega = Kgk$ für genau ein $k \in (K^g \cap K)\backslash K$. Es liegt ωh folglich genau dann in $O_K(Kd)$, wenn für dieses k die Rechtsnebenklassen $Kgkh$ in KdK liegt. Folglich lässt sich die Summe aus Definition (3.5) schreiben als die Summe der Kardinalitäten der Mengen $\{k \in (K^g \cap K)\backslash K \mid KgkhK = KdK\}$ für $d \in \mathcal{D} \cap TtT$. Diese lassen sich disjunkt vereinigen zu $\{k \in (K^g \cap K)\backslash K \mid KgkhK \subseteq TtT\}$. Da $KgkhK$ genau dann eine Teilmenge von TtT ist, wenn $TgkhT = TtT$ ist, erhalten wir als rechte Seite die Kardinalität der Menge $\{k \in (K^g \cap K)\backslash K \mid TgkhT = TtT\}$. Schreiben wir nun jedes k als Produkt $k''k'$, wobei k'' ein Element von $(K^g \cap K)\backslash(T^g \cap K)$ und $k' \in (T^g \cap K)\backslash K$ ist, so erhalten wir damit als rechte Seite das Produkt aus dem Quotienten $|T^g \cap K|/|K^g \cap K|$ und $|\{k' \in (T^g \cap K)\backslash K \mid Tgk'hT = TtT\}|$, woraus die Behauptung folgt. ■

Die Vielfachheit eines Keims im Produkt von ege und ehe ist also stets ein Vielfaches des Verhältnisses der beiden Bahnlängen von $O_K(Kg)$ und $O_K(Tg)$. Dieses Verhältnis ist gleich dem Quotienten $|K \cap T^g|/|K \cap K^g|$ der zugehörigen Stabilisatoren von Tg bzw. Kg in K. Ist folglich die Bahn $O_K(Tg)$ von maximaler Länge, d.h. ist die Länge gleich der Länge der Bahn $O_K(Kg)$ bzw. ist $K \cap T^g = K \cap K^g$, so wird der Quotient zu Eins. Da wir besonders an Keimen interessiert sind, die mit der Vielfachheit eins vorkommen, gilt den $g \in G$, für die das Verhältnis der Bahnlängen eins ist, unsere besondere Aufmerksamkeit. Aus diesem Grunde bilden wir den folgenden Begriff.

(3.7) Definition
Ein $g \in G$ heiße *quasi-regulär*, wenn $|O_K(Kg)| = |O_K(Tg)|$ ist.

Wir können jetzt das Hauptergebnis dieses Abschnitts als Satz formulieren, mit dessen Hilfe wir im weiteren Verlauf Elemente von $e\mathcal{T}e$ als redundant zur Erzeugung von $\mathcal{C}$ nachweisen können. Aus der Voraussetzung, dass ein Keim mit Vielfachheit eins im Produkt $ege \cdot ehe$ auftritt, folgt notwendigerweise, dass g quasi-regulär ist.

(3.8) Satz (Die Nadel im Heuhaufen)
Es seien g und h Elemente von G und die Keime ihrer Kondensate seien Elemente von $\mathcal{E}$. Besitzt ein Keim $t \in \mathcal{T}$ die Vielfachheit eins im Produkt $ege \cdot ehe$ und gilt weiter für jeden Keim $t \neq t' \in \mathcal{T}$, dessen Vielfachheit im Produkt $ege \cdot ehe$ größer als null ist, dass $t' \in \mathcal{E}$ ist, so liegt ete in der von $e\mathcal{E}e$ und $eFTe$ erzeugten Algebra $\mathcal{C}$.

Beweis: Ist $\tilde{c}^t_{g,h} = 1$, so enthält die Darstellung des Produktes $ege \cdot ehe$ bezüglich der Basis $e\mathcal{D}e$ genau einen Basisvektor ede mit Keim t. Demnach gibt es in der Basisdarstellung von (3.4) genau ein $k \in (K^g \cap K)\backslash K$ mit $Kgkh \subseteq KdK$, sodass der Koeffizient von ede in dieser Darstellung eine Einheit in F, also ungleich null ist. Da die Kondensate der Keime aller anderen auftretenden Basisvektoren in $\mathcal{E}$ enthalten sind, können wir durch eine iterierte Anwendung von Lemma (3.1) die zugehörigen Summanden vom Produkt subtrahieren und erhalten stets ein Element, das in der Algebra $\mathcal{C}$ liegt. Auf diese Weise bleibt vom Produkt nur der einzige Basisvektor zum Keim t übrig, sodass wir nach Multiplikation mit geeigneten Elementen von $eFTe$ folgern können, dass $ete \in \mathcal{C}$ ist. ■

Bevor wir abschließend zur praktischen Bedeutung und Umsetzung dieses Satzes kommen, zeigen wir zunächst, dass es nicht erforderlich ist, alle Produkte von Elementen ege und ehe mit bestimmten Keimen zu betrachten. Begünstigend für eine algorithmische Umsetzung ist, dass es vielmehr genügt, sich auf die Kondensate der Keime selbst zu beschränken.

(3.9) Lemma
Es seien $g, h \in G$ mit $nlm = g$ und $n'rm' = h$ für geeignete $n, m, n', m' \in T$ und $l, r \in \mathcal{T}$. Dann existiert ein $n'' \in K\backslash T$, sodass die Vielfachheit eines Keims im Produkt $ege \cdot ehe$ der Vielfachheit desselben Keims im Produkt $ele \cdot en''e \cdot ere = eln''e \cdot ere$ entspricht.

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen können wir mit Lemma (2.6) das Produkt schreiben als $ege \cdot ehe = enlmen'rm'e = ene \cdot ele \cdot emn'e \cdot ere \cdot em'e$. Des Weiteren ist mit der Definition der Vielfachheit eines Keims klar, dass Links- oder Rechtsmultiplikation mit Elementen von $eFTe$

keine Auswirkungen auf die Keimvielfachheiten haben. Nach Lemma (2.1) sind die Vielfachheiten aller Keime in $ege \cdot ehe$ folglich genau gleich denen im Produkt $ele \cdot en''e \cdot ere$, wobei $n'' \in Kmn'K = Kmn'$ ist. ■

Die Schlussweise aus Satz (2.11) lässt sich in Bezug auf die Frage nach überflüssigen Erzeugern im folgenden Sinne ausnutzen, wobei wir Dank des vorangestellten Lemmas keine Einschränkung bezüglich der zu gewinnenden Information hinnehmen müssen.

(3.10) Korollar
Es seien $l, r \in \mathcal{E}$. Das Kondensat eines Keims $t \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{E}$, der in einem Produkt $ele \cdot ene \cdot ere = elne \cdot ere$ für ein $n \in K\setminus T$ mit der Vielfachheit eins vorkommt, während alle weiteren Keime des Produkts, deren Vielfachheiten größer als null sind, in $\mathcal{E}$ sind, ist überflüssig zur Erzeugung von $eFGe$ zusammen mit $eFTe$.

Beweis: Dies folgt aus Satz (3.8) und Lemma (3.9). Denn nach den gemachten Voraussetzungen ist $ete \in \langle eFTe, e\mathcal{E}e\rangle$ und somit zur Erzeugung überflüssig. ■

In der praktischen Anwendung gehen wir in umgekehrter Richtung vor. Anstatt all jene Keime zu bestimmen, die in dem Erzeugnis einer fest gewählten Menge liegen, beginnen wir mit dem größtmöglichen trägen Erzeugendensystem $e\mathcal{N}e \cup e\mathcal{T}e$ (mit den Bezeichnungen aus Satz (2.11)) und versuchen es durch Iteration von Satz (3.8) zu verkleinern. Dazu entfernen wir in jedem Schritt aus der Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ ein Element t und überprüfen, ob ete trotzdem im Erzeugnis von $e\mathcal{N}e \cup e\mathcal{E}e$ liegt. Diese mühselige Arbeit übertragen wir durch folgenden Algorithmus an einen Rechner, der das träge Erzeugendensystem $\mathcal{T}$ in zwei Teilmengen A (wie „Ausschuss“) und B (wie „benötigt“) partitioniert.

(3.11) Algorithmus
EINGABE: $\mathcal{T}$.

AUSGABE: Mengen $A, B \subseteq \mathcal{T}$ mit $A \dot\cup B = \mathcal{T}$, $eAe \subseteq \langle eBe, eFTe\rangle_{\text{F-Alg.}} = eFGe$.

1. Initialisiere $A \leftarrow \emptyset$ und $B \leftarrow \emptyset$.
2. Setze $C \leftarrow \mathcal{T}\setminus(A \cup B)$. Wähle ein $t \in C$ und setze $D \leftarrow B \cup (C\setminus\{t\})$.
3. Fasse in $L \subseteq D$ die quasi-regulären Keime zusammen.
4. Für alle $l \in L$, $r \in D$ und $n \in K\setminus T$
   - 4.1 Berechne die Liste v der Vielfachheiten aller Keime aus $\mathcal{T}$ im Produkt $ele \cdot ene \cdot ere$.
   - 4.2 Setze in v alle Vielfachheiten auf 0, deren Keime in D liegen.
   - 4.3 Falls v als einzigen von 0 verschiedenen Eintrag eine 1 an der Stelle von t' besitzt, so unterscheide:
     * Ist $t' = t$, so setze $A \leftarrow A \cup \{t\}$ und gehe zu Schritt 6.
     * Sonst setze $D \leftarrow D \cup \{t'\}$ und gehe zu Schritt 3.
5. Setze $B \leftarrow B \cup \{t\}$.

$\boxed{6}$ Falls $A \cup B \neq \mathcal{T}$ ist, gehe zu Schritt 2.

$\boxed{7}$ Gib Listen A und B zurück.

Die wichtigsten Schritte von Algorithmus (3.11) bewirken dabei Folgendes:

(3.12) Bemerkung
In Schritt 2 wird die Menge der noch zu überprüfenden Keime, also diejenigen, die weder als benötigt noch als Ausschuss nachgewiesen wurden, in C gespeichert. Es wird ein Keim t aus der Menge C ausgewählt, der im Folgenden überprüft wird, und in D werden die Keime, deren Kondensate das derzeitige Erzeugendensystem ausmachen, ohne t gespeichert.

Wird in Schritt 4.3 der Keim t im Sinne von Korollar (3.10) gefunden, so wird er zur Erzeugung nicht benötigt und der Menge A zugeordnet. Danach wird ab Schritt 2 wieder ein neuer Keim überprüft.

Wird in Schritt 4.3 ein von t verschiedener Keim gefunden, so wird er der Menge D zugefügt, um bei der nächsten Iteration in Schritt 4.1 als Keim eines Faktors der Produkte von kondensierten Elementen zur Verfügung zu stehen.

Ist nach Absolvierung von Schritt 4 der Keim t nicht als redundant nachgewiesen worden, so müssen wir ihn als benötigt ansehen und der Menge B hinzufügen. Dies geschieht in Schritt 5.

(3.13) Bemerkung
Je nach Größe der Indizes $[G : N]$ und $[N : K]$, bzw. der Dimensionen der Permutationsmoduln $\mathbb{Z}(N\backslash G)$ und $\mathbb{Z}(K\backslash N)$, kann die Zeit, die Algorithmus (3.11) in Schritt 4 verweilt, erheblich sein. Für die Praxis sollte man daher an dieser Stelle jeweils die maximale Anzahl an Elementen aus L, D und $K\backslash T$ angeben, die man in der zugehörigen dreifachen Schleife betrachten möchte.

4 Ein theoretisches Kriterium für Erzeugung

In diesem Abschnitt legen wir die theoretischen Grundlagen für ein neues Verfahren, das es ermöglicht, eine Menge von kondensierten Elementen als ein Erzeugendensystem der kondensierten Algebra $eFGe$ zu verifizieren. Dazu sei wieder F ein Körper von Primzahlcharakteristik p, die ein Teiler der Gruppenordnung von G ist. Die Kondensationsuntergruppe K besitzt eine zu p teilerfremde Ordnung, und e ist ein lineares Idempotent von K zur Darstellung λ, die bewirkt wird vom FK-Modul Λ. Die Trägheitsgruppe von λ im Normalisator von K in G sei wieder mit T bezeichnet. Zusätzlich sei von nun an der Kern von λ mit K_λ bezeichnet, der ebenfalls normal in T ist.

Obwohl wir standardmäßig alle Moduln als Rechtsmoduln betrachten, ist es in diesem Abschnitt erforderlich auch Links- bzw. Bimoduln zu betrachten. Wir treffen deshalb die folgenden Vereinbarungen bezüglich der verwendeten Bezeichnungen.

(4.1) Bezeichnungen
Es sei V ein A-B-Bimodul für zwei Ringe A und B.

(i) Wir bezeichnen mit ${}_AV$, V_B bzw. ${}_AV_B$ die A-Linksmodul-, B-Rechtsmodul bzw. A-B-Bimodulstruktur von V.

(ii) Mit $\mathrm{rad}({}_AV)$, $\mathrm{rad}(V_B)$ bzw. $\mathrm{rad}({}_AV_B)$ sei das Radikal von V als A-Links-, B-Rechts- bzw. A-B-Bimodul bezeichnet.

(iii) Ist H eine beliebige Gruppe, $N \trianglelefteq H$ ein Normalteiler und V ein FN-Modul, so bezeichnen wir mit $\mathrm{inf}_{H/N,H}(V)$ seine Inflation auf H.

(iv) Ist V ein $F(T/K_\lambda)$-Modul, so bezeichnet $\mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(V)$ die Harish-Chandra Induktion von V nach G, d.h. $\mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(V) = \mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(V){\uparrow}^G$.

(4.2) Definition
Ist V ein FG-Modul und operiert für eine Untergruppe $H \leq G$ jedes Element von H wie die Identität, so sagen wir, dass H *trivial* auf V operiert. In diesem Fall bezeichnen wir V als einen *trivialen* FH- bzw. H-Modul, auch wenn seine Dimension größer als eins ist.

In der Situation von Definition (4.2) liefert Inflation eine Bijektion zwischen den FH-Moduln, die triviale FN-Moduln sind, und den Moduln der Gruppenalgebra $F(H/N)$.

(4.3) Bemerkung
Es sei F ein Körper. Für eine beliebige Gruppe H mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq H$ ist der Inflationsfunktor $\mathrm{inf}_{H/N,H} : \mathfrak{mod}\text{-}F(H/N) \to \mathfrak{mod}\text{-}FH$ exakt und bildet einfache Moduln auf einfache ab. Insbesondere kann jeder $F(H/N)$-Modul V als FH-Modul aufgefasst werden, indem N trivial operiert. Umgekehrt wird jeder FH-Modul, der ein trivialer FN-Modul ist, durch die Operation $v \cdot Nh := vh$ für alle $v \in V$ und $Nh \in H/N$ zu einem $F(H/N)$-Modul.

(4.4) Bemerkung
Der induzierte Modul $\Lambda{\uparrow}^T$ ist ein trivialer FK_λ-Modul.

Beweis: Nach dem Satz von Mackey ist $\Lambda{\uparrow}^T{\downarrow}_{K_\lambda} \cong \bigoplus_{y \in K\backslash T/K_\lambda} \Lambda^y{\downarrow}_{K^y \cap K_\lambda}{\uparrow}^{K_\lambda}$. Da K ein Normalteiler von T ist und T selbst die Trägheitsgruppe von λ, so vereinfacht sich dies zu der direkten Summe $\bigoplus_{y \in T/K} \Lambda{\downarrow}_{K_\lambda}$. ■

Nach Bemerkung (4.3) können wir folglich den FT-Modul $\Lambda{\uparrow}^T$ auch als einen $F(T/K_\lambda)$-Modul auffassen.

(4.5) Lemma
Ist V ein $F(T/K_\lambda)$-Modul, so gilt $\mathrm{rad}(\mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(V)_{FT}) = \mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(\mathrm{rad}(V_{F(T/K_\lambda)}))$.

Beweis: Es ist $\mathrm{rad}(\mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(V)_{FT})$ der Schnitt über alle maximalen Untermoduln der Inflation $\mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(V)$. Da $\mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}$ ein exakter Funktor ist und die Inflation eines einfachen Moduls wieder einfach ist, ist ein FT-Untermodul von $\mathrm{inf}_{T/K_\lambda,T}(V)$ genau dann maximal, wenn er die Inflation eines maximalen $F(T/K_\lambda)$-Untermoduls von V ist. ■

(4.6) Satz
Es sei $\inf_{T/K_\lambda,T}(S_1)\oplus\cdots\oplus\inf_{T/K_\lambda,T}(S_m)$ der Radikalfaktor von $\Lambda{\uparrow}^T$, wobei $S_1,\ldots,S_m$ einfache $F(T/K_\lambda)$-Moduln sind. Dann existiert folgende exakte Sequenz von $eFGe$-Rechtsmoduln:

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e \longrightarrow \Lambda{\uparrow}^G e \xrightarrow{\pi_{**}} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i)e \longrightarrow 0,$$

wobei $\pi_{**} := \operatorname{ind}_T^G(\pi)\otimes_{FG}\operatorname{id}_{FGe}$ ist. Hierbei ist $\pi : \Lambda{\uparrow}^T \to \bigoplus_{i=1}^m \inf_{T/K_\lambda,T}(S_i)$ der Epimorphismus, der aus der kanonischen Projektion von $\Lambda{\uparrow}^T$ auf seinen Radikalfaktor hervorgeht.

Beweis: Aus der Zerlegung $\bigoplus_{i=1}^m \inf_{T/K_\lambda,T}(S_i)$ des Radikalfaktors des induzierten Moduls $\Lambda{\uparrow}^T$ erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}) \longrightarrow \Lambda{\uparrow}^T \xrightarrow{\pi} \bigoplus_{i=1}^m \inf_{T/K_\lambda,T}(S_i) \longrightarrow 0$$

von FT-Rechtsmoduln. Da FG ein projektiver FT-Modul ist, ist der Funktor ind_T^G exakt. Damit erhalten wir aus obiger Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G \longrightarrow \Lambda{\uparrow}^G \xrightarrow{\operatorname{ind}_T^G(\pi)} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i) \longrightarrow 0$$

als exakte Sequenz von FG-Rechtsmoduln. Da der Kondensationsfunktor $\operatorname{cond}^{FG}_{eFGe}$ ebenfalls exakt ist, liefert seine Anwendung die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e \longrightarrow \Lambda{\uparrow}^G e \xrightarrow{\pi_{**}} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i)e \longrightarrow 0$$

von $eFGe$-Rechtsmoduln, was die Behauptung ist. ■

(4.7) Bemerkung
Der induzierte Modul $\Lambda{\uparrow}^T$ ist ein Modul der verschränkten Gruppenalgebra $F^{\alpha_\lambda}(T/K)$ und als solcher zu ihrem regulären Modul isomorph.

Beweis: Es ist $\Lambda{\uparrow}^T \cong eFT$ als FT-Moduln. Da das lineare Idempotent e zentral in FT ist, erhalten wir daraus die Isomorphie $\Lambda{\uparrow}^T \cong eFTe$. Die kondensierte Algebra $eFTe$ ist nach Bemerkung (2.10) zur verschränkten Gruppenalgebra $F^{\alpha_\lambda}(T/K)$ isomorph, also folgt die Behauptung. ■

(4.8) Lemma
Wir können $\operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT})$ als einen $eFTe$-FT-Bimodul auffassen. Als solcher gilt die Isomorphie

$$\operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}) \cong J(eFTe).$$

Beweis: Wir nutzen wieder, dass e zentral in $eFTe$ ist und dass $\Lambda{\uparrow}^T$ und eFT isomorphe FT-Moduln sind. Damit ist $\Lambda{\uparrow}^T \cong eFTe$ als FT-Moduln. Da $eFTe$ nach I.(3.11) isomorph zum Endomorphismenring von $\Lambda{\uparrow}^T$ ist, ist diese Isomorphie sogar eine von $eFTe$-FT-Bimoduln. Fassen wir $\Lambda{\uparrow}^T$ als $eFTe$-Modul auf, so ist dieser folglich isomorph zum regulären $eFTe$-Modul. Da eFT als FT-Modul und $eFTe$-Modul denselben Untermodulverband hat, ist $\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT})$ isomorph zum Jacobson-Radikal $J(eFTe)$ der kondensierten Algebra. Da einerseits alle Endomorphismen von $\Lambda{\uparrow}^T$ das Radikal $\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT})$ invariant lassen und andererseits $J(eFTe)$ ein zweiseitiges Ideal ist, sind beide $eFTe$-FT-Unterbimoduln. ∎

(4.9) Korollar
Es ist $\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e$ ein $eFTe$-$eFGe$-Bimodul und es gilt

$$\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e \cong J(eFTe)eFGe$$

als $eFTe$-$eFGe$-Bimoduln.

Beweis: Nach Definition des Induktionsfunktors ist $\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e = \mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}) \otimes_{FT} FGe$. Verwenden wir den Isomorphismus aus Lemma (4.8), so erhalten wir

$$\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e \cong J(eFTe) \underset{FT}{\otimes} FGe$$

als $eFTe$-$eFGe$-Bimoduln. Da $J(eFTe) = eJ(FT)e$ ist, ist insbesondere $J(eFTe)e = J(eFTe)$, sodass wir schließen

$$J(eFTe) \underset{FT}{\otimes} FGe = J(eFTe) \underset{FT}{\otimes} eFGe.$$

Nun ist $eFTe = eFGe \cap FT$, denn $eFTe$ ist in $eFGe$ und FT enthalten und umgekehrt erfüllt jedes $x \in eFGe \cap FT$ die Gleichung $x = exe \in eFTe$. Wir erhalten damit

$$\mathrm{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT}){\uparrow}^G e \cong J(eFTe) \underset{eFTe}{\otimes} eFGe.$$

Letzteres ist wie behauptet isomorph zu $J(eFTe)eFGe$. ∎

Identifizieren wir den induzierten Modul $\Lambda{\uparrow}^G$ mit dem Rechtsideal eFG der Gruppenalgebra, so besitzt $\Lambda{\uparrow}^G e$ eine $eFTe$-Linksmodulstruktur. Da nach Korollar (4.9) der linke Modul der kurzen exakten Sequenz aus Satz (4.6) ebenfalls ein $eFTe$-Linksmodul ist, dieser vermöge der Inklusion in $\Lambda{\uparrow}^G e$ enthalten ist und $eFTe$ auf beiden gleich operiert, ist auch der rechte Modul der Sequenz ein $eFTe$-Linksmodul. Diese Linksmodulstruktur wollen wir nun beschreiben.
Dazu identifizieren wir wegen Korollar I.(3.11) den FT-Endomorphismenring des induzierten Moduls $\Lambda{\uparrow}^T$ mit $eFTe$.

(4.10) Lemma
Ist A ein Ring, V ein A-FG-Bimodul und H eine Untergruppe von G, so gilt

$$V{\uparrow}^G e \cong \mathrm{Hom}_{FH}(\Lambda{\uparrow}^G{\downarrow}_H, {}_AV_{FH}),$$

als A-$eFGe$-Bimoduln.

Beweis: Nach Lemma I.(3.10) ist $V{\uparrow}^G e$ als A-$eFGe$-Bimodul isomorph zu $\mathrm{Hom}_{FG}(eFG, V{\uparrow}^G)$. Dies ist aber nach Lemma I.(3.4) isomorph zu $\mathrm{Hom}_{FG}(eFG, \mathrm{coind}_H^G(V))$. Damit liefert Proposition I.(3.8) die Behauptung. ■

(4.11) Bezeichnungen
Für einen einfachen $F(T/K_\lambda)$-Modul S schreiben wir abkürzend $\hat{S}$ für $\inf_{T/K_\lambda,T}(S)$ und bezeichnen mit $\mathcal{H}(\hat{S})$ die $\hat{S}$-homogene Komponente des Radikalfaktors von $\Lambda{\uparrow}^T$, d.h. $\mathcal{H}(\hat{S})$ ist die Summe aller einfachen FT-Moduln des Radikalfaktors, die isomorph zu $\hat{S}$ sind.

(4.12) Korollar
Es ist $\mathcal{H}(\hat{S})$ ein $eFTe$-FT-Bimodul und wir erhalten

$$\mathcal{H}(\hat{S}){\uparrow}^G e \cong \mathrm{Hom}_{FT}(\Lambda{\uparrow}^G{\downarrow}_T, \mathcal{H}(\hat{S}))$$

als $eFTe$-$eFGe$-Bimoduln.

Beweis: Mit der Identifikation von $\mathrm{End}_{FT}(\Lambda{\uparrow}^T)$ und $eFTe$ ist klar, dass $\mathcal{H}(\hat{S})$ ein $eFTe$-FT-Bimodul ist. Folglich ist $\mathcal{H}(\hat{S}){\uparrow}^G e$ ein $eFTe$-$eFGe$-Bimodul. Die behauptete Isomorphie folgt dann mit Lemma (4.10), wenn wir V durch $\mathcal{H}(\hat{S})$ und A durch $eFGe$ ersetzen. ■

Wir können folglich die $eFTe$-Linksmodulstruktur des rechten Moduls der kurzen exakten Sequenz aus Satz (4.6) wie folgt angeben:

(4.13) Bemerkung
Es wird $\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i)e$ aus Satz (4.6) zu einem $eFTe$-Linksmodul, indem wir isomorphe direkte Summanden zu ihrer homogenen Komponente zusammenfassen. Wir erhalten auf diese Weise aus Korollar (4.12) eine direkte Summe von $eFTe$-Linksmoduln.

Um die Bimodulstruktur des Radikalfaktors in der kurzen exakten Sequenz aus Satz (4.6) zu berücksichtigen, wollen wir als nächstes die Radikale von Bimoduln betrachten.

(4.14) Satz
Zu zwei endlichen Gruppen G und H seien $A := FG$ und $B := FH$ die zugehörigen Gruppenalgebren. Dann gilt

$$J(A \underset{F}{\otimes} B) = J(A) \underset{F}{\otimes} B + A \underset{F}{\otimes} J(B).$$

Beweis: Diese Aussage wird im Beweis von (10.38) in [7] zum Beweis der Hilfsaussage (10.39) bewiesen. Da der Beweis auf diese Weise etwas versteckt ist, geben wir ihn hier nochmal an. Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass das Tensorprodukt $A/J(A) \otimes B/J(B)$ der halbeinfachen Algebren $A/J(A)$ und $B/J(B)$ isomorph zu $(A \otimes B)/(J(A) \otimes B + A \otimes J(B))$ ist. Nun ist die Summe $I := J(A) \otimes B + A \otimes J(B)$ ein nilpotentes Ideal von $A \otimes B$. Damit ist I im Jacobsonradikal $J(A \otimes B)$ von $A \otimes B$ enthalten. Umgekehrt ist $A/J(A) \otimes B/J(B)$ als Produkt zweier halbeinfacher Algebren wieder halbeinfach, sodass $J(A \otimes B) \subseteq I$ gelten muss. ■

Damit erhalten wir folgende Beschreibung für das Radikal eines Bimoduls.

(4.15) Korollar
Es gelten die Bezeichnungen von Satz (4.14) und V sei ein A-B-Bimodul. Dann ist

$$\mathrm{rad}({}_A V_B) = J(A)V + VJ(B) = \mathrm{rad}({}_A V) + \mathrm{rad}(V_B).$$

Beweis: Wir fassen V als einen $A^{\mathrm{op}} \otimes_F B$-Rechtsmodul auf. Nach Satz (4.14) erhalten wir folglich $J(A^{\mathrm{op}} \otimes_F B) = J(A^{\mathrm{op}}) \otimes_F B + A^{\mathrm{op}} \otimes_F J(B)$. Damit gilt für das Radikal des Bimoduls $\mathrm{rad}({}_A V_B) = V(J(A^{\mathrm{op}}) \otimes_F B + A^{\mathrm{op}} \otimes_F J(B)) = J(A)V + VJ(B)$, woraus die Behauptung folgt. ■

Wir können nun zeigen, dass die kurze exakte Sequenz aus Satz (4.6) eine kurze exakte Sequenz von $eFTe$-$eFGe$-Bimoduln ist.

(4.16) Korollar
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz (4.6). Mit Korollar (4.9) erhalten wir folgende kurze exakte Sequenz von $eFTe$-$eFGe$-Bimoduln:

$$0 \longrightarrow J(eFTe)eFGe \longrightarrow eFGe \xrightarrow{\pi_{**}} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i)e \longrightarrow 0.$$

Beweis: Sowohl $J(eFTe)eFGe$ als auch $eFGe$ sind in natürlicher Weise $eFTe$-Linksmoduln. Wegen der Inklusion von $J(eFTe)eFGe$ in $eFGe$ operiert $eFTe$ auf beiden gleich. Damit ist der Faktor ebenfalls ein $eFTe$-Linksmodul und besitzt die Linksmodulstruktur aus Bemerkung (4.13).
Der Morphismus π_{**} ist mit der Linksmodulstruktur verträglich. Dazu betrachten wir das Radikal des $eFTe$-FT-Bimoduls eFT. Nach Korollar (4.15) ist $\mathrm{rad}({}_{eFTe}eFT_{FT}) = \mathrm{rad}({}_{eFTe}eFT) + \mathrm{rad}(eFT_{FT})$. Nach Lemma (4.8) erhalten wir die Isomorphie $\mathrm{rad}(eFT_{FT}) \cong J(eFTe)$. Folglich ist $\mathrm{rad}({}_{eFTe}eFT_{FT}) = J(eFTe)$ ein $eFTe$-$eFTe$-Bimodul. Weiter ist nach Definition $\pi(ete) = ete + \mathrm{rad}(eFT_{FT})$, was aber, wie wir gerade gezeigt haben, gleichbedeutend zu $\pi(ete) = ete + J(eFTe)$ ist. Da das Jacobsonradikal von $eFTe$ als zweiseitiges Ideal ein $eFTe$-Linksmodul ist, erhalten wir hieraus $\pi(ete) = ete(e + J(eFTe)) = ete \cdot \pi(e)$. Damit ist π ein $eFTe$-Linksmodulmorphismus und folglich auch π_{**}. ■

Aus Korollar (4.16) erhalten wir folgendes Kriterium:

(4.17) Korollar (Ein Kriterium für Erzeugung)
Es gelten die Bezeichnungen des Satzes (4.6) und es sei $\mathcal{E} \subseteq eFGe$. Dann haben wir folgendes Kriterium:
Ist $\pi_{**} : {}_{eFTe}\langle \mathcal{E} \rangle_{eFTe} \to \bigoplus \mathcal{R}^G_{T/K_\lambda,T}(S_i)e$ aufgefasst als $eFTe$-$eFTe$-Bimodulmorphismus surjektiv, so wird die kondensierte Algebra $eFGe$ als $eFTe$-$eFTe$-Bimodul von den Elementen aus $\mathcal{E}$ erzeugt, d.h. es gilt

$${}_{eFTe}\langle \mathcal{E} \rangle_{eFTe} = {}_{eFTe}eFGe_{eFTe}.$$

Beweis: Aus der Surjektivität von π_{**} folgt mit Korollar (4.16), dass für die $eFTe$-$eFTe$-Bimoduln die Gleichung ${}_{eFTe}\langle \mathcal{E} \rangle_{eFTe} + J(eFTe)eFGe = eFGe$ gilt. Nach Korollar (4.15) ist der Kern von π_{**}, nämlich $J(eFTe)eFGe$, im Radikal der Algebra $eFGe$ als $eFTe$-$eFTe$-Bimodul enthalten. Somit folgt mit dem Lemma von Nakayama, dass bereits ${}_{eFTe}\langle \mathcal{E} \rangle_{eFTe} = eFGe$ sein muss. ■

5 Ein praktisches Kriterium für Erzeugung

In diesem Abschnitt wollen wir die Grundlagen für eine mögliche rechnerische Implementation des neuen Erzeugniskriteriums aus Abschnitt 4 liefern.

Nach Korollar (4.17) gilt es, um eine Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq eFGe$ als Bimodulerzeugendensystem nachzuweisen, zu zeigen, dass das Bild von ${}_{eFTe}\langle\mathcal{E}\rangle_{eFTe}$ unter π_{**} die direkte Summe von Harish-Chandra-induzierten einfachen $F(T/K_\lambda)$-Moduln aus Satz (4.6) ist. Nach Bemerkung (4.3) stellt sich daraus die Frage, welche einfachen FT-Moduln als Summand im Radikalfaktor Y von $\Lambda{\uparrow}^T$ auftauchen.

(5.1) Lemma
Es sei V ein einfacher FT-Modul. Es ist V genau dann isomorph zu einem direkten Summanden von Y, wenn $V{\downarrow}_K$ isomorph zur $(\dim V)$-fachen direkten Summe von Λ ist.

Beweis: Da der Radikalfaktor $Y = \Lambda{\uparrow}^T / \operatorname{rad}(\Lambda{\uparrow}^T{}_{FT})$ halbeinfach ist, ist V genau dann ein direkter Summand von Y, wenn $\operatorname{Hom}_{FT}(\Lambda{\uparrow}^T, V) \neq \{0\}$ ist. Wenden wir hierauf die Frobenius-Reziprozität I.(3.9) an, so ist obige Bedingung äquivalent zu der Bedingung, dass die Homomorphismenmenge $\operatorname{Hom}_{FK}(\Lambda, V{\downarrow}_K)$ nicht nur den Nullhomomorphismus enthält. Da $V{\downarrow}_K$ halbeinfach ist, ist letzteres gleichbedeutend dazu, dass Λ ein direkter Summand von $V{\downarrow}_K$ ist. Nach Clifford (vgl. (11.1) in [7]) ist $V{\downarrow}_K$ damit eine direkte Summe zu Λ konjugierter Moduln. Da Λ aber invariant unter Konjugation mit Elementen von T ist, ist $V{\downarrow}_K$ eine direkte Summe von Moduln, die isomorph zu Λ sind und die Behauptung folgt. ∎

Schreiben wir $S|Y$ für die Menge der einfachen FT-Moduln, die direkte Summanden von Y sind, so wollen wir im Folgenden den aus Satz (4.6) stammenden Epimorphismus

$$\pi_{**} : eFGe \longrightarrow \bigoplus_{S|Y} S{\uparrow}^G e \tag{*}$$

genauer untersuchen, um die Überprüfung seiner Surjektivität im Falle einer verkleinerten Urbildmenge rechnerisch handhabbar zu machen.

(5.2) Bezeichnungen
Es sei $\mathcal{S}$ eine Menge von einfachen FT-Moduln, die aus jeder Isomorphieklasse von Moduln aus $S|Y$ genau einen Vertreter enthält. Nach Lemma (5.1) enthält $\mathcal{S}$ damit gerade die Isomorphietypen einfacher FT-Moduln, die auf FK eingeschränkt isomorph zu einer direkten Summe zu Λ isomorpher Moduln sind. Mit $\mathcal{H}(S)$ bezeichnen wir dann für ein $S \in \mathcal{S}$ die zugehörige S-homogene Komponente von Y.

Da sowohl der Induktionsfunktor als auch der Kondensationsfunktor additiv sind, können wir auf der rechten Seite von (*) die einfachen FT-Moduln zu homogenen Komponenten zusammenfassen. Wir erhalten auf diese Weise mit den getroffenen Bezeichnungsvereinbarungen als neue Bildmenge $\bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \mathcal{H}(S){\uparrow}^G e$.

(5.3) Lemma
Es gilt

$$\bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \mathcal{H}(S)\!\uparrow^G e = \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} {}_{eFTe}\langle S\!\uparrow^G e\rangle \,.$$

Beweis: Es sei $S \in \mathcal{S}$. Durch die Identifikation von $eFTe$ und $\mathrm{End}_{FT}(\Lambda\!\uparrow^T)$ operiert die Algebra $eFTe$ von links auf der homogenen Komponente $\mathcal{H}(S)$. Da diese eine direkte Summe von Kopien von S ist und für je zwei Summanden ein Endomorphismus existiert, der den einen auf den anderen abbildet, ist ${}_{eFTe}\langle S\rangle = \mathcal{H}(S)$. Ebenso operiert $eFTe$ auf $S\!\uparrow^G e = S \otimes_{FT} FGe$, sodass wir die Behauptung erhalten. ■

Zur Erzeugung von $eFGe$ als $eFTe$-$eFTe$-Bimodul muss nach Korollar (4.17) π_{**} mit Urbildmenge ${}_{eFTe}\langle\mathcal{E}\rangle_{eFTe}$ als surjektiv nachgewiesen werden. Nach Lemma (5.3) genügt es demnach zu überprüfen, dass im Bild von π_{**} die Rechtsmoduln $S\!\uparrow^G e$ für jedes $S \in \mathcal{S}$ enthalten sind. Um uns dieser Bedingungen stückweise zu versichern, betrachten wir die Projektion auf einen direkten Summanden von Y.

(5.4) Definition
Für $S \in \mathcal{S}$ sei mit $\pi_S : eFT \to S \leq Y$ der Epimorphismus von eFT auf S bezeichnet.

(5.5) Satz
Es ist π_{**} im Sinne des Kriteriums aus Korollar (4.17) genau dann surjektiv, wenn

$$\pi_{S**} : {}_{eFTe}\langle\mathcal{E}\rangle_{eFTe} \longrightarrow S\!\uparrow^G e$$

surjektiv ist für alle $S \in \mathcal{S}$. Dabei bezeichnet π_{S**} analog zu π_{**} den Homomorphismus, der durch Induktion und Kondensation aus π_S hervorgeht.

Beweis: Es sei $S \in \mathcal{S}$. Ist π surjektiv, so ist natürlich auch π_S surjektiv. Da sowohl der Induktionsfunktor als auch der Kondensationsfunktor exakt sind, folgt aus der Surjektivität von π_{**} die Surjektivität von π_{S**}. Umgekehrt folgt aus der Surjektivität von π_{S**} für ein $S \in \mathcal{S}$ nach Lemma (5.3), dass $\mathcal{H}(S)\!\uparrow^G e$ im $eFTe$-$eFTe$-Bimodulerzeugnis des Bildes von π_{S**} liegt. Ist folglich π_{S**} surjektiv für alle $S \in \mathcal{S}$, so ist π_{**} surjektiv. ■

Wir können jetzt formulieren, wie wir die Surjektivität von π_{S**} in der Praxis überprüfen wollen. Dabei ist wegen Lemma (5.1) die Gleichung $S = Se$ für alle $S \in \mathcal{S}$ erfüllt. Betrachten wir ferner den induzierten Modul $S\!\uparrow^G e = S \otimes_{FT} FGe$, so können wir den $eFTe$-Modul $S = Se$ in $S\!\uparrow^G e$ vermöge $s \mapsto s \otimes_{FT} e$ für alle $s \in S$ einbetten.

(5.6) Satz
Der $eFTe$-Rechtsmodulhomomorphismus π_{S**} ist genau dann ein Epimorphismus, wenn das volle Bild unter Rechtsmultiplikation mit Elementen von $\mathcal{C} := {}_{eFTe}\langle\mathcal{E}\rangle_{eFTe}$ der Einbettung eines beliebigen $0 \neq v \in S$ in $S\!\uparrow^G e$ der ganze induzierte Modul $S\!\uparrow^G e$ ist.

Beweis: Trivialerweise ist π_{S**} genau dann surjektiv, wenn sein Bild ganz $S\!\uparrow^G e$ ist. Um das in der Praxis zu verifizieren, genügt es, die Dimension des Bildes zu kennen.
Nach Definition von π_S gilt $\pi_{S**}(ege) = \pi_S(e) \otimes ge = \pi_S(e) \otimes e \cdot ege$, da $\pi_S(e) = \pi_S(e)e$ ist. Damit ist $\pi_{S**}(\mathcal{C}) = \pi_S(e) \otimes e \cdot \mathcal{C}$. Das Bild von $\mathcal{C}$ unter π_{S**} ist also das $\mathcal{C}$-Rechtsmodulerzeugnis

von $\pi_S(e) \otimes e \in S{\uparrow}^G e$. Wählen wir folglich $0 \neq v \in S$ ein beliebiges von Null verschiedenes Element, so ist $v \otimes e \cdot \mathcal{C} = \pi_S(e) \otimes e \cdot \mathcal{C}$, da S ein einfacher $eFTe$-Modul ist und deshalb $v \cdot eFTe = S$ gilt, es also ein $\eta \in eFTe$ gibt mit $v \cdot \eta = \pi_S(e)$. ■

Aus Satz (5.6) leiten wir nun eine Interpretation des Kriteriums (4.17) her, die auf den Homomorphismus π_{**} verzichtet und sich für eine rechnerische Implementierung eignet. Da wir letztlich an der Erzeugung von $eFGe$ als Algebra interessiert sind, wählen wir tatsächlich in den praktischen Anwendungen anstelle des von $\mathcal{E}$ erzeugten $eFTe$-$eFTe$-Bimoduls das Algebrenerzeugnis $\langle eFTe, \mathcal{E}\rangle$, was natürlich selbst wieder ein $eFTe$-$eFTe$-Bimodul ist. Dies liegt darin begründet, dass die Erzeuger der Algebra $eFTe$ ein notwendiger Teil eines jeden Erzeugendensystems sind, das mittels dieses Kriteriums gefunden wird. Wir können sie also ohne rechnerischen Mehraufwand der Menge der potentiellen Erzeuger $\mathcal{E}$ hinzuzählen. Unter dieser Voraussetzung interpretieren wir das Kriterium wie folgt:

(5.7) Korollar (Praktische Interpretation des Kriteriums)
Es sei $\mathcal{E} \subseteq eFGe$ und $\mathcal{C}$ das F-Algebrenerzeugnis $\langle eFTe, \mathcal{E}\rangle$. Für alle $S \in \mathcal{S}$ hat der von einem beliebigen $0 \neq v \in S \leq S{\uparrow}^G e$ erzeugte $\mathcal{C}$-Rechtsmodul genau dann dieselbe Dimension wie $S{\uparrow}^G e$, wenn $\mathcal{C} = eFGe$ ist.

Beweis: Erfüllt $\mathcal{E}$ die angegebene Bedingung, so ist ist nach Satz (5.6) das $eFTe$-$eFTe$-Bimodulerzeugnis von $\mathcal{C}$ die Algebra $eFGe$. Da $eFTe$ in $\mathcal{C}$ enthalten ist, folgt daraus $\mathcal{C} = eFGe$. Zur Umkehrung sei $\mathcal{C} = eFGe$ und $S \in \mathcal{S}$ beliebig. Weiter sei v ein von Null verschiedener Vektor von S eingebettet als $v \otimes_{FT} e$ in $S{\uparrow}^G e$. Es ist $v \otimes e\mathcal{C} = v \otimes e \cdot eFGe = veFTe \otimes eFGe = S \otimes eFGe = S{\uparrow}^G e$, da $Se = S$ und S einfach ist. ■

(5.8) Bemerkung
Für eine rechnerische Implementation müssen wir in der Lage sein, die Elemente in $\mathcal{E}$ und Erzeuger von $eFTe$ (die wir nach Proposition (2.8) kennen) in ihrer Darstellung auf dem induzierten Modul $S{\uparrow}^G e$ durch Anwendung der Methoden aus Abschnitt III.4 zu berechnen. Dann können wir einen Zeilenvektor, der in dieser Darstellung einem eingebetteten Basisvektor von S im Sinne von Satz (5.6) entspricht, zu einer Basis des zugehörigen $\mathcal{C}$-Rechtsmodulerzeugnisses aufspinnen. Dieser Vorgang wird gemeinhin von Eingeweihten salopp als Aufspinnen des „ersten Basisvektors“ bezeichnet. Damit diese Aussage stimmt, muss folglich die zugrunde liegende Basis der Darstellung mit den eingebetteten Basisvektoren von S beginnen.

(5.9) Bemerkung
Da wir die Darstellungen bzw. die Charaktere von FT als bekannt voraussetzen, können wir die Dimension des induzierten Moduls $S{\uparrow}^G e$ a priori mit Proposition III.(1.2) relativ leicht bestimmen.

Die algorithmische Umsetzung von Korollar (5.7) lässt sich nun wie folgt formulieren. Dabei sind die rechenzeitkritischen Schritte die Schritte 1.3 und 1.4. In 1.3 kondensieren wir einen induzierten Modul, der mitunter eine große Dimension besitzt. In 1.4 müssen wir einen Vektor mit den zuvor berechneten Matrizen aufspinnen, was ebenfalls einige Zeit in Anspruch nehmen kann.

(5.10) Algorithmus

EINGABE: $\mathcal{E} \subseteq eFGe$.

AUSGABE: „Erzeugt mit $eFTe$!“ oder „Erzeugt nicht!“.

$\boxed{1}$ Für alle $S \in \mathcal{S}$

$\boxed{1.1}$ Bestimme $d_S \leftarrow \dim S{\uparrow}^G e$.

$\boxed{1.2}$ Bestimme Matrixdarstellungen für $\mathcal{E}$ und die Erzeuger von $eFTe$ auf $S{\uparrow}^G e$.

$\boxed{1.3}$ Für ein $0 \neq v \in Se \leq F^{d_S}$ bestimme eine Basis des $\langle \mathcal{E}, eFTe \rangle$-Teilmoduls $U_S \leq F^{d_S}$ mit $v \in U_S$.

$\boxed{1.4}$ Vergleiche die Dimension von U_S mit d_S:

- Ist $d_S \neq \dim U_S$, so gib „Erzeugt nicht!“ zurück.
- Sonst nimm, falls möglich, nächstes $S \in \mathcal{S}$ und gehe zu Schritt 1.1.

$\boxed{2}$ Gib „Erzeugt mit $eFTe$!“ zurück.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Darstellung zweier Spezialfälle des neuen Kriteriums aus historischen Gründen. Sie gelten nur für das triviale Kondensationsidempotent e_1 und sind für sich genommen bereits länger bekannt.

Ist $e_\lambda = e_1$ das triviale Idempotent, so ist die Trägheitsgruppe T der vorangestellten Abschnitte gleichbedeutend mit dem Normalisator N der Kondensationsuntergruppe. Nehmen wir für N die Kondensationsuntergruppe K selbst an, so erhalten wir das Kriterium in einer Grundform, die wahrscheinlich so alt ist, wie die Kondensation selbst. Eine niedergeschriebene Fassung findet man z.B. als Satz 2.8.3 in [31].

(5.11) Korollar

Es sei $\mathcal{E} \subseteq e_1 FGe_1$ und $\langle \mathcal{E} \rangle$ das F-Algebrenerzeugnis von $\mathcal{E}$. Weiter sei $0 \neq v \in 1_K \leq 1_K^G e_1$ und $v \cdot \langle \mathcal{E} \rangle = 1_K^G e_1$. Dann ist $\langle \mathcal{E} \rangle = e_1 FGe_1$.

Beweis: Da $N = K$ ist, ist die Faktorgruppe N/K trivial und folglich enthält $\mathcal{S}$ bis auf Isomorphie nur den trivialen Modul $1_N = 1_K$. ■

Korollar (5.11) ist in den praktischen Anwendungen oft ungeeignet, um Erzeugung zu zeigen. Die Dimension des kondensierten Permutationsmoduls $1_K^G e_1$ – und damit auch die Dimension von $e_1 FGe_1$ – darf nicht sehr groß werden, um dieses Kriterium anzuwenden. Wollten wir es bei der Betrachtung der sporadischen Gruppe Fi_{22} in Kapitel V anwenden, sähen wir uns Dimensionen gegenüber, die mitunter in der Größenordnung von Milliarden liegen. Damit ist eine Verifikation der angegebenen Bedingung in diesem Fall mit heutiger Technik aussichtslos.

Eine Verbesserung von Korollar (5.12) hat Markus Wiegelmann im Rahmen seiner Diplomarbeit gefunden. Hier müssen wir N so wählen, dass die Faktorgruppe N/K eine p-Gruppe ist. In diesem Fall reduziert sich die Anzahl der Isomorphietypen irreduzibler $F(N/K)$-Moduln auf den trivialen Modul $1_{N/K}$ und folglich enthält $\mathcal{S}$ wieder nur den trivialen Modul 1_N.

(5.12) Korollar (Satz 2.4.5 in [39])
Es sei N/K eine p-Gruppe, $\mathcal{E} \subseteq e_1FGe_1$ und $\langle\mathcal{E}\rangle$ das F-Algebrenerzeugnis von $\mathcal{E}$. Weiter sei $0 \neq v \in 1_N \leq 1_N^G e_1$ und $v \cdot \langle\mathcal{E}, e_1FNe_1\rangle = 1_N^G e_1$. Dann ist $\langle e_1FNe_1, \mathcal{E}\rangle$ die Algebra e_1FGe_1.

Beweis: Da (N/K) eine p-Gruppe ist, existiert genau ein einfacher $F(N/K)$-Modul, nämlich der triviale Modul $1_{N/K}$. Damit ist $\mathcal{S} = \{1_N\}$. ■

(5.13) Bemerkung
In der Originalarbeit von Markus Wiegelmann wird zur Überprüfung der Bedingung des Kriteriums aus Korollar (5.12) der Testvektor $v \in 1_N \leq 1_N^G e$ nur mit der von $\mathcal{E}$ erzeugten Algebra aufgesponnen. Dies entspricht der Version unseres Kriteriums aus Satz (5.6), wenn man als Erzeugermenge das Algebrenerzeugnis der ausgewählten Algebraelemente zulässt. Auf das Bimodulerzeugnis von $\langle\mathcal{E}\rangle$ kann in diesem Fall verzichtet werden, da 1_N ein trivialer $eFNe$-$eFNe$-Bimodul ist. Da auf diese Weise nur überprüft wird, ob die Algebra als Bimodul erzeugt wird, besteht in diesem Falle folglich die Möglichkeit, dass $\mathcal{E}$ zusammen mit $eFNe$ nicht als ein F-Algebrenerzeugendensystem erkannt wird, obwohl $\langle eFNe, \mathcal{E}\rangle = eFGe$ ist, da $\langle\mathcal{E}\rangle$ eventuell $eFGe$ nicht als $eFNe$-$eFNe$-Bimodul erzeugt. Der hier vorgestellten Version sollte in der Praxis folglich der Vorzug gegeben werden.

6 Bemerkung

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir für die beiden vorgestellten Kriterien ihre Anwendbarkeit kommentieren.

Betrachten wir zunächst die Methode der trägen Erzeugendensysteme. Hat man hier einmal eine Kondensationsuntergruppe K und eines ihrer linearen Idempotente e gewählt, so steht und fällt die Erzeugung der kondensierten Algebra mit trägen Erzeugendensystemen mit der Anzahl der T-T-Doppelnebenklassen der Trägheitsgruppe T des zugehörigen linearen Charakters in G. Bei der Wahl der Kondensationsuntergruppe K und des linearen Charakters λ müssen wir folglich auch beachten, dass der Index $[G : T]$ nicht zu groß wird. Ist er nämlich zu groß, so kann schnell die Anzahl $|T\backslash G/T|$ in die Höhe schießen. Hat man eine mögliche Kondensationsuntergruppe und ihren Normalisator ins Auge gefasst, so kann man die Größe des garantierten Erzeugendensystems mit Hilfe der Norm des zugehörigen Permutationscharakters, also $\left\langle 1_T^G, 1_T^G \right\rangle$ abschätzen. In der Praxis wird man die Algebra $eFTe$ meist mit zwei bis drei Elementen erzeugen können, sodass die Größe des Erzeugendensystem der Größenordnung obiger Norm entspricht.

Ist G eine sporadische Gruppe, so kennen wir, dem ATLAS [6] sei Dank, die Struktur ihrer maximalen Untergruppen. Besitzt eine maximale Untergruppe einen Normalteiler, dessen Ordnung nicht durch die Charakteristik des Körpers F geteilt wird, so ist dieser Normalteiler ein guter Kandidat für eine Kondensationsuntergruppe. Für eine Kondensation mit trivialem Idempotent sind Normalteiler der maximalen Untergruppen die beste Wahl, da in diesem Falle T die maximale Untergruppe selbst ist und $|T\backslash G/T|$ damit möglichst klein wird.

Ist die Anzahl der T-T-Doppelnebenklassen trotzdem zu groß, so können wir in Zusammenarbeit mit der Nadel-im-Heuhaufen-Methode aus Algorithmus (3.11) versuchen, einige der möglichen Erzeuger – ohne vorherige Kondensation – als redundant nachzuweisen. Da wir zu diesem Zweck die Information über die Zerlegung von Produkten der kondensierten Algebra in eine Basis absichtlich reduzieren, kann diese Rechnung nicht ein in allen Fällen befriedigendes Ergebnis liefern. Ein minimales Erzeugendensystem wird man auf diesem Wege wohl nur in den seltensten Fällen erhalten.

Dennoch vermögen handhabbare träge Erzeugendensysteme Probleme lösbar zu machen, die vorher nicht, oder nur unter großem Aufwand gelöst werden konnten. Ein Zeugnis dieser Tatsache ist die vorliegende Arbeit, in der wir uns der Erzeugung der kondensierten Algebra in Kapitel V ausschließlich über diese Erzeugendensysteme versichern. Als ein weiteres Beispiel sei an dieser Stelle auf die Arbeit [16] verwiesen, in welcher die 2-modulare Charaktertafel von Fi_{23} bestimmt wird.

Im Gegensatz zu trägen Erzeugendensystemen liefert das Erzeugniskriterium aus Korollar (5.7) keine großen Erzeugendensysteme. Da die kondensierte Algebra in der Regel von zwei Elementen erzeugt sein wird, können wir hier recht kleine Erzeugendensysteme erwarten, deren Kardinalität nur in Ausnahmefällen größer als Sechs sein wird. Hier liegt die Schwierigkeit darin, das Kriterium rechnerisch umzusetzen. Der Realisierung hinderlich sind in diesem Fall die Dimensionen der kondensierten induzierten einfachen FT-Moduln aus $\mathcal{S}$. Wir müssen für jeden Isomorphietyp zeigen, dass das Modulerzeugnis eines Testvektors der ganze kondensierte Modul ist. In der praktischen Umsetzung müssen wir dazu diesen Vektor mit Matrixdarstellungen auf dem kondensierten Induzierten aufspinnen. Die Dimension n eines kondensierten Induzierten geht also in zweifacher Hinsicht ein: Zum einen müssen wir mit entsprechend großen $(n \times n)$-Matrizen rechnen können und zum anderen muss der n-dimensionale Modul in erlebbarer Zeit aufspinnbar sein.

Die Dimensionen der kondensierten Induzierten resultieren aus den Dimensionen der einfachen FT-Moduln, die der Bedingung aus Lemma (5.1) genügen, und aus dem Index von T in G. Somit befinden wir uns oft zwischen zwei Übeln: Ist der Index von K in T klein, so enthält $\mathcal{S}$ einfache Moduln von kleiner Dimension. Dafür ist aber meist der Index von T in G groß. Umgekehrt resultiert aus kleinem $[G : T]$ eine große Faktorgruppe $F(T/K_\lambda)$, die je nach ihrer Struktur wiederum große einfache Moduln haben kann, deren Inflationierte der Bedingung aus Lemma (5.1) genügen.

Eine sehr gute Anwendbarkeit dieses Kriteriums liegt folglich bei kleinem Index von T in G und einer resultierenden Faktorgruppenalgebra, deren sämtliche Darstellungen sehr niedrigdimensional, z.B. 1-dimensional, sind, vor.

Im Falle der vorliegenden Arbeit ist dieses Kriterium in der praktischen Anwendung daher schlecht geeignet. Bei der Behandlung der sporadischen Gruppe Fi_{22} in Kapitel V lägen die Dimensionen der kondensierten Induzierten jenseits des derzeit Möglichen. Wir benutzen daher stets träge Erzeugendensysteme, die wir, falls sie zu groß für eine direkte Behandlung mit der MeatAxe sind, durch Satz (3.8) zu verkleinern versuchen.

In Fällen, in denen ein träges Erzeugendensystem auch nach erfolgter Reduktion durch die Nadel-im-Heuhaufen-Methode zu groß für eine direkte Behandlung ist, was z.B. in Abschnitt

V.3 bei der Bestimmung der 2-modularen Charaktere von $3.\mathrm{Fi}_{22}$ passiert, benutzen wir für konkrete Rechnungen mit der MEATAXE nur eine geeignete Teilmenge der Erzeuger. Wir wissen natürlich in diesem Fall nicht, ob die betrachteten Moduln genuin sind. Um trotzdem sicher zu stellen, dass alle in der Zerlegung auftretenden Moduln genuin sind, nutzen wir unsere Kenntnis eines Erzeugendensystems in folgender Weise:

(6.1) Proposition
Es sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem der Algebra $eFGe$ und $E \subseteq \mathcal{E}$ eine Teilmenge und $\mathcal{C} := \langle E \rangle$ die zugehörige Algebra. Weiter sei V ein $eFGe$-Modul und $\mathcal{B}$ eine an eine Kompositionsreihe von $V{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ angepasste Basis. Ist $\delta_{\mathcal{B}}(\eta)$ für alle $\eta \in \mathcal{E}$ eine Block-Unteredreiecksmatrix, deren Blöcke in Abfolge und Größe den Dimensionen der Kompositionsfaktoren von $V{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ entsprechen, so sind alle Moduln der Kompositionsreihe und damit auch die Kompositionsfaktoren genuin.

Beweis: Aus der Struktur der Matrixdarstellungen der Erzeuger von $eFGe$ folgt, dass alle Moduln der Kompositionsreihe und damit auch die Kompositionsfaktoren des $\mathcal{C}$-Moduls $V{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ invariant unter der Operation von $eFGe$ sind. Damit sind sie definitionsgemäß genuin. ■

Dank des Satzes von Jordan-Hölder entsprechen damit die einfachen Moduln samt ihren Vielfachheiten aus der Zerlegung des auf die Unteralgebra eingeschränkten Moduls $V{\downarrow_{\mathcal{C}}}$ den einfachen Moduln samt ihren Vielfachheiten aus der Zerlegung des $eFGe$-Moduls V.

Kapitel V

Die 2- und 3-modularen Charaktere von Fi_{22} und verwandten Gruppen

Ziel des modularen Atlas-Projektes ist es, in Analogie zum ATLAS [6] die einfachen modularen Charaktere der sporadischen Gruppen und einiger ihrer bizyklischen Erweiterungen zu bestimmen. Dabei betrachtet man die bizyklischen Erweiterungen, die durch Erweitern der Gruppe mit einer Untergruppe des Schurmultiplikators nach unten und einer Untergruppe der äußeren Automorphismengruppe nach oben entstehen. Für die sporadische Gruppe Fi_{22} ist dieses Problem in den Charakteristiken 2 und 3 lange Zeit offen gewesen, sodass es nur sehr unvollständige Charaktertafeln und Vermutungen bezüglich einiger Charaktere gab. In diesem Kapitel bestimmen wir nun alle ihre 2- und 3-modularen Charaktere und schließen damit die Klassifikation der einfachen modularen Darstellungen für diese Gruppe ab.

Die Gruppe Fi_{22} hat die Ordnung 64 561 751 654 400 und ist damit die zehntgrößte sporadische Gruppe. Ihr Schurmultiplikator ist zyklisch von Ordnung 6 und sie besitzt einen involutiven äußeren Automorphismus α. Diese Gruppe ist eine der drei Fischer-Gruppen Fi_{22}, Fi_{23} und Fi_{24}', die von Bernd Fischer im Rahmen der Klassifikation aller 3-Transpositionsgruppen (man vgl. [8]) 1971 entdeckt wurden. Eine 3-Transpositionsgruppe ist dabei eine endliche Gruppe, die eine Konjugiertenklasse C von Involutionen besitzt, welche die Gruppe erzeugt und die weitere Bedingung erfüllt, dass das Produkt zweier Involutionen aus C höchstens von Ordnung 3 ist.

Um die modularen Charaktere der anfänglich genannten Gruppen zu bestimmen, die wir zu Fi_{22} verwandt nennen, verwenden wir die in Kapitel III vorgestellten Kondensationsmethoden. Der dabei verfolgte Ansatz, modulare Tafeln durch Kondensation und Zerlegung geeigneter Moduln zu bestimmen, kann mittlerweile als Standard bezeichnet werden. Neu an unserem Vorgehen in dieser Arbeit ist neben der Verwendung von nicht-trivialen Idempotenten, dass wir durch die Ergebnisse aus Kapitel IV ein Erzeugendensystem der kondensierten Algebra angeben können. Auf diese Weise müssen wir die Genuinität der Kompositionsfaktoren der kondensierten Moduln nicht mehr überprüfen und können folglich aus der Zerlegung dieser Moduln unmittelbar auf die Zerlegung der ursprünglichen Moduln schließen. Dies erlaubt uns, die Beweise wesentlich zu vereinfachen, denn *„[s]olch ein Nachweis ist meistens der schwierigste Teil eines Beweises“* (C. Jansen in [20], Seite 31).

Unsere Aufgabe selbst, zu jeder zu Fi_{22} verwandten Gruppe die 2- und 3- modularen Charaktere zu bestimmen, können wir ebenfalls vereinfachen: Im Falle der zyklischen Überlagerungen von Fi_{22} genügt es, die 2-modularen Charaktere von $3.\mathrm{Fi}_{22}$ und die 3-modularen Charaktere von $2.\mathrm{Fi}_{22}$ zu bestimmen. Denn fassen wir die einfachen Brauercharaktere in Abhängigkeit von der Charakteristik als $2'$- bzw. $3'$-Klassenfunktionen auf, so ist ersichtlich, dass die einfachen Brauercharaktere aller betrachteten zyklischen Erweiterungen nach unten von Fi_{22} in Charakteristik 2 bereits durch die einfachen Brauercharaktere von $3.G$ und in Charakteristik 3 bereits durch die einfachen Brauercharakter von $2.G$ gegeben sind. Für die zyklischen Erweiterungen nach unten der Automorphismengruppe $\mathrm{Fi}_{22}.2$ genügen mit derselben Begründung in Charakteristik 3 die einfachen Brauercharaktere von $2.\mathrm{Fi}_{22}.2$. In Charakteristik 2 entfallen die äußeren Klassen, sodass hier unter Berücksichtigung eventuell fusionierender Klassen und Charaktere auf die Brauercharaktere von $3.\mathrm{Fi}_{22}$ zurückgegriffen wird und eine separate Bestimmung von Charakteren entfällt. Abschließend geben wir die Zerlegungsmatrizen der sechsfachen Überlagerung von Fi_{22} und $\mathrm{Fi}_{22}.2$ an. Da in ihren gewöhnlichen Charakteren alle gewöhnlichen Charaktere der zwei- und dreifachen Überlagerungen durch Inflation enthalten sind, umfassen diese Matrizen auch die Zerlegungsmatrizen dieser Überlagerungen als Untermatrizen. Somit sind dann die Zerlegungsmatrizen aller zu Fi_{22} verwandten Gruppen bekannt.

Zur Bestimmung der einfachen Brauercharaktere der zwei- und dreifachen Überlagerungen von Fi_{22} und $\mathrm{Fi}_{22}.2$ in Charakteristik 2 und 3 gehen wir blockweise vor. Wir geben dazu zu Beginn eines Abschnitts die Invarianten $d(B)$, $k(B)$ und $\ell(B)$ jedes Blocks B an. Den üblichen Konventionen folgend, bezeichnen wir damit in dieser Reihenfolge den Defekt, die Anzahl der gewöhnlichen Charaktere und die Anzahl der Brauercharaktere des Blocks B.

Die vorkommenden Moduln, Darstellungen und Charaktere bezeichnen wir außer in Zerlegungsmatrizen in MEATAXE-Konvention, d.h. mit ihrer Dimension bzw. ihrem Grad und einem zusätzlichen Buchstaben. Wenn wir einen gewöhnlichen Charakter anhand einer Platznummer bezeichnen, so entspricht diese Bezeichnung der Nummerierung der Charaktere der gewöhnlichen Charaktertafel, die durch ihre Reihenfolge in der GAP-Bibliothek [4] gegeben ist. Ebenso richtet sich die Bezeichnung eines Charakters einer Tafel, die in GAP verfügbar ist, in ATLAS-Konvention nach der durch die Tafel gegebenen Reihenfolge, d.h. $200a$, $200b$ und $200c$ bezeichnen in dieser Reihenfolge den ersten, zweiten und dritten Charakter vom Grad 200. Ein gewöhnlicher Charakter, der auf die p-regulären Klassen eingeschränkt ist, erhält zusätzlich ein „ ˆ “. Die sporadische Gruppe Fi_{22} werden wir im Folgenden abkürzend mit G bezeichnen.

Wir werden einige Brauercharaktere der zu Fi_{22} verwandten Gruppen konstruieren, indem wir geeignete Charaktere auf zwei ihrer maximalen Untergruppen einschränken, um Werte für den jeweils zu konstruierenden Charakter zu erhalten. Dabei sehen wir uns mit der Subtilität konfrontiert, dass die sporadische Gruppe Fi_{22} zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu $O_7(3)$ besitzt. Die Elemente der einen Konjugiertenklasse sind unter dem äußeren Automorphismus α von Fi_{22} zu den Untergruppen der anderen Klasse konjugiert. Sind O und O^α Repräsentanten aus beiden Konjugiertenklassen, so besitzen sie zwar dieselbe gewöhnliche Charaktertafel, unterscheiden sich aber in der Art, wie ihre Konjugiertenklassen in die Klassen von Fi_{22} fusionieren. Wir werden deshalb im Folgenden die Auswirkung der gewählten Fusion beachten, wenn wir aus Charakteren dieser maximalen Untergruppen Charaktere für die betrachtete

Fischer-Gruppe gewinnen.

Im Falle von Darstellungen vereinbaren wir, dass wir sie stets auf die zu $O_7(3)$ verwandte maximale Untergruppe einschränken, die im WWW-ATLAS [40] für alle betrachteten Verwandtschaften durch die beiden Standarderzeuger a und $(ababb)^{-5}(abb)^3(ababb)^5$ festgelegt ist, wobei a und b die Standarderzeuger der jeweiligen zu Fi_{22} verwandten Gruppe sind. Für eine genaue Definition von Standarderzeugern sei auf [41] verwiesen.

Abschließend wollen wir noch bemerken, dass es zwei isokline nicht-isomorphe bizyklische Erweiterungen der Form $2.\mathrm{Fi}_{22}.2$ gibt. Für unsere Berechnungen ist es aber nicht relevant, welche der zugehörigen gewöhnlichen Charaktertafeln wir auswählen. Betrachten wir im Folgenden eine gewöhnliche Tafel von $2.\mathrm{Fi}_{22}.2$, so ist es die aus der Charaktertafelbibliothek [4] von GAP.

1 $2.\mathrm{Fi}_{22}$ in Charakteristik 3

Die 114 gewöhnlichen Charaktere von $2.G$ liegen in fünf Blöcken. Deren Invarianten sind:

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	9	58	22
2	1	3	2
3	1	3	2
4	0	1	1
5	9	49	18

Da es sich bei den Blöcken 2 und 3 um Blöcke von zyklischem Defekt handelt, sind die Zerlegungsmatrizen bereits bekannt und in Abschnitt 6.17 von [14] veröffentlicht. Wir geben sie hier der Vollständigkeit halber an, wobei wir die Charaktere mit ihren eindeutigen Graden bezeichnen:

360 855	1	.
577 368	.	1
938 223	1	1

852 930	1	.
1 876 446	.	1
2 729 376	1	1

Der Charakter vom Grad 1 791 153 ist ein Defekt-0-Charakter. Wir müssen folglich noch die Zerlegungsmatrizen des Hauptblocks, der die inflationierten gewöhnlichen Charaktere der einfachen Gruppe enthält, und des fünften Blocks, der alle treuen gewöhnlichen Charaktere enthält, bestimmen.

Durch Betrachtung der gewöhnlichen Charaktertafel von $2.G.2$ sehen wir, dass 26 Paare von Charakteren beim Übergang von $2.G$ zu $2.G.2$ fusionieren. Nach Brauers Permutationslemma (vgl. (11.9) in [7]) vertauscht der Lift des äußeren Automorphismus α auf $2.G$, den wir ebenfalls mit α bezeichnen, folglich 26 Paare von Konjugiertenklassen von $2.G$. Eine Betrachtung der Gruppe der Tafelautomorphismen von $2.G$ liefert dann, dass durch den äußeren Automorphismus in jedem Paar der $3'$-Klassen $(2B, 2C)$, $(4B, 4C)$, $(8D, 8E)$, $(10B, 10C)$, $(11A, 11B)$, $(22A, 22B)$, $(13A, 13B)$, $(26A, 26B)$, $(14B, 14C)$, $(16A, 16B)$, $(20A, 20B)$, sowie $(22C, 22F)$ und $(22D, 22E)$ die jeweiligen Klassen vertauscht werden.

i	$\chi_i(1)$	i	$\chi_i(1)$
1	1	16	50050
2	78	18	75075
3	429	19	75075
4	1001	22	138600
6	3003	24	150150
7	3080	33	400400
8	10725	34	400400
9	13650	35	450450
11	32032	40	582400
12	43680	41	582400
13	45045	51	982800

Tabelle V.1: Basic-Set des 3-Hauptblocks von 2.Fi$_{22}$

Beschränken wir unsere Betrachtungen auf die einfache Gruppe G, so sehen wir anhand der fusionierenden Charaktere von G und aus der zugehörigen Tafelautomorphismengruppe in analoger Weise, dass α im Falle der einfachen Gruppe die $3'$-Klassenpaare $(11A, 11B)$, $(13A, 13B)$, $(16A, 16B)$ und $(22A, 22B)$ tauscht. Da alle Brauercharaktere außerhalb des Hauptblocks und des treuen Blocks invariant unter dem äußeren Automorphismus sind, folgt mit Brauers Permutationslemma, dass es vier Paare von konjugierten einfachen Brauercharakteren im Hauptblock und neun Paare von konjugierten einfachen Brauercharakteren im treuen Block gibt.

Eine Betrachtung der bei den eingeschränkten gewöhnlichen Charakteren auftretenden Irrationalitäten liefert, dass die Brauercharaktere von $2.G$ ihre Werte in der algebraischen Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(b11, b13, i2)/\mathbb{Q}$ annehmen. Bei den Bezeichnungen der Irrationalitäten folgen wir hier der ATLAS-Konvention, wodurch $b11 := (-1+\sqrt{-11})/2$, $b13 := (-1+\sqrt{13})/2$ und $i2 := \sqrt{-2}$ festgelegt sind. Die Minimalpolynome der zu $\mathbb{Q}$ adjungierten Elemente sind X^2+X+3, X^2+X-3 und X^2+2. Bei 3-modularer Reduktion sind sie reduzibel über $\mathbb{F}_3$. Damit wählen wir nach Abschnitt I.5 von [22] durch $\mathbb{F}_3$ einen Zerfällungskörper für $2.G$ in Charakteristik 3.

1.1 Der Hauptblock zum Ersten

Der Hauptblock enthält 22 einfache Brauercharaktere. Als Basic-Set wählen wir die in Tabelle V.1 angegebenen, auf die $3'$-Klassen eingeschränkten, gewöhnlichen Charaktere.
Ausgangspunkt unserer Herleitung aller Brauercharaktere dieses Blocks ist die einfache 77-dimensionale Darstellung über $\mathbb{F}_3$, die im WWW-ATLAS [40] verfügbar ist. Sie wird hier im Folgenden mit $77a$ bezeichnet. Um weitere, kleine, einfache Darstellungen zu erhalten, zerlegen wir das Tensorprodukt $77a \otimes 77a$ mit der MeatAxe und erhalten als Kompositionsfaktoren

$$1a, 351a, 2\,926a, 2\,651a.$$

Wir betrachten den Permutationscharakter 1_U^G auf den Nebenklassen der ersten maximalen Untergruppe $U := 2.U_6(2)$ von G. Seine Zerlegung ins Basic-Set ergibt $1_U^G = 1a + 429\hat{a} + 3\,080\hat{a}$.

Zerlegen wir den zugehörigen Permutationsmodul mit der MEATAXE, so erhalten wir die Kompositionsfaktoren

$$1a,\, 1a,\, 1a,\, 77a,\, 77a,\, 351a,\, 351a,\, 2\,651a.$$

Aus Dimensionsgründen gilt damit $3\,080\hat{a} = 1a + 77a + 351a + 2\,651a$ und $429\hat{a} = 1a + 77a + 351a$. Wir können daraus auf die Zerlegung des Brauercharakters $2\,651a$ im Basic-Set schließen. Es ist $2\,651a = 3\,080\hat{a} - 429\hat{a}$ und wir ersetzen den Charakter $3\,080\hat{a}$ des Basic-Sets durch den einfachen Charakter $2\,651a$.

Um den Brauercharakter zur Darstellung $77a$ zu erhalten, berechnen wir mit Hilfe der in [40] angegebenen Vertreter der maximalen zyklischen Untergruppen von G den Charakter explizit in GAP. Die dazu benötigten Worte für die Konjugiertenklassenvertreter beschaffen wir uns durch geeignetes Potenzieren gemäß den Potenzabbildungen der gewöhnlichen Tafel von G. Bei Konjugiertenklassen, deren Elemente dieselbe zyklische Untergruppe erzeugen, können wir nicht wissen, in welcher Klasse ein auf diese Weise konstruiertes Element aus deren Vereinigung liegt. Wir nennen diese Klassen auch algebraisch konjugiert, da die Charakterwerte auf diesen Klassen unter einem Galois-Automorphismus des oben angegebenen rationalen Zahlkörpers konjugiert sind. In diesem Fall ist dieses Problem aber nicht von Belang, da der berechnete Charakter auf algebraisch konjugierten Klassen rationale Werte annimmt.
Zerlegen wir den Charakter $77a$ im Basic-Set, so erhalten wir $77a = 78\hat{a} - 1a$ und damit können wir unter Benutzung obiger Zerlegung von $429\hat{a}$ den einfachen Charakter $351a = 429\hat{a} - 78\hat{a}$ bestimmen. Wir ersetzen den zweiten bzw. dritten Charakter des Basic-Sets durch $77a$ bzw. $351a$.

In Analogie zur 77-dimensionalen Darstellung ermitteln wir den Charakter zur 924-dimensionalen $\mathbb{F}_3$-Darstellung, die ebenfalls in [40] erhältlich ist, indem wir den Wert des Brauercharakters auf Konjugiertenklassenvertretern bestimmen. Auch in diesem Fall nimmt der Charakter auf algebraisch konjugierten Klassen rationale Werte an. Der so gefundene Charakter $924a = 1001\hat{a} - 77a$ ersetzt den vierten Charakter des Basic-Sets.

Mit dem vorliegenden Charakter zur Darstellung vom Grad 77 können wir das Tensorprodukt $77a \otimes 77a$ im aktuellen Basic-Set zerlegen. Es ergibt sich $77a \otimes 77a = 1a - 77a + 351a + 2\,651a + 3\,003\hat{a}$. Vergleichen wir dies mit dem Ergebnis der MEATAXE-Rechnung, so ergibt sich der Charakter $2\,926a$ durch Subtraktion von $77a$ von $3\,003\hat{a}$. Dieser einfache Charakter ersetzt dementsprechend den Charakter $3\,003\hat{a}$ des aktuellen Basic-Sets.

Die nun vorliegenden einfachen Darstellungen und ihre zugehörigen Charaktere erlauben es uns, den treuen Block zu behandeln. Da wir später Information über die treuen einfachen Brauercharaktere nutzen wollen, um die Bestimmung derselben für den Hauptblock zu beenden, betrachten wir als nächstes den treuen Block.

1.2 Der treue Block

Auf den treuen 3-Block entfallen 18 einfache Brauercharaktere. Nach unseren anfänglichen Überlegungen kommen in diesem Block ebenfalls neun Paare konjugierter Charaktere vor. Also sind alle 18 Charaktere in diesen neun Paaren enthalten. Da wir die Operation des äußeren Automorphismus α auf den Konjugiertenklassen von $2.G$ explizit angeben können, genügt es im Folgenden, aus jedem Paar nur einen Brauercharakter zu kennen, um den anderen ebenfalls sofort angeben zu können.

Als Kondensationsuntergruppe K wählen wir den elementar-abelschen 2-Normalteiler der Ordnung 2 048 in der fünften maximalen Untergruppe $N := 2^{11}$:M$_{22}$ von $2.G$. Bezeichnen a und b die Standarderzeuger von $2.G$, so wird N von den beiden Elementen $m_1 := bab^2ab^7$ und $m_2 := ab^{-4}ab^4$ erzeugt. Die vier Elemente $s_1 := m_1^5 m_2 m_1^{-5}$, $s_2 := m_1 m_2 m_1^3 m_2 m_1^{-3} m_2^{-1} m_1^{-1}$, $s_3 := m_1^7$ und $s_4 := m_1(m_1m_2)^2 m_1(m_1m_2)m_1^{-1}(m_2m_1)^{-2}m_1^{-2}$ erzeugen ihrerseits eine 2-Sylowgruppe von N und mit ihnen können wir die elf Erzeuger von K wie folgt angeben.

		λ
k_1	s_3	-1
k_2	$s_1s_3s_1^{-1}$	-1
k_3	$s_2s_3s_2^{-1}$	-1
k_4	$s_4s_3s_4^{-1}$	-1
k_5	$s_1s_2s_3s_2^{-1}s_1^{-1}$	-1
k_6	$s_2s_1s_3s_1^{-1}s_2^{-1}$	-1
k_7	$s_2s_4s_3s_4^{-1}s_2^{-1}$	1
k_8	$s_4s_2s_3s_2^{-1}s_4^{-1}$	-1
k_9	$s_1s_2s_1s_3s_1^{-1}s_2^{-1}s_1^{-1}$	-1
k_{10}	$s_1s_4s_2s_3s_2^{-1}s_4^{-1}s_1^{-1}$	1
k_{11}	$s_2s_1s_2s_3s_2^{-1}s_1^{-1}s_2^{-1}$	-1

Zur Kondensation verwenden wir das lineare Idempotent zu einem linearen Charakter λ von K. Dabei legen wir λ durch die Angabe der Werte, die er auf den gewählten elf Erzeugern von K annimmt, fest. Diese Festlegung ist der letzten Spalte obiger Tabelle zu entnehmen.

Erzeuger für die Trägheitsgruppe T von λ als Worte in den Erzeugern von N sind die beiden Elemente $t_1 = m_2m_1m_2m_1m_2m_1^{-1}m_2^{-1}m_1^{-2}m_2^{-1}$ und $t_2 = m_1^2m_2m_1m_2m_1m_2^{-1}$. Eine Berechnung der T-T-Doppelnebenklassenvertreter liefert 92 Elemente. Wir können durch Korollar IV.(2.5) 25 davon aussortieren, die zu Null kondensieren. Durch Algorithmus IV.(3.11) können wir die verbleibenden 67 Elemente mit geringem Aufwand auf eine Menge von 40 Doppelnebenklassenvertretern, die zur Erzeugung der kondensierten Algebra ausreichen, reduzieren. Zusammen mit den zwei Erzeugern der Trägheitsgruppe erhalten wir somit ein Erzeugendensystem der kondensierten Algebra $e_\lambda FGe_\lambda$, das aus 41 Elementen besteht. Die 1 als Doppelnebenklassenvertreter kondensiert zu e_λ und dieses Element ist bereits in der Teilalgebra $e_\lambda FTe_\lambda$ enthalten, die nach Proposition IV.(2.8) von den beiden kondensierten Erzeugern der Trägheitsgruppe erzeugt wird.

Als Basic-Set für den treuen Block wählen wir die in Tabelle V.2 aufgeführten eingeschränkten gewöhnlichen Charaktere.
Unser erstes Ziel ist es, die treuen Charaktere von minimalem Grad zu bestimmen. Der auf die $3'$-Klassen eingeschränkte Charakter $352\hat{a}$ von $2.G$ ist invariant unter dem äußeren Automorphismus α. Folglich kommen aus jedem Paar der treuen, konjugierten, einfachen Brauercharaktere beide mit derselben Vielfachheit in $352\hat{a}$ vor. Nach [21] ist der Grad der kleinsten, treuen

i	$\chi_i(1)$	i	$\chi_i(1)$
66	352	78	105 600
67	2 080	82	146 432
68	2 080	83	146 432
69	5 824	85	235 872
70	5 824	87	320 320
71	5 824	88	320 320
72	5 824	105	1 663 200
76	48 048	106	1 663 200
77	48 048	107	2 196 480

Tabelle V.2: Das Basic-Set des treuen 3-Blocks von $2.Fi_{22}$

Darstellung von $2.G$ genau 176. Damit zerfällt $352\hat{a}$ in zwei konjugierte Charaktere von diesem Grad.
Wir wollen nun zur Darstellung $176a$ einen Charakter ψ konstruieren. Dazu schränken wir die Darstellung $176a$ auf die zweite maximale Untergruppe $2.O := 2 \times O_7(3)$ ein und zerlegen den zugehörigen Modul mit der MeatAxe. Auf diese Weise sehen wir, dass $176a{\downarrow_{2.O}}$ zwei Kompositionsfaktoren der Dimension 1, zwei der Dimension 21 und einen der Dimension 132 besitzt. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Zerlegung

$$352\hat{a}{\downarrow_{2.O}} = 3 \cdot 1b + 2 \cdot 7b + 2 \cdot 21b + 35b + 2 \cdot 63b + 132b$$

in irreduzible Brauercharaktere, die unabhängig von der gewählten Fusion ist, so erfüllt die Einschränkung von ψ die Relation $\psi{\downarrow_{2.O}} = 2 \cdot 1b + 2 \cdot 21b + 132b$. Aus der Einschränkung von $352\hat{a}$ auf die erste maximale Untergruppe $2.U$ erhalten wir die Zerlegung

$$352\hat{a}{\downarrow_{2.U}} = 56b + 120b + 56c + 120c,$$

die eindeutig bis auf die Identifikation des Zentrums von $2.G$ in $2.U$ ist. Durch $\psi{\downarrow_{2.O}}$ sind bereits so viele Charakterwerte festgelegt, dass $\psi{\downarrow_{2.U}} = 120b + 56c$ folgt. Aus beiden Einschränkungen liegt ψ bis auf die Klassen $16A$-B von $2.G$ fest. Da diese nicht aufspaltend sind, muss ψ auf ihnen als treuer Charakter den Wert 0 annehmen und damit ist ψ auf allen $3'$-Klassen von $2.G$ definiert.

Der durch diese Einschränkungen festgelegte Charakter ψ von $2.G$ hängt von der gewählten Fusion der Konjugiertenklassen der Untergruppe $2.O$ nach $2.G$ ab. Denn nach Wahl der Fusion ist ψ oder ψ^α der Charakter zur Darstellung $176a$. Wir können aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit ψ der Darstellung $176a$ zurechnen, da sich ψ und ψ^α nur auf den Klassen $13A$-B unterscheiden. Die Zuweisung von ψ zu $176a$ ist gleichbedeutend damit, die Klasse $13A$ so festzulegen, dass auf ihr der Brauercharakter zur Darstellung $176a$ den Wert $-b13$ annimmt.

Wir nehmen $176a$ an erster Stelle in das Basic-Set auf, indem wir den vorhandenen Charakter ersetzen, und fügen $176b := 176a^\alpha$ an zweiter Stelle ein. Zusätzlich entfernen wir den letzten Charakter aus dem Basic-Set.

Dann liefert eine Zerlegung von $77a \otimes 176a$ im aktuellen Basic-Set die Summe $77a \otimes 176a = -176a + 2\,080\hat{b} + 5\,824\hat{b} + 5\,824\hat{c}$ von Charakteren. Zerlegen wir das zugehörige Tensorprodukt der Darstellungen mit der MEATAXE, so enthält der Modul drei isomorphe 176-dimensionale, einen 1728-dimensionalen und zwei nicht-isomorphe 5648-dimensionale Kompositionsfaktoren. Ein Isomorphietest mit der MEATAXE zeigt, dass es sich bei den drei isomorphen 176-dimensionalen Kompositionsfaktoren jeweils um den Modul $176b$ handelt. Damit folgt aus Dimensionsgründen, dass $2\,080\hat{b} - 176a - 176b$, sowie $5\,824\hat{b} - 176b$ und $5\,824\hat{c} - 176b$ einfache Brauercharaktere sind. Wir bezeichnen sie in Anlehnung an den Basic-Set-Charakter, in dem sie jeweils enthalten sind, mit $1\,728b$, $5\,648b$ und $5\,648c$. Durch eine Anwendung des äußeren Automorphismus α erhalten wir hieraus unmittelbar die einfachen Charaktere $1\,728a$, $5\,648a$ und $5\,648d$.

Berechnen wir die Dimension der kondensierten, einfachen Moduln, die zu den acht nun bekannten einfachen Charakteren gehören, mit Proposition III.(1.2), so erhalten wir:

Name	$\dim Ve_\lambda$
$176a$	0
$176b$	1
$1\,728a$	0
$1\,728b$	6

Name	$\dim Ve_\lambda$
$5\,648a$	0
$5\,648b$	13
$5\,648c$	13
$5\,648d$	0

Das Kondensationsidempotent e_λ ist folglich nicht treu. Dieser Umstand ist hier glücklicherweise unproblematisch, da wir bereits wissen, dass alle einfachen Charaktere in Paaren auftreten und vermöge des äußeren Automorphismus α innerhalb eines Paares vertauscht werden. Diese Kenntnis machen wir uns in Form der folgenden Beobachtung zunutze.

(1.1) Bemerkung
Ist V ein $\mathbb{F}_3(2.G)$-Modul und kommt der treue, einfache $\mathbb{F}_3(2.G)$-Modul S in V als Kompositionsfaktor mit der Vielfachheit m_S vor, so kommt S^α in V^α ebenfalls mit der Vielfachheit m_S vor. Hierbei seien mit V^α bzw. S^α die mit α konjugierten Moduln bezeichnet, d.h. die zugrunde liegenden Vektorräume sind gleich und ein Element $g \in 2.G$ operiert auf V^α bzw. S^α wie das Element $\alpha(g)$ auf V bzw. S.

Wir erhalten folglich die Vielfachheiten der vier angegebenen, einfachen Moduln, die zu Null kondensieren, als Kompositionsfaktoren eines Moduls V, indem wir den mit α konjugierten Modul V^α zerlegen.

Um auf diese Weise alle einfachen Brauercharaktere in diesem Block zu bestimmen, betrachten wir im Folgenden insgesamt die zwölf treuen Tensorprodukte $77a \otimes 176a$, $77a \otimes 176b$, $176a \otimes 351a$, $176b \otimes 351a$, $77a \otimes 1\,728a$, $77a \otimes 1\,728b$, $176a \otimes 924a$, $176b \otimes 924a$, $351a \otimes 1\,728a$, $351a \otimes 1\,728b$, $1\,728a \otimes 2\,926a$ und $1\,728b \otimes 2\,926a$, wobei die nicht-treuen Moduln $77a$, $351a$, $924a$ und $2\,926a$ aus Abschnitt 1.1 bekannt sind. Die Ergebnisse der Kondensation dieser Tensorprodukte sind in der angegebenen Reihenfolge Tabelle V.3 zu entnehmen. Dabei sind die Zeilen bereits so angeordnet, dass konjugierte Moduln untereinander stehen. Diese Anordnung ergibt sich unmittelbar, wenn man die kondensierten Tensorprodukte nacheinander in ihrer angegebenen Reihenfolge betrachtet. Insbesondere sehen wir durch Tabelle V.3, da in keinem Paar

Nr.	Name	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	k1a	3	.	2	6	6	2	7	5	10	19	48	88
3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	k6a	1	.	.	1	1	.	.	1	1	2	4	9
5	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	k13a	1	.	.	2	2	.	3	.	2	7	11	30
7	k13b	1	.	.	2	2	.	3	.	2	7	11	30
8	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	k13c	.	.	1	.	.	1	.	2	3	.	10	.
10	k62a	.	.	.	1	1	.	2	.	.	3	.	10
11	k27a	.	.	.	.	.	1	.	.	2	.	6	2
12	k126a	.	.	.	.	1	.	.	.	.	2	2	6
13	k33a	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	10	4
14	k57a	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	4	10
15	k106a	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	10	.
16	k258a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	10
17	k756a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
18	k1086a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1

Tabelle V.3: Zerlegung treuer Tensorprodukte von $2.Fi_{22}$

konjugierter Moduln beide zu Null kondensieren, dass unser gewähltes Idempotent im Lichte der eben gemachten Bemerkung „so gut wie treu“ ist.

Betrachten wir nun sukzessiv aufeinander folgende Paare von Spalten, so können wir die noch unbekannten, einfachen Brauercharaktere durch Bemerkung (1.1) auf folgende Weise bestimmen. Es bezeichnet dabei φ_i den einfachen Brauercharakter, welcher der i-ten Zeile von Tabelle V.3 entspricht.
Die Spalten 1 und 2 geben wir hier der Vollständigkeit wegen an. Aus den Kondensationsergebnissen des Tensorproduktes zu Spalte 1 können wir darüber hinaus durch einen Isomorphietest mit den 13-dimensionalen Kompositionsfaktoren verifizieren, dass der 13-dimensionalen Kompositionsfaktor aus Spalte 3 kein Kondensierter von $5\,648b$ oder $5\,648c$ ist.
Aus den Spalten 3 und 4 erkennen wir, dass der Charakter $176b \otimes 351a$ die Zerlegung $2 \cdot 176a + 6 \cdot 176b + 1\,728b + 2 \cdot 5\,648b + 2 \cdot 5\,648c + \varphi_{10}$ besitzt, wobei φ_{10} der einfache Brauercharakter ist, der dem kondensierten Modul $62a$ aus Zeile 10 entspricht. Damit liegen $36\,048b := \varphi_{10}$ und $36\,048a := \varphi_9 = \varphi_{10}^{\alpha}$ fest.
Als nächstes betrachten wir die Spalten 5 und 6. Hier erhalten wir durch einen analogen Schluss, dass $71\,280b := \varphi_{12} = 77a \otimes 1\,728a - 2 \cdot 176a - 6 \cdot 176b - 1\,728b - 2 \cdot 5\,648b - 2 \cdot 5\,648c - 36\,048b$ irreduzibel ist und ebenso $71\,280a := \varphi_{11} = 71\,280b^{\alpha}$.
Fahren wir so fort, indem wir nacheinander die Paare (7, 8), (9, 10) und (11, 12) von Spalten betrachten, so erhalten wir als weitere einfache Brauercharaktere $\varphi_{13} = 52\,800a$, $\varphi_{15} = 191\,072a$ und $\varphi_{17} = 965\,952a$, sowie φ_{14}, φ_{16} und φ_{18}, indem wir jeweils α anwenden. Damit sind alle

einfachen Brauercharaktere des treuen Blocks gefunden und wir können die zugehörige Zerlegungsmatrix wie in Tabelle Z.1 angeben.

1.3 Der Hauptblock zum Zweiten

Wir kehren nun zur Bestimmung der einfachen Brauercharaktere des Hauptblocks zurück.
Es sei $O := O_7(3)$ die zweite maximale Untergruppe von G. Wir zerlegen den Permutationsmodul 1_O^G mit der MeatAxe in seine Kompositionsfaktoren und erhalten

$$1a, 1a, 1a, 77a, 77a, 351a, 351a, 924a, 2\,926a, 2\,651a, 4\,823a, 4\,823b.$$

Die Zerlegung des Permutationscharakters im aktuellen Basic-Set liefert, dass $\psi := 4\,823a + 4\,823b = 13\,650\hat{a} - 1a - 77a - 351a - 924a - 2\,651$ ist. Wir schränken ψ auf die erste maximale Untergruppe $U := 2.U_6(2)$ von G ein und zerlegen den resultierenden Charakter in die bekannten, einfachen Brauercharaktere. Es ergibt sich

$$\psi{\downarrow_U} = 2 \cdot 229a + 2 \cdot 560a + 2 \cdot 925b + 2 \cdot 925c + 2\,184a + 2\,184b.$$

Zerlegen wir zusätzlich die Einschränkung der Darstellung $4\,823a$ auf O mit der MeatAxe und vergleichen das Resultat mit der Zerlegung $\psi{\downarrow_O}$ in $\mathrm{IBr}(O)$, die unabhängig von der gewählten Fusion ist, so sehen wir, dass der Charakter ϑ einer der Darstellungen $4\,823a$ oder $4\,823b$ die Zerlegung

$$\begin{aligned}\vartheta{\downarrow_O} \quad = \quad & 5 \cdot 1a + 3 \cdot 7a + 2 \cdot 21a + 27a + 6 \cdot 35a + 3 \cdot 63a + 3 \cdot 132a + \\ & +189a + 309a + 2 \cdot 518a + 797a + 1602a\end{aligned}$$

besitzt. Durch die daraus festgelegten Werte ergeben sich aus $\psi{\downarrow_U}$ zwei Charaktere ϑ_1 und ϑ_2 vom Grad $4\,823$, die

$$\begin{aligned}\vartheta_1{\downarrow_U} \quad &= \quad 2\,184a + 229a + 560a + 925b + 925c, \\ \vartheta_2{\downarrow_U} \quad &= \quad 2\,184b + 229a + 560a + 925b + 925c\end{aligned}$$

erfüllen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit ϑ_1 der Darstellung $4\,823a$ zuweisen, indem wir die Konjugiertenklasse $22A$ dadurch festlegen, dass der Brauercharakter zur Darstellung $4\,823a$ auf dieser Klasse den Wert $-2 - b11$ annimmt.
Der Charakter ϑ_1 wird auf den noch offenen Klassen $16A$-B vervollständigt, indem wir die Klasse $16A$ dadurch festlegen, dass der Brauercharakter zur Darstellung $4\,823a$ auf $16A$ den nicht-reellen Wert $-1 + 2i2$ annimmt. Beide Wahlen sind unabhängig voneinander und von der bereits getroffenen für die Klassen $13A$-B, da sich die zugehörigen Galoiserweiterungen der beteiligten Irrationalitäten nur im Primkörper $\mathbb{Q}$ schneiden.

Wir ermitteln die restlichen einfachen Brauercharaktere durch Kondensation von elf geeigneten Tensorprodukten und eines induzierten Moduls. Diese sind gegeben durch $77a \otimes 351a$, $77a \otimes 924a$, $77a \otimes 2926a$, $77a \otimes 2651a$, $351a \otimes 351a$, $21a{\uparrow^G}$, $176b \otimes 1728a$, $176a \otimes 1728a$,

Nr.	Name	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	k1a	.	.	.	.	4	.	.	2	6	.	.	6
2	k14a	3	1	5	4	2	6	5	2	8	.	.	5
3	k36a	.	.	.	.	2	1	.	2	2	.	.	2
4	k42a	2	.	6	4	1	4	7	1	12	3	3	6
5	k91a	.	2	2	4	3	2	4	6	16	3	3	6
6	k98a	.	.	.	.	2	.	.	2	7	.	.	4
7	k98b	.	.	.	.	2	.	.	2	8	.	.	4
8	k131a	.	.	.	.	3	.	.	3	6	.	.	6
9	k189a	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	2
10	k189b	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	2
11	k225a	1	.	2	3	.	1	2	.	2	.	.	1
12	k385a	.	.	3	3	.	1	5	.	4	4	4	2
13	k468a	1	.	2	3	.	2	3	.	1	1	1	.
14	k532a	.	.	2	1	.	.	2	.	2	1	1	1
15	k589a	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
16	k965a	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	k965b	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.
18	k1078a	.	1	.	.	1	.	.	2	4	.	.	.
19	k1940a	.	.	.	.	.	.	.	1	6	.	.	3
20	k2780a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
21	k2780b	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
22	k2904a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1

Tabelle V.4: Kondensationsresultate im 3-Hauptblock von Fi_{22}

$351a \otimes 4823a$, $77a \otimes 4823a$, $77a \otimes 4823b$ und $924a \otimes 924a$. Dabei ist $21a$ ein irreduzibler Brauercharakter bzw. Modul von U und die Charaktere bzw. Moduln $176a$, $176b$ und $1728a$ sind treue Moduln bzw. deren Charaktere von $2.G$, die wir im vorangestellten Abschnitt bestimmt haben. In dieser Reihenfolge sind die Ergebnisse der Kondensation in Tabelle V.4 aufgeführt.

Als Kondensationsuntergruppe K wählen wir den elementar-abelschen 2-Normalteiler der sechsten maximalen Untergruppe $N := 2^6{:}S_6(2)$ von G und kondensieren mit trivialem Idempotent. Die Untergruppe N wird erzeugt von den beiden Elementen $bab^{11}ab^6$ und $ab^{-4}ab^4$. Eine Menge von N-N-Doppelnebenklassenvertretern in G umfasst zehn Elemente, sodass wir insgesamt auf ein träges Erzeugendensystem mit elf Elementen kommen. Zur Kondensation der Tensorprodukte zweier treuer Moduln von $2.G$ wählen wir als Kondensationsuntergruppe ein Urbild $\tilde{K}$ der Gruppe K unter der Projektion $\theta : 2.G \to G$. Dann sind Worte für die Doppelnebenklassenvertreter eines Urbilds $\tilde{N}$ von N in $2.G$ so wählbar, dass sie den Worten der Doppelnebenklassenvertreter von N in G entsprechen und wir somit dasselbe träge Erzeugendensystem nutzen können.

Da in den betrachteten Moduln 22 einfache Kondensierte auftreten, zeigt Tabelle V.4 insbesondere, dass unser gewähltes Idempotent treu und der betrachtete Block von FG Morita-äquivalent zum kondensierten Block ist. Ermitteln wir die Dimensionen der kondensierten Moduln, die zu den bereits gefundenen nicht-trivialen sieben einfachen Charakteren gehören, mit Proposition III.(1.2), so sehen wir, dass $77a$ zu $k14a$, $351a$ zu $k36a$, $924a$ zu $k42a$, $2\,926a$ zu $k91a$, $2\,651a$ zu $k131a$ und $4\,823a$ bzw. $4\,823b$ jeweils zu einem Modul der Dimension 98 kondensiert.

Zerlegen wir das erste Tensorprodukt im aktuellen Basic-Set, so sehen wir mit der erste Spalte von Tabelle V.4, dass $32\,032\hat{a} - 1a - 3 \cdot 77a - 351a - 924a - 2\,926a - 2\,651a = \varphi_{11} + \varphi_{13}$ ist. Dabei bezeichnen wir im Folgenden mit φ_i, $1 \leq i \leq 22$, den Brauercharakter von G, der dem einfachen, kondensierten Modul aus Zeile i von Tabelle V.4 entspricht.
Das Tensorprodukt $77a \otimes 924a$ verrät uns, dass φ_{18} gegeben ist durch $75\,075\hat{a} - 1a - 77a - 351a - 924a - 2 \cdot 2\,926a - 2\,651a - 4\,823a - 4\,823b$. Wir ersetzen entsprechend $75\,075\hat{a}$ des Basic-Sets durch $55\,573a := \varphi_{18}$.
Aus den Kondensationsergebnissen von $77a \otimes 2\,926a$ können wir die Relation $3 \cdot \varphi_{12} + 2 \cdot \varphi_{14} = 77a \otimes 2\,926a - 5 \cdot 77a - 6 \cdot 924a - 2 \cdot 2\,926a - 2 \cdot (\varphi_{11} + \varphi_{13})$ ableiten. Und aus der vierten Spalte von Tabelle V.4 leiten wir ebenso die Relation $3 \cdot \varphi_{12} + \varphi_{14} = 77a \otimes 2\,651a - 4 \cdot 77a - 4 \cdot 924a - 4 \cdot 2\,926a - 3 \cdot (\varphi_{11} + \varphi_{13})$ ab. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert dann $50\,050b := \varphi_{14}$ und somit auch $21\,175a := \varphi_{12}$. Wir ersetzen $75\,075\hat{b}$ im Basic-Set durch $50\,050b$ und ebenso $45\,045\hat{a}$ durch $21\,175a$.
Spalte 5 von Tabelle V.4 liefert mit der bisherigen Kenntnis der irreduziblen Charaktere, den Charakter $29\,821a := \varphi_{15}$, den wir für den nicht einfachen Charakter $50\,050a$ ins Basic-Set aufnehmen. Da jetzt nur noch ein Charakter vom Grad 50 050 existiert, benennen wir $50\,050b$ in $50\,050a$ um.
Aus der Kondensation des induzierten Moduls $21a{\uparrow}^G$ erhalten wir die Relation $2 \cdot \varphi_{13} + \varphi_{11} = 21a{\uparrow}^G - 6 \cdot 77a - 351a - 4 \cdot 924a - 2 \cdot 2\,926a - 21\,175a$. Da wir aus der Analyse der ersten Spalte bereits wissen, wie wir die Charaktersumme $\varphi_{13} + \varphi_{11}$ schreiben können, erhalten wir hieraus nun $17\,226a := \varphi_{13}$ und $7\,722a := \varphi_{11}$. Wir ersetzen $10\,725\hat{a}$ durch $7\,722a$ und $32\,032\hat{a}$ durch $17\,226a$ im Basic-Set.

Eine Betrachtung der Zerlegung des kondensierten Tensorproduktes $176b \otimes 1728a$ in Spalte 7 ergibt den einfachen Charakter $12\,474a := \varphi_9$. Da es genau vier Paare von kondensierten Moduln gibt, deren Dimensionen gleich sind, müssen die zugehörigen Charaktere dieser Moduln nach unserer anfänglichen Analyse unter dem äußeren Automorphismus α konjugiert sein. Folglich erhalten wir durch Anwenden von α unmittelbar $12\,474b := \varphi_{10}$. Betrachten wir anschließen das Tensorprodukt $176a \otimes 1\,728a$, so können wir ebenfalls unmittelbar $133\,925a := \varphi_{19}$ schlussfolgern.
Wir erhalten aus Spalte 9 von Tabelle V.4 dann eine Relation für $\varphi_{16} + 2 \cdot \varphi_{17}$. Wenden wir α auf die Zerlegung des zu Spalte 9 gehörenden Tensorproduktes an, so erhalten wir eine Relation für $2 \cdot \varphi_{16} + \varphi_{17}$, da wir bereits wissen, welche Charaktere durch α vertauscht werden. Aus beiden Relationen erhalten wir dann $92\,378a := \varphi_{16}$ und $92\,378b := \varphi_{17}$.
Schließlich liefert Spalte 10 den einfachen Charakter $182\,897a := \varphi_{20}$ und der äußere Automorphismus wiederum $182\,897b := \varphi_{21} = \varphi_{20}^{\alpha}$. Mit allen bereits vorliegenden Informationen ist dann auch der letzte Charakter kein Geheimnis mehr: Aus Spalte 12 erhalten wir $193\,479a := \varphi_{22}$.

Damit sind alle einfachen Brauercharaktere des Hauptblocks identifiziert und wir können eine Zerlegungsmatrix dieses Blocks in Tabelle Z.2 angeben.

2 2.Fi_{22}.2 in Charakteristik 3

Nach Clifford (vgl. (6.11), bzw. (6.19) und (6.20) in [19]) setzt jeder unter dem äußeren Automorphismus α invariante Charakter von $2.G$ fort zu einem Charakter von $2.G.2$. Ist weiter $\vartheta \in \mathrm{IBr}(2.G)$ nicht invariant unter α, so ist $\vartheta\!\uparrow^{2.G.2}$ irreduzibel. Es lassen sich folglich alle einfachen modularen Charaktere von $2.G.2$ wie folgt gewinnen: Wir setzen jeden unter der Automorphismengruppe invarianten Charakter φ von $2.G$ auf zweifache Weise zu einem Charakter von $2.G.2$ fort. Dabei kann man die eine Fortsetzung in die andere durch Multiplikation der Werte auf den äußeren Klassen mit -1 überführen. In diesem Fall sagen wir auch, dass der Charakter φ *aufspaltet*. Spaltet φ nicht auf, so ist der induzierte Charakter $\varphi\!\uparrow^{2.G.2}$ irreduzibel. Sind φ und φ' zwei unter α konjugierte Charaktere, so fusionieren sie, d.h. es ist $\varphi\!\uparrow^{2.G.2} = \varphi'\!\uparrow^{2.G.2}$.

(2.1) Definition
Es sei $\varphi \in \mathrm{IBr}(2.G)$. Ist φ aufspaltend, so bezeichnen wir seine beiden Fortsetzungen auf $2.G.2$ mit φ^+ und φ^-. Dabei sei φ^+ der Brauercharakter, dessen Wert auf der Klasse 2D positiv ist. Analog dazu ist φ^- der Brauercharakter, dessen Wert auf der Klasse 2D negativ ist. Es wird sich herausstellen, dass diese Festlegung genügt, beide Fortsetzungen eines Charakters zu unterscheiden. Fusionieren zwei konjugierte Charaktere φ und φ', so bezeichnen wir den zugehörigen Charakter von $2.G.2$ mit φ^0.

Bei der Behandlung von $2.G$ in Charakteristik 3 haben wir in Abschnitt 1 die Operation von α auf den Konjugiertenklassen von $2.G$ bestimmt und schließlich im Hauptblock die vier Paare modularer Charaktere $4\,823a$ und $4\,823b$, $12\,474a$ und $12\,474b$, $92\,378a$ und $92\,378b$, sowie $182\,897a$ und $182\,897b$ erhalten, die unter α konjugiert sind, während sich im treuen Block von $2.G$ neun

Paare von konjugierten Charakteren befinden. Folglich fusionieren die Charaktere dieser Paare und die übrigen Charaktere sind invariant unter der Operation des äußeren Automorphismus und spalten deshalb auf.

Die Charaktere von $2.G.2$ verteilen sich insgesamt auf acht Blöcke:

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	9	98	32
2	1	3	2
3	1	3	2
4	1	3	2
5	1	3	2
6	0	1	1
7	0	1	1
8	9	38	9

Die beiden gewöhnlichen Charaktere vom Grad 1 791 153 sind Defekt-0-Charaktere und liefern die Blöcke 6 und 7. Die Blöcke 2 und 3 sowie 4 und 5 aus obiger Tabelle sind komplex konjugiert und von zyklischem Defekt. Ihre Zerlegungsmatrizen, die bereits in Abschnitt 6.17 von [14] veröffentlicht wurden, sind

360 855	1	.
577 368	.	1
938 223	1	1

und

852 930	1	.
1 876 446	.	1
2 729 376	1	1

,

wobei wir hier für jedes Paar der konjugierten Blöcke die Zerlegungsmatrix nur ein Mal angeben.

Wir müssen zur Vervollständigung der Klassifikation der 3-modularen Charaktere von $2.G.2$ nur noch den Hauptblock und den treuen Block 8 betrachten.

2.1 Der Hauptblock

Zur Behandlung des Hauptblocks genügt eine Betrachtung der Gruppe $G.2$. Als Basic-Set des Hauptblocks wählen wir dazu die Einschränkungen auf die $3'$-Klassen der in Tabelle V.5 aufgeführten gewöhnlichen Charaktere.
Unser Ziel ist es, jeden Basic-Set-Charakter in einfache Brauercharaktere von $G.2$ zu zerlegen. Dazu genügt es, bei aufspaltenden gewöhnlichen Charakteren jeweils nur eine Fortsetzung zu betrachten. Die Zerlegung der anderen Fortsetzung folgt dann aus der ersten, indem wir die Operation des äußeren Automorphismus auswerten. Zur Bestimmung der Zerlegungen wenden wir folgendes Verfahren an:

(2.2) Bemerkung
Es sei χ ein modularer Charakter von $G.2$ und $U := 2.U_6(2)$ die erste maximale Untergruppe von G. Um χ in seine einfachen modularen Konstituenten zu zerlegen, gehen wir wie folgt vor:

i	$\chi_i(1)$
1	1
2	1
3	78
4	78
5	429
6	429
7	1 001
8	1 001
11	3 003
12	3 003
13	3 080

i	$\chi_i(1)$
14	3 080
15	10 725
16	10 725
17	13 650
21	32 032
22	32 032
23	43 680
24	43 680
25	45 045
26	45 045
31	50 050

i	$\chi_i(1)$
35	75 075
36	75 075
37	75 075
38	75 075
44	150 150
45	150 150
59	800 800
60	450 450
61	450 450
70	1 164 800

Tabelle V.5: Basic-Set des 3-Hauptblocks von $Fi_{22}.2$

1. Wir betrachten die Einschränkung $\chi{\downarrow_G}$ auf die Untergruppe und zerlegen diesen Charakter in seine einfachen modularen Konstituenten. Auf diese Weise erhalten wir die Information, welche Charaktere von G durch Fortsetzung oder Induktion die Konstituenten von χ stellen, sowie deren Vielfachheiten. D.h. ist $\chi{\downarrow_G} = \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} m_\varphi\varphi$, so wissen wir, dass die Fortsetzungen φ^+ und φ^- für ein aufspaltendes φ zusammen genau m_φ-mal in χ als Konstituenten vorkommen. Des Weiteren wissen wir auch sofort, wie oft die Fusion zweier Charaktere in χ enthalten ist.

2. Dann zerlegen wir die Einschränkung von χ auf die erste maximale Untergruppe $U.2$ von $G.2$ in die bekannten einfachen Brauercharaktere $\mathrm{IBr}(U.2)$.

3. Die aus Schritt 1 bekannten Konstituenten φ von $\chi{\downarrow_G}$ schränken wir ihrerseits auf die Untergruppe U von G ein, um in Analogie zu Schritt 1 Auskunft darüber zu erhalten, welche Charaktere von U durch Fortsetzung oder Induktion die Konstituenten von $\varphi{\downarrow_U}$ stellen.

4. Ein Vergleich der Zerlegungen aus den Schritten 2 und 3 erlaubt uns Rückschlüsse über die Zerlegung der auf $G.2$ fortgesetzten bzw. induzierten Charaktere von G bei Einschränkung auf $U.2$ zu ziehen.

5. Ist $\psi \in \mathrm{IBr}(G.2)$ eine Fortsetzung von $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, so können wir aus der in Schritt 4 gewonnenen Zerlegung durch Betrachtung der Charakterwerte der Konstituenten von $\psi{\downarrow_{U.2}}$ auf der Konjugiertenklasse des äußeren Elements unmittelbar schließen, ob $\psi = \varphi^+$ oder $\psi = \varphi^-$ ist. Darüber hinaus lässt sich mit der Kenntnis dieser Zerlegung auch überprüfen, ob und wie oft höchstens φ^+ oder φ^- in χ enthalten sind. Dazu betrachten wir erneut die Einschränkungen auf $U.2$ und tragen die Vielfachheiten der Konstituenten in einen Vektor ein. Wir subtrahieren dann die entsprechenden Vielfachheitsvektoren der möglichen Konstituenten vom Vielfachheitsvektor von χ, bis ein Eintrag des Resultats negativ wird oder die maximale Anzahl, die aus der Zerlegung aus Schritt 1 vorgegeben

ist, erreicht ist. Auf diese Weise wissen wir dann, wie oft höchstens eine Fortsetzung in χ enthalten ist, und damit auch im Umkehrschluss, wie oft die andere Fortsetzung mindestens vorkommen muss.

Hier lassen sich durch dieses Verfahren die meisten Basic-Set-Charaktere unmittelbar zerlegen. Gilt dies für einen Charakter nicht, so müssen wir die verschiedenen Fälle der möglichen Zerlegungen betrachten und versuchen, alle bis auf einen von ihnen durch Betrachtung weiterer Charaktere zu falsifizieren.

Durch das Verfahren aus (2.2) gewinnen wir unmittelbar die Zerlegungen der ersten acht Elemente des Basic-Sets und gleichzeitig die Zerlegungen der Einschränkungen auf $U.2$ der einfachen Charaktere $1a^+$, $1a^-$, $77a^+$, $77a^-$, $351a^+$, $351a^-$, $924a^+$, $924a^-$, $2\,926a^+$ und $2\,926a^-$ in einfache Brauercharaktere.
Bei der Betrachtung von $\hat{\chi}_{13}$ ergeben sich zunächst zwei mögliche Zerlegungen. Wir können $\hat{\chi}_{13}$ als $\hat{\chi}_{13} = 1a^+ + 77a^+ + 351a^+ + 2\,651^+$ oder $\hat{\chi}_{13} = 1a^- + 77a^+ + 351a^+ + 2\,651a^+$ zerlegen. Entsprechend haben wir zwei mögliche Zerlegungen von $2\,651a^+{\downarrow_{U.2}}$. Die Zerlegung von $\hat{\chi}_{17}$ in $\mathrm{IBr}(G.2)$ hängt ebenfalls von $2\,651a^+$ ab, liefert aber die Zerlegung von $9\,646^0{\downarrow_{U.2}}$. Mit dieser Information können wir $\hat{\chi}_{44}$ betrachten. Hier sehen wir durch Betrachtung der Vielfachheitsvektoren (Schritt 5 in Bemerkung (2.2)), welche Zerlegung von $2651a^+{\downarrow_{U.2}}$ die richtige ist. Damit liegen dann auch die Zerlegungen von $\hat{\chi}_{12}$ und $\hat{\chi}_{17}$ in $\mathrm{IBr}(G.2)$ fest.
Direkt durch sukzessive Betrachtung von $\hat{\chi}_{15}$, $\hat{\chi}_{21}$, $\hat{\chi}_{23}$ und $\hat{\chi}_{31}$ erhalten wir ihre Zerlegungen in einfache Brauercharaktere von $G.2$ und zusätzlich die Zerlegungen der Einschränkungen auf $U.2$ beider Fortsetzungen von $7\,722a, 17\,226a, 21\,175a, 50\,050a \in \mathrm{IBr}(G)$.
Wenden wir unser Verfahren auf $\hat{\chi}_{37}$ an, so erhalten wir wieder zwei Möglichkeiten, die von den möglichen Zerlegungen von $55\,573a^+{\downarrow_{U.2}}$ herrühren. Da wir bereits die Zerlegungen der ersten acht Charaktere des Basic-Sets kennen, kennen wir auch die Fortsetzungen $77a^+$ und $924a^+$. Eine Analyse des Tensorproduktes $77a^+ \otimes 924a^+$ liefert dann die richtige Zerlegung von $55\,573a^+{\downarrow_{U.2}}$ und somit auch die Zerlegung von $\hat{\chi}_{37}$. Schließlich liefern noch $\hat{\chi}_{59}$ und $\hat{\chi}_{70}$ die Zerlegungen von $184\,756^0{\downarrow_{U.2}}$ und $365\,794^0{\downarrow_{U.2}}$ in einfache Konstituenten.

Es bleiben folglich nur noch die Zerlegungen von $\hat{\chi}_{25}$ und $\hat{\chi}_{60}$ zu ermitteln. Mit der Kenntnis der bisherigen Zerlegungen liefert eine Betrachtung von $\hat{\chi}_{25}$ zwei mögliche Fälle für die Konstituenten von $29\,821a^+{\downarrow_{U.2}}$. Durch eine Analyse von $\hat{\chi}_{60}$ können wir einen Fall ausschließen, sodass auch $\hat{\chi}_{25}$ zerlegt ist. Die Zerlegung von $\hat{\chi}_{60}$ können wir aber nicht eindeutig festlegen, da diesmal mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung von $193\,479a^+{\downarrow_{U.2}}$ verbleiben.
Um diese letzte noch ausstehende Zerlegung zu ermitteln, betrachten wir das Tensorprodukt $924a^+ \otimes 924a^+$, da aus der Zerlegung seiner Einschränkung auf G folgt, dass eine Fortsetzung von $193\,479a$ darin enthalten ist. Unter Berücksichtigung der möglichen Zerlegungen der Einschränkung $193\,469a^+{\downarrow_{U.2}}$ können wir

$$\begin{aligned}
924a^+ \otimes 924a^+ \quad = \quad & 4 \cdot 1a^+ + 2 \cdot 1a^- + 4 \cdot 77a^+ + 77a^- + 2 \cdot 351a^+ + 2 \cdot 924a^+ + \\
& + 4 \cdot 924a^- + (2+m) \cdot 2\,926a^+ + n \cdot 2\,926a^- + 6 \cdot 2\,651a^+ + \\
& + 7\,722a^+ + 2 \cdot 21\,175a^- + 29\,821a^+ + 2 \cdot 24\,948a^0 + 4 \cdot 9\,646a^0 + \\
& + 50\,050a^- + 133\,925a^- + 2 \cdot 133\,925a^+ + 193\,479a^+
\end{aligned}$$

schreiben, wobei $m + n = 4$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist. Wir können folglich die letzte Zerlegung ermitteln, indem wir die Vielfachheit des Kompositionsfaktors $2\,926a^+$ im Tensorprodukt bestimmen. Dieses Problem lösen wir durch Kondensation.

Die Matrixdarstellung von $G.2$ der Dimension 924 über $\mathbb{F}_3$, die im WWW-ATLAS erhältlich ist, besitzt den Charakter $924a^+$. Um dies zu sehen, genügt es b^9 zu betrachten, wenn b der zweite Standarderzeuger ist. Das Element b^9 liegt in Klasse 2D, wie wir aus den Potenzabbildungen des Kopfes der gewöhnlichen Tafel erkennen können. Nun ergibt eine Berechnung des Brauercharakterwertes der Matrix, dass dieser positiv ist.
Als Kondensationsuntergruppe K wählen wir den elementar abelschen 2-Normalteiler der Ordnung 128 der maximalen Untergruppe $N := 2^7{:}S_6(2)$ von $G.2$ und Kondensieren mit trivialem Idempotent. Es ist $|N\backslash G/N| = 10$ und die maximale Untergruppe N wird von a und $b^4ab^{15}ab^4$ erzeugt, wobei a und b die Standarderzeuger von $G.2$ bezeichnen. Damit erhalten wir ein träges Erzeugendensystem mit 11 Elementen.

Mit Hilfe der Brauercharaktere $2\,926a^+$ und $2\,926a^-$ und Proposition III.(1.2) sehen wir, dass $2\,926a^+$ zu einem Modul der Dimension 91 kondensiert, während $2\,926a^-$ verschwindet. Die Zerlegung des kondensierten Tensorproduktes mit der MeatAxe liefert schließlich, dass genau ein Modul der Dimension 91 mit der Vielfachheit vier vorkommt. Somit ist $m = 2$ und $n = 2$ und alle Charaktere des Basic-Sets sind in ihre einfachen Konstituenten zerlegt.

Eine Zerlegungsmatrix des Hauptblocks geben wir in Tabelle Z.3 an. Wegen ihrer Größe ist sie in vier Quadranten aufgeteilt.

2.2 Der treue Block

Als wir die einfachen Brauercharaktere von $2.G$ in Abschnitt 1 bestimmt haben, haben wir gesehen, dass alle treuen Charaktere von $2.G$ in Paaren auftreten und dabei jeweils unter dem äußeren Automorphismus α konjugiert sind. Folglich fusionieren die Charaktere eines Paars beim Übergang von $2.G$ zu $2.G.2$ und wir erhalten alle treuen Brauercharaktere von $2.G.2$ durch Induktion. Eine Zerlegungsmatrix des treuen Blocks ist in Tabelle Z.4 angegeben.

3 3.Fi_{22} in Charakteristik 2

Die gewöhnlichen Charaktere von $3.G$ fallen in fünf Blöcke. Drei davon – der Hauptblock, ein Block vom Defekt Eins und ein Defekt-Null-Block – sind Blöcke, die nur nicht-treue Charaktere enthalten. Demnach gibt es zwei Blöcke von treuen Charakteren.

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	17	62	14
2	0	1	1
3	1	2	1
4	17	50	11
5	17	50	11

Nr.	Grad	Nr.	Grad
1	1	12	43 680
2	78	13	45 045
3	429	14	48 048
4	1 001	22	138 600
5	1 430	23	138 600
8	10 725	25	205 920
10	30 030	40	582 400

Tabelle V.6: Basic-Set des 2-Hauptblocks von 3.Fi$_{22}$

Der Defekt-0-Charakter des zweiten Blocks ist der Charakter vom Grad 1 441 792. Die Zerlegungsmatrix des dritten Blocks lässt sich leicht bestimmen und wird bereits in Abschnitt 6.17 von [14] aufgeführt. In diesem Block befinden sich nur die beiden gewöhnlichen Charaktere 2 555 904a und 2 555 904b, die beim Übergang zu den $2'$-Klassen auf denselben einfachen Brauercharakter einschränken.
Die einfache Gruppe G besitzt 16 Konjugiertenklassen von Elementen ungerader Ordnung. Davon sind nur bei den Klassen $11A$ und $11B$, sowie $13A$ und $13B$ nicht alle Werte der gewöhnlichen Charaktere rational. Auf $11A$-B nehmen Charaktere die nicht-reellen Werte $b11$, bzw. $-1-b11$ an und auf $13A$-B die reellen Werte $-b13$ und $1+b13$. Nach Brauers Permutationslemma gibt es in $\mathrm{IBr}(G)$ ein Paar komplex konjugierter Brauercharaktere und ein Paar Brauercharaktere, die unter dem nicht-trivialen Galoisautomorphismus σ der Erweiterung $\mathbb{Q}(b13)/\mathbb{Q}$ algebraisch konjugiert sind, da die Operation von σ auf den Charakteren durch den äußeren Automorphismus α realisiert ist. Die Minimalpolynome der Irrationalitäten $b11$ bzw. $b13$ sind X^2+X-3 bzw. X^2+X+3, sodass beide Polynome bei 2-modularer Reduktion das irreduzible Polynom $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$ liefern. Bei den treuen Charakteren kommt als weitere auftretende Irrationalität noch eine primitive dritte Einheitswurzel dazu. Wir wählen folglich als Körper für die betrachteten Matrixdarstellungen $\mathbb{F}_4$, den Körper mit vier Elementen, der ein Zerfällungskörper für $3.G$ in gerader Charakteristik ist (man vgl. I.5 in [22]).
Betrachten wir die 3-fache Überlagerungsgruppe $3.G$, so zählen wir 12 Paare komplex konjugierter und finden in analoger Weise 3 Paare σ-konjugierter $2'$-Klassen. Da der Defekt-0-Charakter und die Charaktere des dritten Blocks invariant unter komplexer Konjugation und σ sind, entfallen demnach auf den Hauptblock ein Paar komplex konjugierter und ein Paar σ-konjugierter Charaktere. Die beiden treuen Blöcke enthalten damit die restlichen elf Paare von komplex konjugierten und zwei Paare von σ-konjugierten Charakteren.

3.1 Der Hauptblock

Ein Basic-Set des Hauptblocks wählen wir wie in Tabelle V.6.
Wir beginnen mit der Zerlegung des Permutationsmoduls 1_U^G, wobei $U := 2.U_6(2)$ wieder die erste maximale Untergruppe von G bezeichnet, mit der MeatAxe. Auf diese Weise erhalten wir Matrixdarstellungen von fünf absolut-einfachen $\mathbb{F}_4G$-Moduln. Die auftretenden Kompositions-

Nr.	Grad	Nr.	Grad
66	351	67	351
68	7722	69	7722
70	12474	71	12474
72	12474	73	12474
74	19305	75	19395
78	27027	79	27027
88	96525	89	96525
92	235872	93	235872
98	360855	99	360855
100	368550	101	368550
126	938223	127	938223

Tabelle V.7: Basic-Sets der treuen 2-Blöcke von $3.Fi_{22}$

faktoren sind

$$1a, 1a, 78a, 78a, 78a, 78a, 78a, 350a, 350a, 572a, 572a, 572a, 572a, 1\,352a, 1\,352a.$$

Der auf die $2'$-Klassen eingeschränkte Permutationscharakter von 1_U^G zerlegt sich im Basic-Set in die Summe $78\hat{a} + 2 \cdot 1\,001\hat{a} + 1\,430\hat{a}$. Eine Betrachtung der Grade der Kompositionsfaktoren genügt, um $1\,430\hat{a} = 1\,352a + 78a$, $78a = 78\hat{a}$ und $1001\hat{a} = 572a + 350a + 78a + 1a$ als Zerlegung in einfache Brauercharaktere angeben zu können. Des Weiteren folgt aus der in [6] angegebenen Zerlegung des Permutationscharakters $1_U^G = 1a + 429a + 3080a$ und wieder allein aus den Graden der Kompositionsfaktoren, dass $429\hat{a} = 350a + 78a + 1a$ ist. Mit Hilfe dieser Zerlegungen können wir die Brauercharaktere der ersten vier nicht-trivialen einfachen Moduln im Basic-Set als

$$\begin{aligned} 78a &= 78\hat{a} \\ 350a &= 429\hat{a} - 78\hat{a} - 1\hat{a} \\ 572a &= 1\,001\hat{a} - 429\hat{a} \\ 1\,352a &= 1\,430\hat{a} - 78\hat{a} \end{aligned}$$

schreiben. Die nun vorliegenden irreduziblen Darstellungen und ihre Brauercharaktere liefern genug Information, um die beiden treuen Blöcke der dreifachen Überlagerung von G zu behandeln. Deshalb verschieben wir die Fertigstellung des Hauptblocks, zu deren Durchführung wir uns im Anschluss einiger treuer Darstellungen bedienen werden.

3.2 Die treuen Blöcke

Die Basic-Sets für den vierten und fünften Block wählen wir so, wie in Tabelle V.7 angegeben. Die beiden Basic-Sets lassen sich ineinander überführen, indem wir die Charaktere komplex konjugieren. Demnach lassen sich auch die einfachen Brauercharaktere des einen Blocks in

Brauercharaktere des anderen Blocks überführen. Die elf Paare von komplex konjugierten Charakteren, die es nach Brauers Permutationslemma in der Gesamtheit der Brauercharaktere beider Blöcke gibt, verteilen sich folglich so auf beide Blöcke, dass jeder Teil eines Paars in jeweils einem Block liegt. Damit ist auch klar, dass jeder der treuen Blöcke genau ein Paar von algebraisch konjugierten Charakteren enthält. Durch die Konjugation der Blöcke ist es ausreichend, die einfachen Brauercharaktere für einen der beiden zu klassifizieren, was wir im Folgenden auch nur tun werden.

Ausgangspunkt zur Klassifikation aller einfachen Brauercharaktere eines der treuen Blöcke ist die treue Darstellung $27a$, die in [40] erhältlich ist. Die Zerlegung des Tensorproduktes von $27a$ mit der nicht-treuen Darstellung $78a$ durch eine Anwendung der MeatAxe liefert treue, irreduzible Darstellungen der Kompositionsfaktoren

$$27a, 27a, 324a, 1\,728a.$$

Ebenso zerlegen wir das Tensorprodukt $27a \otimes 350a$ und erhalten als Kompositionsfaktoren die beiden einfachen Moduln $4\,725a$ und $4\,725b$.
Um darauf aufbauend alle einfachen Brauercharaktere des Blocks zu klassifizieren, betrachten wir die Zerlegung einiger Tensorprodukte, die wir uns durch Kondensation berechenbar machen. In diesem Fall betrachten wir insgesamt die Tensorprodukte $27a \otimes 78a$, $27a \otimes 350a$, $27a \otimes 572a$, $27a \otimes 1\,352a$, $324a \otimes 350a$, $324a \otimes 572a$, $78a \otimes 4\,725a$ und $350a \otimes 4\,725a$, wobei die nicht-treuen Darstellungen aus unserer Vorarbeit im Hauptblock bekannt sind.

Als Kondensationsuntergruppe K wählen wir den abelschen 3-Normalteiler der zweiten maximalen Untergruppe $3^6{:}U_4(2){:}2$ von $3.O := 3.O_7(3)$. Unsere Wahl des zugehörigen linearen Kondensationsidempotents von K legen wir durch den linearen Charakter λ fest, indem wir die Bilder auf den Erzeugern von K angeben. Die zweite maximale Untergruppe von $3.O$ wird erzeugt von den drei Elementen $u_1 := o_2^3 o_1 o_2^{-3}$, $u_2 := o_2^2 o_1 o_2^2 o_1 o_2^{-2} o_1 o_2^{-2}$ und $u3 := o_2^{-2} o_1 o_2 o_1 o_2^{-1} o_1$, wobei wir mit o_1 und o_2 die Standarderzeuger von $3.O$ bezeichnen. Vermöge der Erzeuger $s_1 := u_2 u_3 u_2 u_1^{-1} u_3^{-1} u_2$, $s_2 := u_2 u_1 u_3^2 u_1 u_2^{-1} u_1^{-1} u_3^{-2} u_1^{-1}$ und $s_3 := (u_1 u_2 u_3)^2 u_1^{-1} u_3^{-2} u_2^{-1} u_3^{-1}$ einer 3-Sylowgruppe von $3.O$ können wir die Erzeuger von K und ihre Bilder unter λ als

Nr.	Produkt	λ
1	s_2	1
2	$s_1 s_2 s_1^{-1}$	1
3	$s_3 s_2 s_3^{-1}$	1
4	$s_1^2 s_2 s_1^{-2}$	1
5	$s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1}$	1
6	$s_3^2 s_2 s_3^{-2}$	ω^2

angeben, wobei ω der primitiven dritten Einheitswurzel $\exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ entspricht.
Die Trägheitsgruppe T von λ hat Index 27 in $3^6{:}U_4(2){:}2$ und eine Berechnung der Norm des zugehörigen Permutationscharakters in $3.G$ liefert die Information, dass es 861 Doppelnebenklassen in $T \backslash 3.G / T$ gibt. Vernachlässigen wir die Vertreter, welche nach Korollar IV.(2.5) zu

Nr.	Name	1	2	3	4	5	6	7	8
1	k1a	2	.	8	6	10	22	24	125
2	k4a	1	.	4	2	4	9	11	57
3	k15a	.	1	.	2	1	3	5	15
4	k15b	.	1	.	2	1	3	5	16
5	k16a	1	.	.	.	.	2	1	8
6	k42a	.	.	2	.	.	3	.	10
7	k62a	.	.	.	1	2	1	4	12
8	k260a	.	.	.	.	1	.	1	2
9	k528a	.	.	.	.	.	1	.	.
10	k708a	.	.	.	.	.	.	1	3
11	k2926a	.	.	.	.	.	.	.	1

Tabelle V.8: Kondensationsergebnisse für einen treuen 2-Block von $3.Fi_{22}$

Null kondensieren, so bleiben immerhin noch 846 Elemente übrig. Da diese Anzahl eine direkte Behandlung mit der MEATAXE unter Verwendung aller 846 Erzeuger nur bei den kleineren Tensorprodukten erlaubt, reduzieren wir die Anzahl der benötigten Doppelnebenklassenvertreter durch die Nadel-im-Heuhaufen-Methode, d.h. Algorithmus IV.(3.11). Um zu vermeiden, dass wir hierfür sehr viel Rechenzeit verwenden, beschränken wir die Suchtiefe des Algorithmus wie in Bemerkung IV.(3.13) beschrieben. Auf diese Weise können wir insgesamt 273 Doppelnebenklassenvertreter als redundant nachweisen, was einer Reduktion von fast einem Drittel der Ausgangsmenge entspricht. Während es theoretisch weiterhin möglich ist, noch weitere Elemente als überflüssig nachzuweisen, stellen wir in der Praxis fest, dass weitere Elemente mit einer höheren Suchtiefe und erheblich mehr Rechenzeit erkauft werden müssen. Aus diesem Grund belassen wir es hier bei 588 notwendigen Doppelnebenklassenvertretern und wenden in der Folge Proposition IV.(6.1) an.

Die Ergebnisse der kondensierten und zerlegten Tensorprodukte sind in ihrer oben angegebenen Reihenfolge in Tabelle V.8 zu finden. Aus der Tabelle können wir insbesondere ablesen, dass das gewählte Idempotent e_λ treu für den Block ist, da wir elf nicht-isomorphe einfache $e_\lambda\mathbb{F}_4(3.G)e_\lambda$-Moduln als Kompositionsfaktoren erhalten.

Betrachten wir den vierten Block und schränken den Charakter $351\hat{a}$ des Basic-Sets auf $3.O_7(3)$ ein, so zerfällt $351\hat{a}{\downarrow_{3.O}}$ in die Summe eines einfachen Brauercharakters vom Grad 27 und eines vom Grad 324. Die Gruppe $3.O$ besitzt genau zwei einfache Brauercharaktere von Grad 27 und zwei vom Grad 324. Diese sind jeweils komplex konjugiert und liegen in zwei konjugierten Blöcken. Nach Wahl der Fusion von $3.O$ in $3.G$ liegen beide Summanden von $351\hat{a}{\downarrow_{3.O}}$ in einem der beiden Blöcke. Da sie konjugiert sind, können wir ohne Einschränkung eine Fusion fest wählen, sodass die Summanden von $351\hat{a}{\downarrow_{3.O}}$ die kleineren Platznummern in der Brauertafel von $3.O$ besitzen.
Demnach ist $351\hat{a}$ als Brauercharakter von $3.G$ entweder irreduzibel oder er zerfällt in eine Summe aus einem Charakter vom Grad 27 und einem vom Grad 324, der jeweils irreduzibel auf $3.O$ einschränkt.

Wäre $351\hat{a}$ irreduzibel, so gäbe es nach Proposition III.(1.2) einen einfachen $e_\lambda \mathbb{F}_4(3.G)e_\lambda$-Modul der Dimension 5. Da der kondensierte Block Morita-äquivalent zum Block der Gruppenalgebra ist, können wir diesen Fall durch Tabelle V.8 ausschließen.
Alle einfachen Charaktere vom Grad 27 bzw. 324 des betrachteten Blocks schränken auf genau einen einfachen Charakter von $3.O$ des entsprechenden Grades ein. Demnach unterscheiden sich alle Charaktere vom Grad 27 bzw. 324 eines treuen Blocks nur auf den Klassen $11A$-B, $33A$-D und $21C$-E von $3.G$, da die übrigen durch die Einschränkung bereits festliegen. Die gewählte Kondensationsuntergruppe K hat aber Exponent 3 und folglich ist die Dimension der Kondensierten der entsprechenden einfachen 27- bzw. 324-dimensionalen Moduln nach Proposition III.(1.2) jeweils stets dieselbe. Dabei kondensiert ein Charakter von Grad 27 zu einem Modul der Dimension 1 und ein Charakter vom Grad 324 zu einem Modul der Dimension 4. Nun liefert Tabelle V.8, dass der betrachtete Block jeweils genau einen einfachen Charakter vom Grad 27 und einen vom Grad 324 enthält.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die gegebene Darstellung $27a$ zu einem Modul gehört, der im vierten Block liegt, zu dem auch der gewöhnliche Charakter $\chi_{66} = 351a$ gehört. Um den Charakter ψ zu $27a$ zu bestimmen, schränken wir den Basic-Set-Charakter $351\hat{a}$ ebenfalls auf die zweite maximale Untergruppe $3.U := 6.U_6(2)$ von $3.G$ ein. Wir erhalten

$$351\hat{a}{\downarrow}_{3.U} = 3 \cdot 6a + 5 \cdot 15a + 2 \cdot 84a + 90a.$$

Durch Betrachtung der Grade schlussfolgern wir, dass $\psi{\downarrow}_{3.U} = 2 \cdot 6a + 15a$ ist. Betrachten wir zusätzlich den Charakter $27a$ aus der Einschränkung von $351\hat{a}$ auf $3.O$, so liegt damit der Charakter ψ von $3.G$ bis auf die Klassen $21C$-E fest. Diese Werte ergeben sich, indem wir ein Wort für einen Konjugiertenklassenvertreter der Klasse $21A$ der einfachen Gruppe G in der Darstellung $27a$ auswerten und den zugehörigen Brauercharakterwert bestimmen, da die Standarderzeuger von $3.G$ Urbilder der Standarderzeuger von G sind. Liegt $27a$ fest, so erhalten wir $324a$ durch Subtraktion von $27a$ von $351\hat{a}$.

Da der Charakter $27a$ nun explizit vorliegt, können wir das Tensorprodukt $27a \otimes 78a$ der Charaktere im Basic-Set zerlegen. Wir erhalten damit die Gleichung

$$27a \otimes 78a = 2 \cdot 351\hat{a} - 7\,722\hat{a} - 27\,027\hat{a} - 96\,525\hat{a} - 235\,872\hat{a} + 368\,550\hat{a}.$$

Setzen wir unsere Kenntnis der Zerlegung von $351\hat{a}$ ein und vergleichen wir das Ergebnis mit der MeatAxe-Zerlegung desselben Tensorproduktes der zugehörigen Moduln, so erhalten wir den einfachen Charakter

$$1\,728a = 368\,550\hat{a} - 235\,872\hat{a} - 96\,525\hat{a} - 27\,027\hat{a} - 7\,722\hat{a} + 324a.$$

Zur Bestimmung der Brauercharaktere der bereits bekannten, irreduziblen Darstellungen $4\,725a$ und $4\,725b$ schränken wir analog das Tensorprodukt der Charaktere $27a \otimes 350a$ auf $3.U$ und auf $3.O$ ein. Wir erhalten dadurch die Zerlegungen

$$\begin{aligned} 27a \otimes 350a{\downarrow}_{3.O} &= 2 \cdot 27a + 2\,268a + 2\,268c + 2 \cdot 2\,430a, \\ 27a \otimes 350a{\downarrow}_{3.U} &= 12 \cdot 6a + 22 \cdot 15a + 2 \cdot 84a + 12 \cdot 90a + 6 \cdot 204a + 4 \cdot 720a + 4 \cdot 924a. \end{aligned}$$

Auch hier legt die Wahl der Fusion von $3.O$ in $3.G$ fest, in welchem Block die einfachen Konstituenten des eingeschränkten Charakters liegen. Unsere oben gewählte Fusion stellt folglich auch hier keine Einschränkung dar. Nach unserer anfänglichen Überlegung müssen die Charaktere zu $4\,725a$ und $4\,725b$ ein unter dem nicht-trivialen Galoisautomorphismus σ von $\mathbb{Q}(b13)/\mathbb{Q}$ konjugiertes Paar von Charakteren bilden. Nach Tabelle V.8 sind sie die einzigen Charaktere des Blocks, welche die notwendige Voraussetzung erfüllen, den gleichen Grad zu haben. Es seien ψ_1 und ψ_2 die beiden einfachen Charaktere vom Grad $4\,725$, die im Tensorprodukt $27a \otimes 350a$ vorkommen. Da in der Zerlegung von $27a \otimes 350a{\downarrow_{3.O}}$ in Charaktere nur die einfachen Charaktere $2\,268a$ und $2\,268c$ von $3.O$ unter σ konjugiert und die restlichen Charaktere beider Zerlegungen fix sind, erhalten wir ohne Einschränkung

$$\begin{aligned}\psi_1{\downarrow_{3.O}} &= 27a + 2\,268a + 2\,430a,\\ \psi_2{\downarrow_{3.O}} &= 27a + 2\,268c + 2\,430a,\end{aligned}$$

während sich die Konstituenten der Einschränkung auf $3.U$ zu gleichen Teilen auf beide Charaktere verteilen. Durch beide Untergruppen liegen beide Charaktere bis auf die Klassen $21C$-E fest. Eine Auswertung eines Wortes eines Konjugiertenklassenvertreters von $21A$ der einfachen Gruppe G in den Darstellungen $4\,725a$ und $4\,725b$ ergibt, dass beide Charaktere auf diesen Klassen den Wert 0 annehmen. Die gewonnenen Charaktere ψ_1 und ψ_2 unterscheiden sich nur auf den Klassentripeln $(13A, 39A, 39B)$ und $(13B, 39C, 39D)$, wobei ihre zugehörigen Wertetripel durch σ ineinander überführt werden. Den Charakter ψ_1 der Darstellung $4\,725a$ zu zuweisen, ist folglich gleichbedeutend damit, die Klasse $13A$ des algebraisch konjugierten Paares $(13A, 13B)$ dadurch festzulegen, dass auf ihr $4\,725a$ den Wert $-1-b13$ annimmt. Dies können wir ohne Einschränkung tun, da wir sonst die Darstellungen $4\,725a$ und $4\,725b$ umbenennen.

Mit Hilfe der nun vorliegenden treuen Charaktere können aus Tabelle V.8 die restlichen einfach bestimmt werden. Wir bezeichnen dazu mit φ_i den einfachen Charakter, der zur i-ten Zeile der Tabelle gehört. Aufgrund der Oberen-Dreiecks-Form der Zerlegungstabelle, können wir aus den Spalten 2 bis 8 unmittelbar die einfachen Charaktere $6\,966a := \varphi_6$, $16\,794a := \varphi_7$, $68\,796a := \varphi_8$, $112\,320a := \varphi_9$, $179\,388a := \varphi_{10}$ und $524\,664a := \varphi_{11}$ ermitteln.

Die daraus resultierende Zerlegungsmatrix haben wir in Tabelle Z.6 angegeben. Da die treuen Blöcke komplex konjugiert sind, ist diese Zerlegungsmatrix für beide Blöcke gültig.

3.3 Der Hauptblock reloaded

Wir bestimmen die noch fehlenden, einfachen Brauercharaktere des Hauptblocks, indem wir die zehn Tensorprodukte $78a \otimes 78a$, $78a \otimes 350a$, $78a \otimes 572a$, $78a \otimes 1352a$, $350a \otimes 350a$, $350a \otimes 572a$, $350a \otimes 1352a$, $572a \otimes 572a$, $27a \otimes 324b$ und $27a \otimes 4725c$ kondensieren und zerlegen. Dabei ist weiterhin $27a$ die gleichnamige Darstellung bzw. der gleichnamige Charakter der vorangestellten Behandlung der treuen Blöcke. Mit $324b$ und $4\,725c$ ist jeweils die kontragrediente Darstellung bzw. der komplex konjugierte Charakter von $324a$ bzw. $4\,725a$ aus Abschnitt 3.2 bezeichnet.

Als Kondensationsuntergruppe K wählen wir den elementar-abelschen 3-Normalteiler der Ordnung 243 der zweiten maximalen Untergruppe $N := 3^5.U_4(2){:}2$ von $O_7(3)$. Aus den 35 Doppel-

nebenklassenvertretern von $N\backslash G/N$ und den drei in [5] verfügbaren Erzeugern von N, erhalten wir insgesamt ein träges Erzeugendensystem aus 37 Elementen.
Berechnen wir für die ersten fünf bereits bekannten, einfachen Brauercharaktere die Dimension des zugehörigen kondensierten Moduls, so stellen wir fest, dass der Modul 1 352a zu Null kondensiert. Nach Kondensation der ersten sieben der oben angegebenen Tensorprodukte und deren Zerlegung mit der MEATAXE, sehen wir außerdem, dass 1 352a der einzige einfache Modul ist, der bei der angewandten Kondensation verschwindet, da wir insgesamt 13 nicht-isomorphe irreduzible Moduln der kondensierten Algebra finden und die nicht-treuen, einfachen Moduln 1 441 792a und 2 555 904a außerhalb des Hauptblocks nach Proposition III.(1.2) zu Moduln der Dimensionen 6 016 und 10 432 kondensieren.

Um den aus dem Verschwinden von 1 352a resultierenden blinden Fleck auszugleichen, ziehen wir eine zweite Kondensationsuntergruppe hinzu, bezüglich welcher 1 352a nicht zu Null kondensiert. Hierfür wählen wir K als den extra-speziellen 3-Normalteiler der elften maximalen Untergruppe $M := 3_+^{1+6}{:}2^{3+4}{:}3^2{:}2$ von G.
Bei dieser Kondensationsuntergruppe ergibt sich mit Proposition III.(1.2), dass aus den ersten fünf einfachen Brauercharakteren nur 78a verschwindet und 1 352a zu einem 2-dimensionalen Modul kondensiert.
Ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen von M in G besitzt 30 Elemente. Unter Berücksichtigung der Erzeuger dieser Untergruppe erhalten wir in diesem Fall ein träges Erzeugendensystem der Kardinalität 32.

Mit beiden Kondensationsuntergruppen können wir folglich die Vielfachheit eines jeden Kompositionsfaktors in den untersuchten Tensorprodukten angeben. Die Information dieser Zerlegungen können wir in Tabelle V.9 ablesen. Dort sind auch die Dimensionen der kondensierten Moduln zu den beiden verschiedenen Kondensationsuntergruppen in der zweiten und dritten Spalte aufgeführt. Die Erkenntnis, dass außer 78a auch die Moduln, welche zu den Zeilen 8 und 9 von Tabelle V.9 gehören, bei einer Kondensation mit $K = 3_+^{1+6}$ verschwinden, folgt daraus, dass aus der Zerlegung der ersten sieben kondensierten Tensorprodukte in diesem Fall nur elf Isomorphietypen von Kompositionsfaktoren auftauchen. Demnach kondensieren neben 78a zwei weitere einfache Moduln zu Null. Nach unserer anfänglichen Analyse gibt es im Hauptblock jeweils ein Paar von komplex und ein Paar von σ-konjugierten Brauercharakteren. Da die entsprechenden Irrationalitäten auf den Klassen 11A-B bzw. 13A-B angenommen werden, kondensieren beide Moduln des jeweiligen Paares zu Moduln der gleichen Dimension. Folglich muss es sich bei den beiden verschwindenden Moduln um zwei Konjugierte handeln. Aus der Zerlegung des dritten Tensorproduktes erhalten wir damit, dass es sich dabei um die zu den Zeilen 8 und 9 von Tabelle V.9 gehörenden Moduln handelt.

Aus Tabelle V.9 können wir nun die noch fehlenden einfachen Brauercharaktere bestimmen. Dazu bezeichnen wir wie gewohnt mit φ_i den einfachen Brauercharakter, welcher der i-ten Zeile der Tabelle entspricht.
Die Zerlegung aus Spalte 2 liefert unter Berücksichtigung der bereits bekannten ersten fünf Brauercharaktere den neuen Charakter $24\,596 := \varphi_7$. Aus Spalte 4 gewinnen wir im Anschluss die Charaktersumme $\varphi_6 + \varphi_{10}$ und aus Spalte 5 die Summe $4 \cdot \varphi_6 + 2 \cdot \varphi_{10}$. Ein Vergleich der beiden Charaktersummen liefert damit die einfachen Charaktere $7\,942a := \varphi_6$ und $34\,892a := \varphi_{10}$.

Nr.	3^5	3_+^{1+6}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	.	.	4	14	2	4	16	.	1
2	6	.	5	.	2	8	16	4	20	34	1	2
3	10	6	2	.	.	3	9	1	2	12	1	1
4	14	2	4	.	2	4	10	2	12	23	2	1
5	.	2	2	2	.	7	8	2	12	30	1	3
6	46	16	.	.	.	1	4	.	.	4	.	.
7	60	4	.	1	.	2	.	.	4	4	.	1
8	64	.	.	.	1	.	.	.	2	2	1	.
9	64	.	.	.	1	.	.	.	2	2	.	.
10	128	14	.	.	.	1	2	2	.	.	.	1
11	180	12	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
12	180	12	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
13	204	10	.	.	1	.	.	.	.	4	.	.
14	516	34	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.

Tabelle V.9: Kondensationsergebnisse für den 2-Hauptblock von Fi_{22}

Analog dazu liefert Spalte 3 die Summe $2 \cdot \varphi_{13} + \varphi_8 + \varphi_9$, aus der wir wiederum zusammen mit der Information aus Spalte 8, die $4 \cdot \varphi_{13} + 2 \cdot \varphi_8 + 2 \cdot \varphi_9$ liefert, den einfachen Charakter $31\,668a := \varphi_{13}$ und die Charaktersumme $\varphi_8 + \varphi_9$ erhalten. Aus Spalte 7 lesen wir mit der gesammelten Information den Charakter $163\,084 := \varphi_{14}$ ab und Spalte 6 liefert einen Charakter für die Summe $\varphi_{11} + \varphi_{12}$. Abschließend nutzen wir die beiden letzten Spalten, um die Charaktersummen $\varphi_8 + \varphi_9$ und $\varphi_{11} + \varphi_{12}$ aufzulösen. Damit erhalten wir schließlich die einfachen Brauercharaktere $5\,824a := \varphi_8$ und $5\,824b := \varphi_9$, sowie $62\,952a := \varphi_{11}$ und $62\,952b := \varphi_{12}$. Dabei bezeichnen wir mit $5\,824a$ bzw. $62\,925a$ jeweils den Charakter des Kompositionsfaktors der entsprechenden Dimension, der in der Zerlegung des Tensorproduktes $27a \otimes 324b$ bzw. $27a \otimes 4\,725c$ vorkommt. Eine Zerlegungsmatrix des Hauptblocks geben wir in Tabelle Z.5 an.

4 $6.Fi_{22}$ und $6.Fi_{22}.2$ in Charakteristik 2 und 3

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Zerlegungsmatrizen der sechsfachen Überlagerungsgruppe von Fi_{22} und ihrer Automorphismengruppe und beenden damit wie in der Einleitung erwähnt die Klassifikation der einfachen Brauercharaktere der zu Fi_{22} verwandten Gruppen in den Charakteristiken 2 und 3. Wie bereits anfänglich beschrieben, können wir mit den bereits bestimmten einfachen 2- und 3-modularen Charakteren ohne großen Aufwand die Zerlegungsmatrizen der Blöcke dieser Gruppen bestimmen.

Die Aufgabe vereinfacht sich in diesen Fällen, da unter Berücksichtigung eventuell fusionierender Konjugiertenklassen, die einfachen Brauercharaktere durch unsere bisherige Arbeit bereits bekannt sind. Denn fassen wir in gerader Charakteristik die Brauercharaktere als $2'$-Klassenfunktionen auf, so ist ersichtlich, dass die einfachen Brauercharaktere von $6.G$ bereits durch die einfachen Brauercharaktere von $3.G$ gegeben sind. Ebenso ergeben sich die einfachen 3-modularen Charaktere von $6.G$ durch die 3-modularen Charaktere von $2.G$.

Für die Automorphismengruppen gilt weiter, dass im Falle von gerader Charakteristik jeder Charakter, der invariant unter dem äußeren Automorphismus ist, eindeutig zu einem Charakter der Automorphismengruppe fortsetzt. Die nicht-invarianten Charaktere fusionieren auf bekannte Weise und wir erhalten aus jedem Paar konjugierter Charaktere einen Charakter der Automorphismengruppe durch Induktion. Damit resultieren aus den einfachen 2-modularen Charakteren der Gruppe $6.G$ unmittelbar die einfachen 2-modularen Charaktere von $6.G.2$. In Analogie zum Fall der geraden Charakteristik ergeben sich in Charakteristik 3 die gesuchten einfachen Brauercharaktere von $6.G.2$ aus den Ergebnissen für die behandelte Gruppe $2.G.2$.

Wir wollen deshalb im Folgenden nur die Invarianten der Blöcke angeben, sowie die Information, welche Charaktere beim Übergang zur Automorphismengruppe fusionieren. Die zugehörigen Zerlegungsmatrizen sind im Anhang angegeben.

4.1 6.Fi_{22} in Charakteristik 2

Die sechsfache Überlagerungsgruppe von G besitzt fünf 2-Blöcke:

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	18	108	14
2	1	2	1
3	2	4	1
4	18	84	11
5	18	84	11

Die Blöcke 2 und 3 enthalten dabei jeweils alle Charaktere vom Grad 1 441 792 bzw. 2 555 904, die jeweils irreduzibel auf denselben Brauercharakter einschränken.

Die einfachen Brauercharaktere für den Hauptblock und die beiden konjugierten Blöcke 4 und 5 sind durch die einfachen Brauercharaktere von $3.G$ gegeben. Damit ist die Zerlegung der eingeschränkten gewöhnlichen Charaktere, die durch Inflation von gewöhnlichen Charakteren von $3.G$ herrühren, bereits bekannt. Für die im Hauptblock liegenden enthält die Zerlegungsmatrix des 2-Hauptblocks von $3.G$, die in Tabelle Z.5 dargestellt ist, diese Information. Für diejenigen, die in den beiden konjugierten Blöcken liegen, sind die zugehörigen Zerlegungen der Zerlegungsmatrix aus Tabelle Z.6 zu entnehmen. Wir geben deswegen hier nur noch die fehlenden Zerlegungen in Tabelle Z.7 für den Hauptblock und in Tabelle Z.8 für einen der konjugierten Blöcke an.

4.2 6.Fi_{22}.2 in Charakteristik 2

Die sechsfache Überlagerung der Automorphismengruppe von G besitzt vier Blöcke:

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	19	141	12
2	2	4	1
3	3	5	1
4	18	84	11

Im Falle des Hauptblocks von $6.G$ sind alle einfachen Brauercharaktere bis auf die beiden Paare $(5\,824a, 5\,824b)$ und $(62\,952a, 62\,952b)$ invariant unter α. Somit fusionieren die Charaktere eines Paars zu einem Charakter von $6.G.2$, während die übrigen eindeutig fortsetzen. Die zugehörige Zerlegungsmatrix geben wir in Tabelle Z.9 an.

Der zweite Block enthält alle gewöhnlichen Charaktere vom Grad 1 441 792. Sie schränken alle irreduzibel auf einen Brauercharakter ein. Ebenso enthält der dritte Block alle gewöhnlichen Charaktere vom Grad 2 555 904, die ebenfalls irreduzibel einschränken, sowie den gewöhnlichen Charakter vom Grad 5 111 808.

Die Brauercharaktere von $6.G$, die sich dort auf die Blöcke 4 und 5 verteilen, sind paarweise unter α konjugiert. Bis auf die Charaktere vom Grad 4 725 liegen die fusionierenden Paare durch die Charaktergrade fest. Eine Betrachtung der Operation von α auf den Charakteren vom Grad 4 725 liefert, dass dort $4\,725a$ und $4\,725d$ sowie $4\,725b$ und $4\,725c$ fusionieren. Eine Zerlegungsmatrix des vierten Blocks von $6.G.2$ ist in Tabelle Z.10 angegeben.

4.3 6.Fi_{22} in Charakteristik 3

Die Gruppe $6.G$ besitzt fünf Blöcke:

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	10	144	22
2	2	9	2
3	2	9	2
4	1	3	1
5	10	117	18

Der vierte Block enthält die gewöhnlichen Charaktere vom Grad 1791153. Sie schränken irreduzibel zu einem Brauercharakter ein. Aus den bereits bekannten einfachen Brauercharakteren von $2.G$ können wir ebenfalls unmittelbar die Zerlegungsmatrizen der Blöcke 2 und 3 angeben:

360855	1	.
577368	.	1
938223	1	1
360855	1	.
360855	1	.
577368	.	1
577368	.	1
938223	1	1
938223	1	1

852930	1	.
1876446	.	1
2729376	1	1
852930	1	.
852930	1	.
1876446	.	1
1876446	.	1
2729376	1	1
2729376	1	1

Wieder sind die Zerlegungen der eingeschränkten gewöhnlichen Charaktere, die durch Inflation der gewöhnlichen Charaktere des Haupt- bzw. fünften 3-Blocks von $2.G$ entstehen, bekannt. Sie sind in den Tabellen Z.2 und Z.1 festgehalten. Die Zerlegungen der restlichen Charaktere geben wir für den Hauptblock in Tabelle Z.11 und für den fünften Block in Tabelle Z.12 an.

4.4 6.Fi_{22}.2 in Charakteristik 3

Die Invarianten der fünf Blöcke von $6.G.2$ sind

B	$d(B)$	$k(B)$	$\ell(B)$
1	10	141	32
2	2	9	4
3	2	9	4
4	1	3	2
5	10	72	9

Wieder können wir durch Kenntnis der einfachen Brauercharaktere von $2.G.2$ unmittelbar die Zerlegungsmatrizen der Blöcke 2, 3 und 4 angeben. Sie lauten in dieser Reihenfolge:

360855	1	.	.	.
360855	.	1	.	.
577368	.	.	1	.
577368	.	.	.	1
938223	1	.	1	.
938223	.	1	.	1
721710	1	1	.	.
1154736	.	.	1	1
1876446	1	1	1	1

,

852930	1	.	.	.
852930	.	1	.	.
1876446	.	.	1	.
1876446	.	.	.	1
2729376	1	.	1	.
2729376	.	1	.	1
1705860	1	1	.	.
3752892	.	.	1	1
5458752	1	1	1	1

und

1791153	1	.
1791153	.	1
3582306	1	1

Für den Hauptblock und den fünften Block geben wir nur den „unteren“ Teil der jeweiligen Zerlegungsmatrix an, d.h. der Teil, der die Zerlegungen eingeschränkter gewöhnlicher Charaktere enthält, die nicht durch Inflation von Charakteren von $2.G.2$ hervorgehen. Für den Hauptblock ist die zugehörige Zerlegungsmatrix in Tabelle Z.13 zu finden, während für den fünften Block diese Information in Tabelle Z.14 enthalten ist.

Anhang Z

Zerlegungsmatrizen & Charaktertafeln

In diesem Anhang findet der Leser alle Zerlegungsmatrizen aufgeführt, die im Verlauf von Kapitel V berechnet werden. Der Übersichtlichkeit wegen bekommt jede Tabelle dabei eine eigene Seite zugewiesen. Einige Tabellen sind so groß, das sie außer in unlesbarer Schrift nicht auf eine Seite passen. In diesen Fällen haben wir es vorgezogen, die Tabellen maßvoll aufzuteilen.
Die auftretenden φ_i, welche die Spalten der Zerlegungsmatrizen indizieren, entsprechen hier den φ_i, die in Kapitel V definiert worden sind.

Im Anschluss an die Zerlegungsmatrizen sind die 2- und 3-modularen Charaktertafeln von Fi_{22} aufgeführt. Die Zeilen der Tafeln sind den Konventionen des modularen Atlas folgend ebenfalls mit φ_i's indiziert. Diese stehen aber in keinem Zusammenhang mit den oben genannten φ_i's.
Die Frobenius-Schur Indikatoren (vgl. I.9 in [22]) der einfachen 2-modularen Charaktere sind noch zu einem Großteil unbekannt. Dies kennzeichnen wir durch ein '?' in den betreffenden Spalten der Charaktertafel.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
352	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2 080	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2 080	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5 824	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5 824	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5 824	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5 824	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13 728	3	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13 728	1	3	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27 456	4	4	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
48 048	3	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
48 048	1	3	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
105 600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
105 600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
123 200	7	7	1	1	2	2	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
133 056	4	4	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
146 432	6	4	1	1	2	1	1	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
146 432	4	6	1	1	1	2	2	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
228 800	7	7	1	1	2	2	2	2	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.
235 872	11	10	1	1	4	2	2	4	2	1	.	.	1	.	.	.	.	.
235 872	10	11	1	1	2	4	4	2	1	2	.	.	.	1	.	.	.	.
320 320	4	2	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
320 320	2	4	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.
400 400	8	5	1	.	3	1	1	3	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.
400 400	5	8	.	1	1	3	3	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.
436 800	9	6	1	1	3	1	1	3	1	.	.	.	2	1	1	.	.	.
436 800	6	9	1	1	1	3	3	1	.	1	.	.	1	2	.	1	.	.
480 480	11	9	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
480 480	9	11	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	.	.	.	1	.	.
686 400	12	7	1	.	4	2	2	4	1	.	1	1	1	.	2	.	.	.
686 400	7	12	.	1	2	4	4	2	.	1	1	1	.	1	.	2	.	.
915 200	19	14	2	1	6	4	4	6	2	1	1	1	2	1	2	.	.	.
915 200	14	19	1	2	4	6	6	4	1	2	1	1	1	2	.	2	.	.
1 029 600	20	20	2	2	6	6	6	6	2	2	1	1	2	2	1	1	.	.
1 201 200	21	18	2	1	7	5	5	7	2	1	2	1	2	1	2	1	.	.
1 201 200	18	21	1	2	5	7	7	5	1	2	1	2	1	2	1	2	.	.
1 297 296	29	18	2	2	9	5	5	9	3	1	1	1	3	2	3	.	.	.
1 297 296	18	29	2	2	5	9	9	5	1	3	1	1	2	3	.	3	.	.
1 441 792	20	20	1	1	6	6	6	6	1	1	1	1	3	3	2	2	.	.
1 663 200	6	8	1	1	2	2	2	2	.	.	.	.	2	3	.	2	1	.
1 663 200	8	6	1	1	2	2	2	2	.	.	.	.	3	2	2	.	.	1
2 196 480	16	18	2	2	5	5	5	5	1	1	1	1	3	3	1	2	1	.
2 196 480	18	16	2	2	5	5	5	5	1	1	1	1	3	3	2	1	.	1
2 358 720	37	36	3	3	12	10	10	12	3	2	2	2	5	4	3	3	.	.
2 358 720	36	37	3	3	10	12	12	10	2	3	2	2	4	5	3	3	.	.
2 402 400	19	14	2	1	6	4	4	6	1	.	1	1	4	3	3	1	1	.
2 402 400	14	19	1	2	4	6	6	4	.	1	1	1	3	4	1	3	.	1
2 555 904	26	24	3	2	8	7	7	8	2	1	2	1	3	3	2	2	1	.
2 555 904	24	26	2	3	7	8	8	7	1	2	1	2	3	3	2	2	.	1

Tabelle Z.1: Zerlegungsmatrix des treuen 3-Blocks von $2.Fi_{22}$

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
1430	1	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
3080	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
10725	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1
13650	1	1	1	1	.	1	1	1	.	.	.
30030	2	3	1	1	2	2	1	1	.	.	1
32032	1	3	1	1	1	1	.	.	.	.	1
43680	.	2	1	2	1	.	.	.	.	.	.
45045	1	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
48048	1	1	.	1	2	1	1	1	.	.	1
50050	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	1
50050	.	1	.	1	1	.	.	.	1	1	.
75075	2	3	1	2	1	2	1	1	.	.	1
75075	1	1	1	1	2	1	1	1	.	.	.
75075	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
81081	.	3	1	2	2	.	.	.	.	.	.
114400	.	2	.	2	2	1	.	.	.	.	2
138600	.	2	.	3	2	.	.	.	1	.	1
138600	.	2	.	3	2	.	.	.	.	1	1
150150	1	1	.	1	1	1	1	1	.	.	.
205920	1	2	1	3	3	1	1	1	.	.	1
289575	2	3	1	3	4	3	2	2	.	.	1
300300	1	4	1	5	6	1	1	1	1	1	2
320320	3	3	1	3	5	3	3	3	.	.	1
370656	.	5	1	7	6	.	.	.	1	1	1
400400	2	4	1	5	6	2	2	2	1	1	1
400400	2	4	1	5	6	2	2	2	1	1	1
400400	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
400400	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
450450	1	2	1	2	5	1	1	1	.	.	2
450450	.	.	.	.	4	.	1	1	1	1	.
576576	.	2	.	3	6	.	1	1	1	1	1
579150	2	5	1	8	8	3	2	2	1	1	2
582400	.	.	.	2	1	.	1	.	.	.	.
582400	.	.	.	2	1	.	.	1	.	.	.
600600	2	3	1	3	6	2	2	2	1	1	1
600600	.	.	.	3	3	.	1	1	.	.	.
600600	.	.	.	3	3	.	1	1	.	.	.
675675	2	3	1	5	4	2	2	2	.	.	1
720720	1	4	.	6	6	1	1	1	1	1	2
800800	1	3	.	2	6	1	1	1	1	1	2
972972	2	6	.	6	9	2	2	2	.	.	4
982800	.	1	.	3	6	.	2	1	1	1	.
982800	.	1	.	3	6	.	1	2	1	1	.
1201200	2	6	1	9	10	2	2	2	1	1	3
1360800	4	6	2	10	16	4	5	5	1	1	2
1372800	4	5	2	7	12	3	5	5	1	1	1
1441792	2	3	.	6	9	1	3	3	1	1	2
2027025	1	3	.	6	10	1	2	2	1	1	2
2050048	4	10	2	14	19	4	5	5	2	2	4
2316600	1	5	.	11	14	1	2	2	2	2	3
2402400	3	7	1	13	18	3	5	5	2	2	3
2555904	4	8	2	12	18	3	6	6	2	2	2
2555904	2	9	2	14	17	2	3	3	2	2	4

Tabelle Z.2: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $2.Fi_{22}$ (linke Hälfte)

	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3080	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10725	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13650	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30030	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32032	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43680	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
45045	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
48048	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
75075	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
81081	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
114400	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
138600	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
138600	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
150150	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
205920	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.
289575	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
300300	4	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.
320320	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.
370656	5	3	2	.	.	.	1	.	.	.	.
400400	3	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.
400400	3	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.
400400	2	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.
400400	2	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.
450450	2	2	1	1	.	.	1	.	.	.	1
450450	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1
576576	3	1	1	.	.	.	1	1	.	.	1
579150	5	2	3	.	.	.	1	1	.	.	.
582400	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.
582400	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.
600600	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1
600600	1	.	1	.	1	1	1	2	.	.	.
600600	1	.	1	.	1	1	1	2	.	.	.
675675	1	1	1	1	1	1	1	2	.	.	.
720720	6	3	2	.	.	.	.	.	1	1	.
800800	4	2	1	.	.	.	.	.	1	1	1
972972	6	4	2	1	.	.	.	.	1	1	1
982800	3	1	1	.	.	1	1	2	.	1	1
982800	3	1	1	.	1	.	1	2	1	.	1
1201200	7	3	3	.	1	1	1	1	1	1	.
1360800	6	2	2	.	1	1	4	4	.	.	.
1372800	3	1	1	1	1	1	3	4	.	.	1
1441792	5	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1
2027025	6	2	3	.	2	2	1	2	2	2	1
2050048	10	5	4	1	1	1	3	3	1	1	1
2316600	11	4	5	.	2	2	1	2	2	2	1
2402400	9	3	4	.	2	2	3	5	1	1	1
2555904	8	3	3	1	2	2	3	5	1	1	2
2555904	11	5	5	.	2	2	2	3	2	2	1

Tabelle Z.2: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $2.Fi_{22}$ (rechte Hälfte)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	1	.	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	1	.	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
3080	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
3080	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
10725	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
10725	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1
13650	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
13650	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
30030	2	.	3	.	1	.	1	.	2	.	2	.	1	.	1	.
30030	.	2	.	3	.	1	.	1	.	2	.	2	1	.	.	1
32032	1	.	3	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.
32032	.	1	.	3	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1
43680	.	.	2	.	1	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.
43680	.	.	.	2	.	1	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.
45045	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.
45045	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.
48048	1	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	.	1	.	1	.
48048	.	1	.	1	.	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.	1
50050	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.
50050	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1
50050	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.
50050	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
75075	2	.	3	.	1	.	1	1	1	.	2	.	1	.	1	.
75075	.	2	.	3	.	1	1	1	.	1	.	2	1	.	.	1
75075	.	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	1	1	.	.	.
75075	1	.	1	.	1	.	.	1	1	1	1	.	1	.	.	.
75075	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
81081	.	.	3	.	1	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.
81081	.	.	.	3	.	1	.	2	.	2	.	.	.	.	.	.
114400	.	.	1	1	.	.	1	1	2	.	1	.	.	.	2	.
114400	.	.	1	1	.	.	1	1	.	2	.	1	.	.	.	2
277200	.	.	2	2	.	.	3	3	2	2	.	.	.	1	1	1
150150	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.
150150	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.
205920	1	.	2	.	1	.	3	.	2	1	1	.	1	.	1	.
205920	.	1	.	2	.	1	.	3	1	2	.	1	1	.	.	1
289575	1	1	1	2	.	1	2	1	2	2	.	3	2	.	.	1
289575	1	1	2	1	1	.	1	2	2	2	3	.	2	.	1	.

Tabelle Z.3: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $Fi_{22}.2$ (linker-oberer Quadrant)

	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{25}	φ_{26}	φ_{27}	φ_{28}	φ_{29}	φ_{30}	φ_{31}	φ_{32}
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3080	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3080	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10725	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10725	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13650	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13650	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30030	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30030	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32032	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32032	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43680	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43680	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
45045	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
45045	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
48048	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
48048	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50050	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
75075	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
75075	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75075	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
81081	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
81081	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
114400	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
114400	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
277200	2	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
150150	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
150150	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
205920	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
205920	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
289575	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
289575	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.

Tabelle Z.3: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $\mathrm{Fi}_{22}.2$ (rechter-oberer Quadrant)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}
300300	1	.	4	.	1	.	4	1	5	1	1	.	1	1	2	.
300300	.	1	.	4	.	1	1	4	1	5	.	1	1	1	.	2
320320	2	1	3	.	1	.	2	1	3	2	3	.	3	.	1	.
320320	1	2	.	3	.	1	1	2	2	3	.	3	3	.	.	1
370656	.	.	2	3	.	1	5	2	4	2	.	.	.	1	1	.
370656	.	.	3	2	1	.	2	5	2	4	.	.	.	1	.	1
800800	2	2	4	4	1	1	5	5	6	6	2	2	4	2	1	1
800800	.	.	1	1	.	.	2	2	2	2	.	.	.	.	1	1
450450	.	1	1	1	.	1	1	1	4	1	1	.	1	.	2	.
450450	1	.	1	1	1	.	1	1	1	4	.	1	1	.	.	2
450450	.	.	.	.	.	.	.	.	3	1	.	.	1	1	.	.
450450	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	.	.	1	1	.	.
576576	.	.	2	.	.	.	3	.	5	1	.	.	1	1	1	.
576576	.	.	.	2	.	.	.	3	1	5	.	.	1	1	.	1
579150	1	1	4	1	1	.	6	2	6	2	3	.	2	1	2	.
579150	1	1	1	4	.	1	2	6	2	6	.	3	2	1	.	2
1164800	.	.	.	.	.	.	2	2	1	1	.	.	1	.	.	.
600600	.	2	1	2	.	1	2	1	4	2	2	.	2	1	1	.
600600	2	.	2	1	1	.	1	2	2	4	.	2	2	1	.	1
1201200	.	.	.	.	.	.	3	3	3	3	.	.	2	.	.	.
675675	.	2	1	2	.	1	2	3	2	2	2	.	2	.	1	.
675675	2	.	2	1	1	.	3	2	2	2	.	2	2	.	.	1
720720	1	.	3	1	.	.	2	4	4	2	1	.	1	1	2	.
720720	.	1	1	3	.	.	4	2	2	4	.	1	1	1	.	2
800800	.	1	2	1	.	.	1	1	5	1	1	.	1	1	2	.
800800	1	.	1	2	.	.	1	1	1	5	.	1	1	1	.	2
972972	1	1	4	2	.	.	3	3	8	1	2	.	2	.	4	.
972972	1	1	2	4	.	.	3	3	1	8	.	2	2	.	.	4
1965600	.	.	1	1	.	.	3	3	6	6	.	.	3	2	.	.
1201200	.	2	2	4	.	1	4	5	5	5	1	1	2	1	2	1
1201200	2	.	4	2	1	.	5	4	5	5	1	1	2	1	1	2
1360800	2	2	3	3	1	1	5	5	8	8	2	2	5	1	1	1
1360800	2	2	3	3	1	1	5	5	8	8	2	2	5	1	1	1
1372800	2	2	3	2	1	1	4	3	7	5	2	1	5	1	1	.
1372800	2	2	2	3	1	1	3	4	5	7	1	2	5	1	.	1
1441792	1	1	2	1	.	.	4	2	6	3	1	.	3	1	2	.
1441792	1	1	1	2	.	.	2	4	3	6	.	1	3	1	.	2
2027025	.	1	1	2	.	.	4	2	7	3	1	.	2	1	2	.
2027025	1	.	2	1	.	.	2	4	3	7	.	1	2	1	.	2
2050048	2	2	6	4	1	1	7	7	12	7	4	.	5	2	4	.
2050048	2	2	4	6	1	1	7	7	7	12	.	4	5	2	.	4
2316600	.	1	1	4	.	.	4	7	7	7	1	.	2	2	2	1
2316600	1	.	4	1	.	.	7	4	7	7	.	1	2	2	1	2
2402400	1	2	3	4	.	1	8	5	11	7	1	2	5	2	2	1
2402400	2	1	4	3	1	.	5	8	7	11	2	1	5	2	1	2
2555904	2	2	4	4	1	1	7	5	9	9	2	1	6	2	1	1
2555904	2	2	4	4	1	1	5	7	9	9	1	2	6	2	1	1
2555904	1	1	5	4	1	1	7	7	10	7	1	1	3	2	3	1
2555904	1	1	4	5	1	1	7	7	7	10	1	1	3	2	1	3

Tabelle Z.3: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $Fi_{22}.2$ (linker-unterer Quadrant)

	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{25}	φ_{26}	φ_{27}	φ_{28}	φ_{29}	φ_{30}	φ_{31}	φ_{32}
300300	2	2	2	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
300300	2	2	.	2	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
320320	1	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.
320320	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.
370656	3	2	2	1	2	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
370656	2	3	1	2	.	2	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
800800	3	3	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
800800	2	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.
450450	.	2	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.
450450	2	.	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1
450450	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.
450450	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1
576576	1	2	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.
576576	2	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1
579150	3	2	2	.	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
579150	2	3	.	2	1	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
1164800	1	1	.	.	1	1	.	.	2	.	.	1	1	1	.	.
600600	1	1	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.
600600	1	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1
1201200	1	1	.	.	1	1	.	.	2	1	1	2	2	.	.	.
675675	1	.	1	.	1	.	1	.	1	1	.	2	.	.	.	.
675675	.	1	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	2	.	.	.
720720	2	4	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
720720	4	2	1	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
800800	1	3	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
800800	3	1	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1
972972	2	4	4	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
972972	4	2	.	4	.	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1
1965600	3	3	1	1	1	1	.	.	1	1	1	2	2	1	1	1
1201200	3	4	2	1	2	1	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.
1201200	4	3	1	2	1	2	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.
1360800	3	3	1	1	1	1	.	.	1	2	2	2	2	.	.	.
1360800	3	3	1	1	1	1	.	.	1	2	2	2	2	.	.	.
1372800	1	2	1	.	1	.	1	.	1	2	1	2	2	.	1	.
1372800	2	1	.	1	.	1	.	1	1	1	2	2	2	.	.	1
1441792	2	3	2	.	2	.	1	.	1	1	.	1	1	1	1	.
1441792	3	2	.	2	.	2	.	1	1	.	1	1	1	1	.	1
2027025	2	4	2	.	3	.	.	.	2	1	.	1	1	2	1	.
2027025	4	2	.	2	.	3	.	.	2	.	1	1	1	2	.	1
2050048	4	6	4	1	3	1	1	.	1	2	1	2	1	1	1	.
2050048	6	4	1	4	1	3	.	1	1	1	2	1	2	1	.	1
2316600	4	7	2	2	3	2	.	.	2	.	1	1	1	2	1	.
2316600	7	4	2	2	2	3	.	.	2	1	.	1	1	2	.	1
2402400	4	5	2	1	3	1	.	.	2	2	1	2	3	1	1	.
2402400	5	4	1	2	1	3	.	.	2	1	2	3	2	1	.	1
2555904	5	3	2	1	2	1	1	.	2	2	1	3	2	1	1	1
2555904	3	5	1	2	1	2	.	1	2	1	2	2	3	1	1	1
2555904	4	7	3	2	3	2	.	.	2	1	1	1	2	2	1	.
2555904	7	4	2	3	2	3	.	.	2	1	1	2	1	2	.	1

Tabelle Z.3: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $Fi_{22}.2$ (rechter-unterer Quadrant)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
352	1	.	.	.	.	.	.	.	.
352	1	.	.	.	.	.	.	.	.
4160	2	1	.	.	.	.	.	.	.
11648	1	.	1	.	.	.	.	.	.
11648	1	.	.	1	.	.	.	.	.
27456	4	1	1	1	.	.	.	.	.
27456	4	1	1	1	.	.	.	.	.
27456	4	1	1	1	.	.	.	.	.
96096	4	.	1	1	1	.	.	.	.
105600	.	.	.	.	.	.	1	.	.
105600	.	.	.	.	.	.	1	.	.
105600	.	.	.	.	.	.	1	.	.
105600	.	.	.	.	.	.	1	.	.
123200	7	1	2	2	1	.	.	.	.
123200	7	1	2	2	1	.	.	.	.
133056	4	1	1	1	.	.	1	.	.
133056	4	1	1	1	.	.	1	.	.
292864	10	2	3	3	1	1	.	.	.
228800	7	1	2	2	1	.	1	.	.
228800	7	1	2	2	1	.	1	.	.
471744	21	2	6	6	3	.	1	.	.
640640	6	.	2	2	.	.	2	1	.
800800	13	1	4	4	1	1	1	1	.
873600	15	2	4	4	1	.	3	1	.
960960	20	2	6	6	2	2	.	1	.
1372800	19	1	6	6	1	2	1	2	.
1830400	33	3	10	10	3	2	3	2	.
1029600	20	2	6	6	2	1	2	1	.
1029600	20	2	6	6	2	1	2	1	.
2402400	39	3	12	12	3	3	3	3	.
2594592	47	4	14	14	4	2	5	3	.
1441792	20	1	6	6	1	1	3	2	.
1441792	20	1	6	6	1	1	3	2	.
3326400	14	2	4	4	.	.	5	2	1
4392960	34	4	10	10	2	2	6	3	1
4717440	73	6	22	22	5	4	9	6	.
4804800	33	3	10	10	1	2	7	4	1
5111808	50	5	15	15	3	3	6	4	1

Tabelle Z.4: Zerlegungsmatrix des treuen 3-Blocks von 2.Fi_{22}.2

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1 001	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1 430	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3 003	1	2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3 080	.	3	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10 725	3	2	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
13 650	4	3	3	3	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
30 030	.	3	.	2	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
32 032	2	5	2	4	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.
43 680	2	5	2	4	3	.	1	1	1	.	.	.	.	.
45 045	3	4	2	3	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.
48 048	4	4	3	2	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.
50 050	4	7	3	6	4	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50 050	4	5	3	3	3	1	.	.	.	1	.	.	.	.
75 075	3	5	2	2	4	1	1	.	.	1	.	.	.	.
75 075	1	6	1	4	3	.	1	1	1	.	.	.	1	.
75 075	3	7	2	5	5	1	1	.	.	.	.	.	1	.
81 081	5	9	4	6	6	1	1	.	.	1	.	.	.	.
114 400	2	9	2	6	5	.	1	1	1	1	.	.	1	.
138 600	2	6	1	5	3	.	1	1	1	.	1	.	1	.
138 600	2	6	1	5	3	.	1	1	1	.	.	1	1	.
150 150	4	11	3	6	7	1	2	1	1	1	.	.	1	.
205 920	4	7	2	4	5	1	1	.	.	.	.	.	.	1
289 575	7	14	5	10	7	1	1	1	1	2	1	1	1	.
300 300	2	12	1	6	9	.	3	1	1	1	.	.	.	1
320 320	6	16	4	10	10	1	2	1	1	1	.	.	1	1
360 855	9	20	6	15	12	1	3	2	2	2	1	1	1	.
370 656	12	23	9	16	13	2	2	1	1	3	1	1	1	.
400 400	4	12	2	8	7	.	2	1	1	1	1	1	.	1
400 400	4	12	2	8	7	.	2	1	1	1	1	1	.	1
400 400	10	22	7	14	12	2	3	2	2	2	1	1	2	.
400 400	10	22	7	14	12	2	3	2	2	2	1	1	2	.
450 450	8	17	5	11	10	1	2	1	1	2	1	1	.	1
450 450	14	29	10	20	16	3	3	2	2	2	1	1	3	.
576 576	16	30	11	20	18	3	3	1	1	3	1	1	1	1
577 368	12	27	8	16	15	3	3	2	2	2	1	1	2	1
579 150	16	29	11	19	18	3	3	1	1	4	1	1	.	1
582 400	16	30	11	20	18	3	3	2	1	3	1	1	1	1
582 400	16	30	11	20	18	3	3	1	2	3	1	1	1	1
600 600	10	27	7	16	15	1	4	3	3	3	1	1	1	1
600 600	12	28	8	17	17	2	4	2	2	3	1	1	1	1
600 600	12	28	8	17	17	2	4	2	2	3	1	1	1	1
675 675	17	29	11	21	16	3	2	1	1	3	2	2	1	1
720 720	16	38	11	24	22	3	5	3	3	3	1	1	3	1
800 800	24	39	16	26	23	5	3	1	1	5	2	2	1	1
852 930	18	41	12	26	23	3	5	3	3	4	2	2	2	1
938 223	17	36	11	23	21	2	4	2	2	5	2	2	.	2
972 972	16	38	10	24	22	2	5	3	3	4	2	2	1	2
982 800	20	42	13	28	25	3	5	3	2	4	2	2	1	2
982 800	20	42	13	28	25	3	5	2	3	4	2	2	1	2
1 201 200	26	52	17	36	29	4	5	3	3	5	3	3	2	2
1 360 800	32	64	22	40	36	6	6	3	3	8	3	3	2	2
1 372 800	26	62	17	40	35	4	8	5	5	5	3	3	4	2
1 791 153	35	77	23	49	44	5	9	5	5	9	4	4	2	3
1 876 446	38	83	25	54	48	6	10	6	6	9	4	4	3	3
2 027 025	37	85	24	54	50	5	11	6	6	9	4	4	2	4
2 050 048	34	74	21	46	42	4	9	6	6	10	5	5	.	4
2 316 600	44	99	29	64	57	6	12	7	7	11	5	5	3	4
2 402 400	42	95	27	60	55	5	12	7	7	11	5	5	1	5
2 729 376	52	113	34	72	65	7	13	7	7	14	6	6	2	5

Tabelle Z.5: Zerlegungsmatrix des 2-Hauptblocks von Fi_{22}

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
351	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7 722	4	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.
12 474	5	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.
12 474	5	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.
19 305	7	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.
19 656	8	4	1	1	1	1	.	.	.	.	.
27 027	5	2	.	1	1	.	1	.	.	.	.
42 120	12	5	.	1	1	2	1	.	.	.	.
51 975	15	6	.	2	2	2	1	.	.	.	.
54 054	16	7	1	2	2	2	1	.	.	.	.
61 425	19	8	1	2	2	3	1	.	.	.	.
96 525	7	4	.	1	1	.	1	1	.	.	.
123 552	18	9	1	2	2	2	1	1	.	.	.
235 872	18	9	1	2	2	2	1	1	1	.	.
237 600	18	9	2	2	2	2	1	1	1	.	.
289 575	33	15	2	4	4	4	2	1	1	.	.
360 855	49	21	3	7	7	5	4	.	.	1	.
368 550	34	16	2	4	4	3	3	2	1	.	.
368 550	52	23	3	7	7	6	4	.	.	1	.
386 100	34	16	2	5	5	2	4	1	.	1	.
405 405	41	19	3	6	6	3	4	1	.	1	.
405 405	41	19	3	6	6	3	4	1	.	1	.
432 432	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
494 208	66	30	4	9	9	6	6	1	.	1	.
577 368	40	20	3	5	5	3	4	2	1	1	.
608 256	38	18	4	7	7	.	6	1	.	2	.
675 675	67	31	4	9	9	6	6	2	1	1	.
675 675	67	31	4	9	9	6	6	2	1	1	.
772 200	74	35	4	10	10	6	7	3	1	1	.
852 930	94	43	6	13	13	8	9	2	.	2	.
938 223	43	19	2	6	6	2	5	1	.	1	1
997 920	62	27	2	8	8	5	6	1	.	1	1
1 235 520	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
1 297 296	72	33	4	10	10	4	8	2	.	2	1
1 297 296	72	33	4	10	10	4	8	2	.	2	1
1 351 350	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
1 351 350	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
1 351 350	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
1 351 350	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
1 621 620	114	52	6	15	15	9	11	3	1	2	1
1 658 475	121	55	7	17	17	9	12	2	.	3	1
1 658 475	103	48	6	14	14	6	11	4	1	2	1
1 729 728	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
1 791 153	137	62	8	19	19	10	14	3	.	3	1
1 853 280	136	63	8	19	19	9	14	4	.	3	1
1 876 446	132	60	8	18	18	10	13	3	1	3	1
1 965 600	136	63	8	19	19	9	14	4	1	3	1
1 965 600	136	63	8	19	19	9	14	4	1	3	1
2 729 376	180	81	10	25	25	12	19	4	.	4	2
3 088 800	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2

Tabelle Z.6: Zerlegungsmatrix der treuen 2-Blöcke von $3.Fi_{22}$

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}
351	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
351	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7722	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7722	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
12474	4	4	3	3	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
19305	4	4	3	3	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
19305	.	2	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.
19656	4	6	3	5	3	1	.	.	.	.	.	.	1	.
19656	4	6	3	5	3	1	.	.	.	.	.	.	1	.
27027	2	6	1	4	5	.	2	1	1	1	.	.	.	.
27027	2	6	1	4	5	.	2	1	1	1	.	.	.	.
42120	6	10	5	4	6	2	1	.	.	2	.	.	.	.
42120	4	4	2	6	2	.	.	.	.	.	1	1	.	.
51975	4	14	4	10	8	.	2	1	1	1	.	.	1	.
51975	4	14	4	10	8	.	2	1	1	1	.	.	1	.
54054	10	12	7	10	6	2	.	.	.	2	1	1	.	.
54054	2	8	1	5	6	.	2	1	1	.	.	.	.	1
61425	2	8	1	5	6	.	2	1	1	.	.	.	.	1
61425	6	16	4	10	10	1	2	1	1	1	.	.	1	1
96525	6	16	4	10	10	1	2	1	1	1	.	.	1	1
96525	10	24	7	17	13	2	3	2	2	1	1	1	3	.
123552	10	24	7	17	13	2	3	2	2	1	1	1	3	.
123552	10	24	7	14	13	2	3	2	2	3	1	1	2	.
235872	10	24	7	14	13	2	3	2	2	3	1	1	2	.
235872	8	20	5	13	13	1	3	1	1	2	1	1	.	1
237600	8	20	5	13	13	1	3	1	1	2	1	1	.	1
237600	16	36	11	22	21	3	5	3	3	3	1	1	2	1
289575	16	36	11	22	21	3	5	3	3	3	1	1	2	1
289575	26	48	18	32	28	5	4	2	2	6	2	2	2	1
360855	26	48	18	32	28	5	4	2	2	6	2	2	2	1
360855	24	46	16	30	28	4	5	2	2	6	2	2	.	2
368550	26	50	17	33	28	4	5	3	3	6	3	3	1	2
368550	26	50	17	33	28	4	5	3	3	6	3	3	1	2
368550	22	54	14	35	30	3	7	5	5	5	3	3	3	2
368550	22	54	14	35	30	3	7	5	5	5	3	3	3	2
386100	36	74	24	48	43	6	8	4	4	8	3	4	2	3
405405	36	74	24	48	43	6	8	4	4	8	4	3	2	3
405405	38	88	25	56	50	4	11	7	7	11	5	5	1	4
405405	38	88	25	56	50	4	11	7	7	11	5	5	1	4
405405	40	90	25	56	52	5	11	6	6	11	5	5	1	5
432432	40	90	25	56	52	5	11	6	6	11	5	5	1	5
432432	50	108	33	70	63	8	13	7	7	11	5	5	4	4
494208	50	108	33	70	63	8	13	7	7	11	5	5	4	4

Tabelle Z.7: Zerlegungsmatrix des 2-Hauptblocks von 6.Fi_{22} (unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
1728	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1728	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
61776	20	9	1	2	2	3	1	.	.	.	.
61776	20	9	1	2	2	3	1	.	.	.	.
71280	22	9	1	3	3	3	1	.	.	.	.
71280	22	9	1	3	3	3	1	.	.	.	.
112320	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
112320	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
123552	12	6	.	2	2	.	2	1	.	.	.
308880	34	15	3	5	5	3	3	.	.	1	.
308880	34	15	3	5	5	3	3	.	.	1	.
314496	36	16	2	5	5	4	3	.	.	1	.
314496	18	9	1	2	2	1	2	2	1	.	.
314496	36	16	2	5	5	4	3	.	.	1	.
314496	18	9	1	2	2	1	2	2	1	.	.
359424	36	18	2	4	4	4	2	2	1	.	.
359424	36	18	2	4	4	4	2	2	1	.	.
432432	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
432432	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
967680	74	36	6	11	11	4	8	3	1	2	.
967680	74	36	6	11	11	4	8	3	1	2	.
1123200	120	55	7	16	16	11	11	3	1	2	.
1123200	120	55	7	16	16	11	11	3	1	2	.
1235520	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
1235520	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
1729728	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
1729728	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
1796256	139	63	8	20	19	10	14	3	.	3	1
1796256	139	63	8	19	20	10	14	3	.	3	1
2594592	144	66	8	20	20	8	16	4	.	4	2
2965248	198	90	11	27	27	14	20	5	1	4	2
2965248	198	90	11	27	27	14	20	5	1	4	2
3088800	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2
3088800	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2

Tabelle Z.8: Zerlegungsmatrix des vierten 2-Blocks von $6.Fi_{22}$ (unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
429	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1001	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
1430	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
3003	1	2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
3003	1	2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
3080	.	3	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
3080	.	3	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
10725	3	2	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.
10725	3	2	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.
13650	4	3	3	3	2	1	.	.	.	.	.	.
13650	4	3	3	3	2	1	.	.	.	.	.	.
30030	.	3	.	2	3	.	1	.	.	.	.	.
30030	.	3	.	2	3	.	1	.	.	.	.	.
32032	2	5	2	4	3	.	1	.	.	.	.	.
32032	2	5	2	4	3	.	1	.	.	.	.	.
43680	2	5	2	4	3	.	1	1	.	.	.	.
43680	2	5	2	4	3	.	1	1	.	.	.	.
45045	3	4	2	3	2	1	.	.	.	.	1	.
45045	3	4	2	3	2	1	.	.	.	.	1	.
48048	4	4	3	2	2	1	.	.	1	.	.	.
48048	4	4	3	2	2	1	.	.	1	.	.	.
50050	4	7	3	6	4	1	.	.	.	.	1	.
50050	4	7	3	6	4	1	.	.	.	.	1	.
50050	4	5	3	3	3	1	.	.	1	.	.	.
50050	4	5	3	3	3	1	.	.	1	.	.	.
75075	3	5	2	2	4	1	1	.	1	.	.	.
75075	3	5	2	2	4	1	1	.	1	.	.	.
75075	1	6	1	4	3	.	1	1	.	.	1	.
75075	1	6	1	4	3	.	1	1	.	.	1	.
75075	3	7	2	5	5	1	1	.	.	.	1	.
75075	3	7	2	5	5	1	1	.	.	.	1	.
81081	5	9	4	6	6	1	1	.	1	.	.	.
81081	5	9	4	6	6	1	1	.	1	.	.	.
114400	2	9	2	6	5	.	1	1	1	.	1	.
114400	2	9	2	6	5	.	1	1	1	.	1	.
277200	4	12	2	10	6	.	2	2	.	1	2	.
150150	4	11	3	6	7	1	2	1	1	.	1	.
150150	4	11	3	6	7	1	2	1	1	.	1	.
205920	4	7	2	4	5	1	1	.	.	.	.	1
205920	4	7	2	4	5	1	1	.	.	.	.	1
289575	7	14	5	10	7	1	1	1	2	1	1	.
289575	7	14	5	10	7	1	1	1	2	1	1	.
300300	2	12	1	6	9	.	3	1	1	.	.	1
300300	2	12	1	6	9	.	3	1	1	.	.	1
320320	6	16	4	10	10	1	2	1	1	.	1	1
320320	6	16	4	10	10	1	2	1	1	.	1	1
360855	9	20	6	15	12	1	3	2	2	1	1	.
360855	9	20	6	15	12	1	3	2	2	1	1	.
370656	12	23	9	16	13	2	2	1	3	1	1	.
370656	12	23	9	16	13	2	2	1	3	1	1	.
800800	8	24	4	16	14	.	4	2	2	2	.	2
800800	20	44	14	28	24	4	6	4	4	2	4	.
450450	8	17	5	11	10	1	2	1	2	1	.	1
450450	8	17	5	11	10	1	2	1	2	1	.	1
450450	14	29	10	20	16	3	3	2	2	1	3	.
450450	14	29	10	20	16	3	3	2	2	1	3	.
576576	16	30	11	20	18	3	3	1	3	1	1	1
576576	16	30	11	20	18	3	3	1	3	1	1	1
577368	12	27	8	16	15	3	3	2	2	1	2	1
577368	12	27	8	16	15	3	3	2	2	1	2	1
579150	16	29	11	19	18	3	3	1	4	1	.	1
579150	16	29	11	19	18	3	3	1	4	1	.	1
1164800	32	60	22	40	36	6	6	3	6	2	2	2

Tabelle Z.9: Zerlegungsmatrix des 2-Hauptblocks von $6.Fi_{22}.2$ (oberer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}
600600	10	27	7	16	15	1	4	3	3	1	1	1
600600	10	27	7	16	15	1	4	3	3	1	1	1
1201200	24	56	16	34	34	4	8	4	6	2	2	2
675675	17	29	11	21	16	3	2	1	3	2	1	1
675675	17	29	11	21	16	3	2	1	3	2	1	1
720720	16	38	11	24	22	3	5	3	3	1	3	1
720720	16	38	11	24	22	3	5	3	3	1	3	1
800800	24	39	16	26	23	5	3	1	5	2	1	1
800800	24	39	16	26	23	5	3	1	5	2	1	1
852930	18	41	12	26	23	3	5	3	4	2	2	1
852930	18	41	12	26	23	3	5	3	4	2	2	1
938223	17	36	11	23	21	2	4	2	5	2	.	2
938223	17	36	11	23	21	2	4	2	5	2	.	2
972972	16	38	10	24	22	2	5	3	4	2	1	2
972972	16	38	10	24	22	2	5	3	4	2	1	2
1965600	40	84	26	56	50	6	10	5	8	4	2	4
1201200	26	52	17	36	29	4	5	3	5	3	2	2
1201200	26	52	17	36	29	4	5	3	5	3	2	2
1360800	32	64	22	40	36	6	6	3	8	3	2	2
1360800	32	64	22	40	36	6	6	3	8	3	2	2
1372800	26	62	17	40	35	4	8	5	5	3	4	2
1372800	26	62	17	40	35	4	8	5	5	3	4	2
1791153	35	77	23	49	44	5	9	5	9	4	2	3
1791153	35	77	23	49	44	5	9	5	9	4	2	3
1876446	38	83	25	54	48	6	10	6	9	4	3	3
1876446	38	83	25	54	48	6	10	6	9	4	3	3
2027025	37	85	24	54	50	5	11	6	9	4	2	4
2027025	37	85	24	54	50	5	11	6	9	4	2	4
2050048	34	74	21	46	42	4	9	6	10	5	.	4
2050048	34	74	21	46	42	4	9	6	10	5	.	4
2316600	44	99	29	64	57	6	12	7	11	5	3	4
2316600	44	99	29	64	57	6	12	7	11	5	3	4
2402400	42	95	27	60	55	5	12	7	11	5	1	5
2402400	42	95	27	60	55	5	12	7	11	5	1	5
2729376	52	113	34	72	65	7	13	7	14	6	2	5
2729376	52	113	34	72	65	7	13	7	14	6	2	5
352	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
352	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4160	.	4	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.
11648	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
11648	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
27456	8	8	6	6	4	2	.	.	.	.	.	.
27456	.	2	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.
27456	.	2	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.
96096	8	12	6	10	6	2	.	.	.	.	2	.
105600	2	6	1	4	5	.	2	1	1	.	.	.
105600	2	6	1	4	5	.	2	1	1	.	.	.
105600	2	6	1	4	5	.	2	1	1	.	.	.
105600	2	6	1	4	5	.	2	1	1	.	.	.
123200	6	10	5	4	6	2	1	.	2	.	.	.
123200	6	10	5	4	6	2	1	.	2	.	.	.
133056	4	4	2	6	2	.	.	.	.	1	.	.
133056	4	4	2	6	2	.	.	.	.	1	.	.
292864	8	28	8	20	16	.	4	2	2	.	2	.
228800	10	12	7	10	6	2	.	.	2	1	.	.
228800	10	12	7	10	6	2	.	.	2	1	.	.
471744	4	16	2	10	12	.	4	2	.	.	.	2
640640	12	32	8	20	20	2	4	2	2	.	2	2
800800	20	48	14	34	26	4	6	4	2	2	6	.
873600	20	48	14	28	26	4	6	4	6	2	4	.
960960	16	40	10	26	26	2	6	2	4	2	.	2
1372800	32	72	22	44	42	6	10	6	6	2	4	2
1830400	52	96	36	64	56	10	8	4	12	4	4	2
1029600	24	46	16	30	28	4	5	2	6	2	.	2
1029600	24	46	16	30	28	4	5	2	6	2	.	2
2402400	52	100	34	66	56	8	10	6	12	6	2	4
2594592	44	108	28	70	60	6	14	10	10	6	6	4
3326400	72	148	48	96	86	12	16	8	16	7	4	6
4392960	76	176	50	112	100	8	22	14	22	10	2	8
4717440	80	180	50	112	104	10	22	12	22	10	2	10
4804800	100	216	66	140	126	16	26	14	22	10	8	8

Tabelle Z.9: Zerlegungsmatrix des 2-Hauptblocks von $6.Fi_{22}.2$ (unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
702	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15444	4	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.
24948	5	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.
24948	5	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38610	7	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.
39312	8	4	1	1	1	1	.	.	.	.	.
54054	5	2	.	1	1	.	1	.	.	.	.
84240	12	5	.	1	1	2	1	.	.	.	.
103950	15	6	.	2	2	2	1	.	.	.	.
108108	16	7	1	2	2	2	1	.	.	.	.
122850	19	8	1	2	2	3	1	.	.	.	.
193050	7	4	.	1	1	.	1	1	.	.	.
247104	18	9	1	2	2	2	1	1	.	.	.
471744	18	9	1	2	2	2	1	1	1	.	.
475200	18	9	2	2	2	2	1	1	1	.	.
579150	33	15	2	4	4	4	2	1	1	.	.
721710	49	21	3	7	7	5	4	.	.	1	.
737100	52	23	3	7	7	6	4	.	.	1	.
737100	34	16	2	4	4	3	3	2	1	.	.
772200	34	16	2	5	5	2	4	1	.	1	.
810810	41	19	3	6	6	3	4	1	.	1	.
810810	41	19	3	6	6	3	4	1	.	1	.
864864	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
988416	66	30	4	9	9	6	6	1	.	1	.
1154736	40	20	3	5	5	3	4	2	1	1	.
1216512	38	18	4	7	7	.	6	1	.	2	.
1351350	67	31	4	9	9	6	6	2	1	1	.
1351350	67	31	4	9	9	6	6	2	1	1	.
1544400	74	35	4	10	10	6	7	3	1	1	.
1705860	94	43	6	13	13	8	9	2	.	2	.
1876446	43	19	2	6	6	2	5	1	.	1	1
1995840	62	27	2	8	8	5	6	1	.	1	1
2471040	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
2594592	72	33	4	10	10	4	8	2	.	2	1
2594592	72	33	4	10	10	4	8	2	.	2	1
2702700	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
2702700	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
2702700	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
2702700	88	40	5	12	12	6	9	2	.	2	1
3243240	114	52	6	15	15	9	11	3	1	2	1
3316950	103	48	6	14	14	6	11	4	1	2	1
3316950	121	55	7	17	17	9	12	2	.	3	1
3459456	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
3582306	137	62	8	19	19	10	14	3	.	3	1
3706560	136	63	8	19	19	9	14	4	.	3	1
3752892	132	60	8	18	18	10	13	3	1	3	1
3931200	136	63	8	19	19	9	14	4	1	3	1
3931200	136	63	8	19	19	9	14	4	1	3	1
5458752	180	81	10	25	25	12	19	4	.	4	2
6177600	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2

Tabelle Z.10: Zerlegungsmatrix des vierten 2-Blocks von $6.\mathrm{Fi}_{22}.2$ (oberer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
3456	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3456	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
123552	20	9	1	2	2	3	1	.	.	.	.
123552	20	9	1	2	2	3	1	.	.	.	.
142560	22	9	1	3	3	3	1	.	.	.	.
142560	22	9	1	3	3	3	1	.	.	.	.
224640	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
224640	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
247104	12	6	.	2	2	.	2	1	.	.	.
617760	34	15	3	5	5	3	3	.	.	1	.
617760	34	15	3	5	5	3	3	.	.	1	.
628992	36	16	2	5	5	4	3	.	.	1	.
628992	18	9	1	2	2	1	2	2	1	.	.
628992	36	16	2	5	5	4	3	.	.	1	.
628992	18	9	1	2	2	1	2	2	1	.	.
718848	36	18	2	4	4	4	2	2	1	.	.
718848	36	18	2	4	4	4	2	2	1	.	.
864864	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
864864	46	21	3	7	7	3	5	1	.	1	.
1935360	74	36	6	11	11	4	8	3	1	2	.
1935360	74	36	6	11	11	4	8	3	1	2	.
2246400	120	55	7	16	16	11	11	3	1	2	.
2246400	120	55	7	16	16	11	11	3	1	2	.
2471040	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
2471040	80	36	4	10	10	7	7	2	1	1	1
3459456	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
3459456	118	54	7	17	17	7	13	3	.	3	1
3592512	139	63	8	19	20	10	14	3	.	3	1
3592512	139	63	8	20	19	10	14	3	.	3	1
5189184	144	66	8	20	20	8	16	4	.	4	2
5930496	198	90	11	27	27	14	20	5	1	4	2
5930496	198	90	11	27	27	14	20	5	1	4	2
6177600	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2
6177600	210	96	12	29	29	14	22	5	.	5	2

Tabelle Z.10: Zerlegungsmatrix des vierten 2-Blocks von $6.Fi_{22}.2$ (unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
351	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
351	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
7722	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
7722	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
19305	2	2	1	1	1	2	1	1	.	.	.
19305	2	2	1	1	1	2	1	1	.	.	.
19656	.	3	1	2	.	.	.	.	.	.	.
19656	.	3	1	2	.	.	.	.	.	.	.
27027	2	2	1	1	1	2	1	1	.	.	1
27027	2	2	1	1	1	2	1	1	.	.	1
42120	2	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
42120	2	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
51975	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.
51975	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.
54054	.	3	.	2	2	.	.	.	.	.	1
54054	.	3	.	2	2	.	.	.	.	.	1
61425	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.
61425	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.
96525	2	3	1	2	2	1	1	1	.	.	1
96525	2	3	1	2	2	1	1	1	.	.	1
123552	2	3	2	2	2	1	1	1	.	.	.
123552	2	3	2	2	2	1	1	1	.	.	.
235872	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.
235872	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.
237600	2	2	1	1	4	3	2	2	.	.	1
237600	2	2	1	1	4	3	2	2	.	.	1
289575	.	2	.	5	4	.	.	.	1	1	1
289575	.	2	.	5	4	.	.	.	1	1	1
368550	1	3	.	3	4	1	.	1	.	.	2
368550	1	3	.	3	4	1	.	1	.	.	2
368550	1	3	.	3	4	1	1	.	.	.	2
368550	1	3	.	3	4	1	1	.	.	.	2
386100	4	6	2	5	6	4	3	3	.	.	2
386100	4	6	2	5	6	4	3	3	.	.	2
405405	2	7	2	8	7	2	1	1	1	1	3
405405	2	7	2	8	7	2	1	1	1	1	3
405405	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
405405	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
432432	.	1	1	2	2	.	.	.	.	.	.
432432	.	1	1	2	2	.	.	.	.	.	.

Tabelle Z.11: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.Fi_{22}$ (linker-oberer Quadrant)

	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}
351	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
351	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7722	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7722	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12474	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19305	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19305	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19656	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19656	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27027	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27027	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42120	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
42120	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
51975	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
51975	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
54054	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
54054	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
61425	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
61425	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
96525	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
96525	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
123552	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.
123552	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.
235872	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
235872	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1
237600	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
237600	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
289575	5	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
289575	5	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
368550	3	2	1	.	.	.	.	.	1	.	.
368550	3	2	1	.	.	.	.	.	1	.	.
368550	3	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.
368550	3	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.
386100	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.
386100	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.
405405	5	3	2	.	.	.	1	.	.	.	.
405405	5	3	2	.	.	.	1	.	.	.	.
405405	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.
405405	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.
432432	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.
432432	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.

Tabelle Z.11: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.Fi_{22}$ (rechter-oberer Quadrant)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}
494208	1	3	1	2	5	.	1	1	1	1	.
494208	1	3	1	2	5	.	1	1	1	1	.
608256	2	7	2	8	10	3	2	2	1	1	2
608256	2	7	2	8	10	3	2	2	1	1	2
675675	1	1	.	2	6	1	2	2	1	1	.
675675	1	1	.	2	6	1	2	2	1	1	.
675675	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
675675	.	1	.	2	2	.	.	.	.	.	1
772200	2	2	1	4	6	1	3	3	.	.	.
772200	2	2	1	4	6	1	3	3	.	.	.
997920	2	6	.	6	9	2	2	2	1	1	4
997920	2	6	.	6	9	2	2	2	1	1	4
1235520	.	4	.	9	9	1	1	1	1	1	3
1235520	.	4	.	9	9	1	1	1	1	1	3
1297296	3	6	1	8	13	3	4	4	1	1	3
1297296	3	6	1	8	13	3	4	4	1	1	3
1297296	3	6	1	8	13	3	4	4	1	1	3
1297296	3	6	1	8	13	3	4	4	1	1	3
1351350	2	4	1	6	9	2	2	2	.	.	3
1351350	2	4	1	6	9	2	2	2	.	.	3
1351350	1	2	.	4	8	1	2	2	1	1	1
1351350	1	2	.	4	8	1	2	2	1	1	1
1351350	3	7	1	10	11	3	3	3	2	2	2
1351350	3	7	1	10	11	3	3	3	2	2	2
1351350	4	7	2	12	14	4	5	5	1	1	2
1351350	4	7	2	12	14	4	5	5	1	1	2
1621620	4	6	2	10	17	4	6	6	2	2	2
1621620	4	6	2	10	17	4	6	6	2	2	2
1658475	2	4	1	8	10	2	4	3	1	1	1
1658475	2	4	1	8	10	2	4	3	1	1	1
1658475	2	4	1	8	10	2	3	4	1	1	1
1658475	2	4	1	8	10	2	3	4	1	1	1
1729728	1	7	1	11	14	1	2	2	2	2	3
1729728	1	7	1	11	14	1	2	2	2	2	3
1853280	2	5	1	6	13	1	3	3	2	2	2
1853280	2	5	1	6	13	1	3	3	2	2	2
1965600	1	7	1	11	14	1	2	2	2	2	3
1965600	1	7	1	11	14	1	2	2	2	2	3
1965600	1	3	.	6	8	1	2	2	1	1	2
1965600	1	3	.	6	8	1	2	2	1	1	2
3088800	3	7	1	15	20	2	5	5	2	2	3
3088800	3	7	1	15	20	2	5	5	2	2	3

Tabelle Z.11: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.Fi_{22}$ (linker-unterer Quadrant)

	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}
494208	2	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1
494208	2	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1
608256	5	3	2	.	.	.	2	1	.	.	.
608256	5	3	2	.	.	.	2	1	.	.	.
675675	2	.	1	.	.	.	1	2	.	.	1
675675	2	.	1	.	.	.	1	2	.	.	1
675675	2	1	1	.	1	1	.	.	1	1	.
675675	2	1	1	.	1	1	.	.	1	1	.
772200	1	.	.	.	1	1	2	3	.	.	.
772200	1	.	.	.	1	1	2	3	.	.	.
997920	6	4	2	1	.	.	.	.	1	1	1
997920	6	4	2	1	.	.	.	.	1	1	1
1235520	7	3	4	.	1	1	1	1	1	1	.
1235520	7	3	4	.	1	1	1	1	1	1	.
1297296	6	3	2	1	1	.	2	2	1	.	1
1297296	6	3	2	1	1	.	2	2	1	.	1
1297296	6	3	2	1	.	1	2	2	.	1	1
1297296	6	3	2	1	.	1	2	2	.	1	1
1351350	5	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1
1351350	5	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1
1351350	4	1	2	.	1	1	1	2	1	1	1
1351350	4	1	2	.	1	1	1	2	1	1	1
1351350	7	2	3	.	1	1	1	2	1	1	.
1351350	7	2	3	.	1	1	1	2	1	1	.
1351350	6	2	3	.	1	1	3	4	.	.	.
1351350	6	2	3	.	1	1	3	4	.	.	.
1621620	6	2	2	1	1	1	4	4	.	.	1
1621620	6	2	2	1	1	1	4	4	.	.	1
1658475	4	2	2	1	1	2	2	4	.	1	1
1658475	4	2	2	1	1	2	2	4	.	1	1
1658475	4	2	2	1	2	1	2	4	1	.	1
1658475	4	2	2	1	2	1	2	4	1	.	1
1729728	9	4	4	.	1	1	2	2	1	1	1
1729728	9	4	4	.	1	1	2	2	1	1	1
1853280	6	2	2	.	1	1	2	3	1	1	2
1853280	6	2	2	.	1	1	2	3	1	1	2
1965600	11	5	4	.	1	1	1	1	2	2	1
1965600	11	5	4	.	1	1	1	1	2	2	1
1965600	6	2	3	.	2	2	.	2	2	2	1
1965600	6	2	3	.	2	2	.	2	2	2	1
3088800	12	4	5	.	3	3	3	5	2	2	1
3088800	12	4	5	.	3	3	3	5	2	2	1

Tabelle Z.11: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.\mathrm{Fi}_{22}$ (rechter-unterer Quadrant)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
1728	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1728	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1728	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1728	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
61776	6	2	.	1	2	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
61776	6	2	.	1	2	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
61776	2	6	1	.	.	2	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
61776	2	6	1	.	.	2	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
71280	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71280	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71280	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
71280	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
112320	3	2	.	.	2	.	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
112320	3	2	.	.	2	.	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
112320	2	3	.	.	.	2	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
112320	2	3	.	.	.	2	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
123552	8	8	1	1	2	2	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
123552	8	8	1	1	2	2	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
308880	11	10	2	1	4	2	2	4	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.
308880	11	10	2	1	4	2	2	4	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.
308880	10	11	1	2	2	4	4	2	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.
308880	10	11	1	2	2	4	4	2	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.
314496	4	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
314496	4	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
314496	1	4	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.
314496	1	4	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.
314496	1	4	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.
314496	1	4	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.
314496	4	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
314496	4	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
359424	10	6	1	.	3	2	2	3	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
359424	10	6	1	.	3	2	2	3	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
359424	6	10	.	1	2	3	3	2	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
359424	6	10	.	1	2	3	3	2	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
432432	10	6	1	1	3	2	2	3	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.
432432	10	6	1	1	3	2	2	3	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.
432432	6	10	1	1	2	3	3	2	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.
432432	6	10	1	1	2	3	3	2	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.
967680	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
967680	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
967680	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
967680	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
1123200	21	13	2	1	7	3	3	7	2	.	1	1	3	1	3	.	.	.
1123200	21	13	2	1	7	3	3	7	2	.	1	1	3	1	3	.	.	.
1123200	13	21	1	2	3	7	7	3	.	2	1	1	1	3	.	3	.	.
1123200	13	21	1	2	3	7	7	3	.	2	1	1	1	3	.	3	.	.
1235520	23	16	2	1	7	5	5	7	2	1	1	1	3	2	3	.	.	.
1235520	23	16	2	1	7	5	5	7	2	1	1	1	3	2	3	.	.	.
1235520	16	23	1	2	5	7	7	5	1	2	1	1	2	3	.	3	.	.
1235520	16	23	1	2	5	7	7	5	1	2	1	1	2	3	.	3	.	.
1729728	35	28	3	3	11	8	8	11	3	2	2	2	3	2	3	1	.	.
1729728	35	28	3	3	11	8	8	11	3	2	2	2	3	2	3	1	.	.
1729728	28	35	3	3	8	11	11	8	2	3	2	2	2	3	1	3	.	.
1729728	28	35	3	3	8	11	11	8	2	3	2	2	2	3	1	3	.	.
1796256	12	10	2	2	3	3	3	3	.	.	.	.	4	3	2	.	.	1
1796256	12	10	2	2	3	3	3	3	.	.	.	.	4	3	2	.	.	1
1796256	10	12	2	2	3	3	3	3	.	.	.	.	3	4	.	2	1	.
1796256	10	12	2	2	3	3	3	3	.	.	.	.	3	4	.	2	1	.
2594592	47	47	4	4	14	14	14	14	4	4	2	2	5	5	3	3	.	.
2594592	47	47	4	4	14	14	14	14	4	4	2	2	5	5	3	3	.	.
2965248	31	26	3	2	10	7	7	10	3	1	2	1	5	4	3	2	1	.
2965248	31	26	3	2	10	7	7	10	3	1	2	1	5	4	3	2	1	.
2965248	26	31	2	3	7	10	10	7	1	3	1	2	4	5	2	3	.	1
2965248	26	31	2	3	7	10	10	7	1	3	1	2	4	5	2	3	.	1
3088800	26	26	2	2	8	8	8	8	1	1	2	2	4	4	3	3	1	.
3088800	26	26	2	2	8	8	8	8	1	1	2	2	4	4	3	3	1	.
3088800	26	26	2	2	8	8	8	8	1	1	2	2	4	4	3	3	.	1
3088800	26	26	2	2	8	8	8	8	1	1	2	2	4	4	3	3	.	1

Tabelle Z.12: Zerlegungsmatrix fünften 3-Blocks von $6.Fi_{22}$ (unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}
702	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15444	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1
24948	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
24948	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
38610	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	.	.	.
39312	.	.	3	3	1	1	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
54054	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	.	1	1
84240	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.
103950	.	.	1	1	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
108108	.	.	3	3	.	.	2	2	2	2	.	.	.	.	1	1
122850	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.
193050	2	2	3	3	1	1	2	2	2	2	1	1	2	.	1	1
247104	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	2	.	.	.
471744	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	2	.	.	.
475200	2	2	2	2	1	1	1	1	4	4	3	3	4	.	1	1
579150	.	.	2	2	.	.	5	5	4	4	.	.	.	2	1	1
737100	1	1	3	3	.	.	3	3	4	4	1	1	1	.	2	2
737100	1	1	3	3	.	.	3	3	4	4	1	1	1	.	2	2
772200	4	4	6	6	2	2	5	5	6	6	4	4	6	.	2	2
810810	2	2	7	7	2	2	8	8	7	7	2	2	2	2	3	3
810810	.	.	1	1	.	.	2	2	2	2	.	.	.	.	1	1
864864	.	.	1	1	1	1	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.
988416	1	1	3	3	1	1	2	2	5	5	.	.	2	2	.	.
1216512	2	2	7	7	2	2	8	8	10	10	3	3	4	2	2	2
1351350	1	1	1	1	.	.	2	2	6	6	1	1	4	2	.	.
1351350	.	.	1	1	.	.	2	2	2	2	.	.	.	.	1	1
1544400	2	2	2	2	1	1	4	4	6	6	1	1	6	.	.	.
1995840	2	2	6	6	.	.	6	6	9	9	2	2	4	2	4	4
2471040	.	.	4	4	.	.	9	9	9	9	1	1	2	2	3	3
2594592	3	3	6	6	1	1	8	8	13	13	3	3	8	2	3	3
2594592	3	3	6	6	1	1	8	8	13	13	3	3	8	2	3	3
2702700	2	2	4	4	1	1	6	6	9	9	2	2	4	.	3	3
2702700	1	1	2	2	.	.	4	4	8	8	1	1	4	2	1	1
2702700	3	3	7	7	1	1	10	10	11	11	3	3	6	4	2	2
2702700	4	4	7	7	2	2	12	12	14	14	4	4	10	2	2	2
3243240	4	4	6	6	2	2	10	10	17	17	4	4	12	4	2	2
3316950	2	2	4	4	1	1	8	8	10	10	2	2	7	2	1	1
3316950	2	2	4	4	1	1	8	8	10	10	2	2	7	2	1	1
3459456	1	1	7	7	1	1	11	11	14	14	1	1	4	4	3	3
3706560	2	2	5	5	1	1	6	6	13	13	1	1	6	4	2	2
3931200	1	1	7	7	1	1	11	11	14	14	1	1	4	4	3	3
3931200	1	1	3	3	.	.	6	6	8	8	1	1	4	2	2	2
6177600	3	3	7	7	1	1	15	15	20	20	2	2	10	4	3	3

Tabelle Z.13: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.Fi_{22}.2$ (linker-unterer Teil)

	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	φ_{24}	φ_{25}	φ_{26}	φ_{27}	φ_{28}	φ_{29}	φ_{30}	φ_{31}	φ_{32}
702	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15444	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24948	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24948	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38610	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
39312	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
54054	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
84240	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
103950	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
108108	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
122850	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
193050	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
247104	.	.	1	1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.
471744	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1
475200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
579150	5	5	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
737100	3	3	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
737100	3	3	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
772200	1	1	1	1	1	1	1	1	.	1	1	1	1	.	.	.
810810	5	5	3	3	2	2	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
810810	1	1	.	.	1	1	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.
864864	.	.	.	.	1	1	.	.	2	1	1	1	1	.	.	.
988416	2	2	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	1	1
1216512	5	5	3	3	2	2	.	.	.	2	2	1	1	.	.	.
1351350	2	2	.	.	1	1	.	.	.	1	1	2	2	.	1	1
1351350	2	2	1	1	1	1	.	.	2	.	.	.	.	2	.	.
1544400	1	1	.	.	.	.	.	.	2	2	2	3	3	.	.	.
1995840	6	6	4	4	2	2	1	1	.	.	.	.	.	2	1	1
2471040	7	7	3	3	4	4	.	.	2	1	1	1	1	2	.	.
2594592	6	6	3	3	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
2594592	6	6	3	3	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
2702700	5	5	3	3	3	3	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1
2702700	4	4	1	1	2	2	.	.	2	1	1	2	2	2	1	1
2702700	7	7	2	2	3	3	.	.	2	1	1	2	2	2	.	.
2702700	6	6	2	2	3	3	.	.	2	3	3	4	4	.	.	.
3243240	6	6	2	2	2	2	1	1	2	4	4	4	4	.	1	1
3316950	4	4	2	2	2	2	1	1	3	2	2	4	4	1	1	1
3316950	4	4	2	2	2	2	1	1	3	2	2	4	4	1	1	1
3459456	9	9	4	4	4	4	.	.	2	2	2	2	2	2	1	1
3706560	6	6	2	2	2	2	.	.	2	2	2	3	3	2	2	2
3931200	11	11	5	5	4	4	.	.	2	1	1	1	1	4	1	1
3931200	6	6	2	2	3	3	.	.	4	.	.	2	2	4	1	1
6177600	12	12	4	4	5	5	.	.	6	3	3	5	5	4	1	1

Tabelle Z.13: Zerlegungsmatrix des 3-Hauptblocks von $6.\mathrm{Fi}_{22}.2$ (rechter-unterer Teil)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
3456	.	1	.	.	.	.	.	.	.
3456	.	1	.	.	.	.	.	.	.
123552	8	1	2	2	1	.	.	.	.
123552	8	1	2	2	1	.	.	.	.
142560	.	.	.	.	.	1	.	.	.
142560	.	.	.	.	.	1	.	.	.
224640	5	.	2	2	1	.	1	.	.
224640	5	.	2	2	1	.	1	.	.
247104	16	2	4	4	2	.	.	.	.
617760	21	3	6	6	3	1	1	.	.
617760	21	3	6	6	3	1	1	.	.
628992	5	.	2	1	.	.	2	1	.
628992	5	.	2	1	.	.	2	1	.
628992	5	.	1	2	.	.	2	1	.
628992	5	.	1	2	.	.	2	1	.
718848	16	1	5	5	1	1	.	1	.
718848	16	1	5	5	1	1	.	1	.
864864	16	2	5	5	1	2	.	1	.
864864	16	2	5	5	1	2	.	1	.
1935360	.	1	.	.	.	.	.	.	1
1935360	.	1	.	.	.	.	.	.	1
2246400	34	3	10	10	2	2	4	3	.
2246400	34	3	10	10	2	2	4	3	.
2471040	39	3	12	12	3	2	5	3	.
2471040	39	3	12	12	3	2	5	3	.
3459456	63	6	19	19	5	4	5	4	.
3459456	63	6	19	19	5	4	5	4	.
3592512	22	4	6	6	.	.	7	2	1
3592512	22	4	6	6	.	.	7	2	1
5189184	94	8	28	28	8	4	10	6	.
5930496	57	5	17	17	4	3	9	5	1
5930496	57	5	17	17	4	3	9	5	1
6177600	52	4	16	16	2	4	8	6	1
6177600	52	4	16	16	2	4	8	6	1

Tabelle Z.14: Zerlegungsmatrix des fünften 3-Blocks von $6.Fi_{22}.2$ (unterer Teil)

Fi_{22}

Fi_{22} (mod 2)

	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	;	;	
		645	195	25	139	17														
		61751654400	95520	19424	968	496	600	42	324	162	27	22	22	13	13	30	21			
		p power	A	A	A	A	A	A	B	B	D	A	A	A	A	AA	AA			
		p' part	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AA	AA			
	ind	1A	3A	3B	3C	3D	5A	7A	9A	9B	9C	11A	B**	13A	B*	15A	21A	fus	ind	
φ_1	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	:	+	φ_1
φ_2	+	78	15	-3	6	-3	3	1	3	0	0	1	1	0	0	0	1	:	+	φ_2
φ_3	?	350	-10	26	8	-1	0	0	-4	2	-1	-2	-2	-1	-1	0	-3	:	?	φ_3
φ_4	?	572	50	5	-13	5	-3	-2	2	-1	-1	0	0	0	0	0	1	:	?	φ_4
φ_5	?	1352	-16	-25	20	2	2	1	-4	-1	2	-1	-1	0	0	-1	-2	:	?	φ_5
φ_6	o	5824	154	-8	-8	-8	-1	0	1	1	1	b11	**	0	0	-1	0		?	φ_6
φ_7	o	5824	154	-8	-8	-8	-1	0	1	1	1	**	b11	0	0	-1	0			φ_7
φ_8	?	7942	-32	85	-14	4	-8	-3	1	-2	-2	0	0	-1	-1	-2	3	:	?	φ_8
φ_9	?	24596	-118	-28	8	-1	-4	-2	-4	2	-4	0	0	0	0	2	1	:	?	φ_9
φ_{10}	?	31668	312	-3	-48	-3	-7	0	-6	0	0	-1	-1	0	0	2	-3	:	?	φ_{10}
φ_{11}	?	34892	-154	143	-46	-19	-8	-3	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	:	?	φ_{11}
φ_{12}	?	62952	-156	-66	-30	15	2	1	-6	0	0	-1	-1	b13	*	-1	-2		?	φ_{12}
φ_{13}	?	62952	-156	-66	-30	15	2	1	-6	0	0	-1	-1	*	b13	-1	-2			φ_{13}
φ_{14}	?	163084	-338	-131	-32	4	-16	-2	-2	1	-2	-2	-2	-1	-1	2	-2	:	?	φ_{14}
φ_{15}	?	1441792	-512	640	64	-8	-8	2	4	-2	-2	0	0	1	1	-2	-1	:	?	φ_{15}
φ_{16}	?	2555904	-384	192	-96	-24	4	1	0	-3	0	-1	-1	0	0	1	1	:	?	φ_{16}
	ind	1	3	3	3	3	5	7	9	9	9	11	11	13	13	15	21	fus	ind	
		3	3				15	21	9			33	33	39	39	15	21			
		3	3				15	21	9			33	33	39	39	15	21			
φ_{17}	o2	27	9	0	0	0	2	-1	3	0	0	**	b11	1	1	-1	2	*	?	φ_{17}
φ_{18}	o2	324	27	0	0	0	-1	2	0	0	0	b11	**	-1	-1	2	-1	*	?	φ_{18}
φ_{19}	o2	1728	90	0	0	0	3	-1	3	0	0	1	1	-1	-1	0	-1	*	?	φ_{19}
φ_{20}	o2	4725	-45	0	0	0	0	0	-6	0	0	**	-b11	b13	*	0	-3	*	?	φ_{20}
φ_{21}	o2	4725	-45	0	0	0	0	0	-6	0	0	**	-b11	*	b13	0	-3	*	?	φ_{21}
φ_{22}	o2	6966	135	0	0	0	-9	1	-9	0	0	4+2b11	**	-2	-2	0	-5	*	?	φ_{22}
φ_{23}	o2	16794	-72	0	0	0	-6	1	-6	0	0	3+b11	**	-2	-2	3	-2	*	?	φ_{23}
φ_{24}	o2	68796	-234	0	0	0	-4	0	-6	0	0	2	2	0	0	-4	-3	*	?	φ_{24}
φ_{25}	o2	112320	666	0	0	0	-5	-2	-3	0	0	-1	-1	0	0	1	1	*	?	φ_{25}
φ_{26}	o2	179388	-306	0	0	0	-12	-1	-3	0	0	0	0	1	1	-6	2	*	?	φ_{26}
φ_{27}	o2	524664	-639	0	0	0	-11	0	-6	0	0	4+3b11	**	-3	-3	1	-9	*	?	φ_{27}

Fi_{22} (mod 3)

	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	;
		645	1839	530	17	110	46	12	4	3																			
		61751654400	3661440	84160	69472	592	080	288	608	072	600	42	384	384	128	32	60	40	22	22	13	13	14	32	32	20	22	22	
		p power	A	A	A	B	B	B	C	B	A	A	A	A	C	D	AA	AB	A	A	A	A	AA	C	C	BB	BA	AA	
		p' part	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AA	AB	A	A	A	A	AA	A	A	AB	AA	BA	
	ind	1A	2A	2B	2C	4A	4B	4C	4D	4E	5A	7A	8A	8B	8C	8D	10A	10B	11A	B**	13A	B*	14A	16A	B**	20A	22A	B**	fus
φ_{1}	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	:
φ_{2}	+	77	-35	13	-3	5	-7	-3	1	1	2	0	1	-3	1	-1	0	-2	0	0	-1	-1	0	-1	-1	-2	-2	-2	:
φ_{3}	+	351	111	31	15	7	11	-1	3	3	1	1	-1	3	-1	1	1	1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	1	1	1	:
φ_{4}	+	924	-196	28	-4	-4	-4	12	4	-4	-1	0	-4	4	0	0	-1	3	0	0	1	1	0	2	2	1	2	2	:
φ_{5}	+	2651	539	91	27	11	19	11	-5	3	1	-2	3	3	-1	-1	-1	1	0	0	-1	-1	0	1	1	-1	0	0	:
φ_{6}	+	2926	574	46	-34	6	18	-2	2	-6	1	0	-2	2	2	0	-1	1	0	0	1	1	0	0	0	3	2	2	:
φ_{7}	o	4823	455	23	39	-17	-5	-9	3	3	-2	0	-1	-5	-1	1	0	-2	b11	**	0	0	0	-1+2i2	-1-2i2	0	-2-b11	**	|
φ_{8}	o	4823	455	23	39	-17	-5	-9	3	3	-2	0	-1	-5	-1	1	0	-2	**	b11	0	0	0	-1-2i2	-1+2i2	0	**	-2-b11	|
φ_{9}	+	7722	-1254	106	-6	18	-26	-6	6	-2	-3	1	2	-2	-2	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	:
φ_{10}	+	12474	1386	-6	-54	2	6	10	6	-2	-1	0	2	-2	-2	0	1	-1	0	0	-b13	*	0	0	0	1	0	0	|
φ_{11}	+	12474	1386	-6	-54	2	6	10	6	-2	-1	0	2	-2	-2	0	1	-1	0	0	*	-b13	0	0	0	1	0	0	|
φ_{12}	+	17226	-2134	202	-22	10	-22	-6	-14	10	1	-1	2	-6	-2	2	1	-3	0	0	1	1	1	0	0	3	0	0	:
φ_{13}	+	21175	-2345	55	23	-25	-9	-9	-1	7	0	0	3	3	-1	-1	0	0	0	0	-2	-2	0	-1	-1	-4	-2	-2	:
φ_{14}	+	29821	2365	125	61	45	13	13	-3	-3	-4	1	1	9	1	-3	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	0	0	:
φ_{15}	+	50050	-3038	-254	98	18	10	2	-6	-6	0	0	2	-6	2	2	2	-4	0	0	0	0	0	-2	-2	0	-2	-2	:
φ_{16}	+	55573	4837	213	5	-3	9	-11	-7	1	-2	0	1	-3	-3	-1	2	-2	1	1	-2	-2	0	1	1	-6	-3	-3	:
φ_{17}	o	92378	-2806	-486	106	34	6	-22	6	-2	3	-1	2	-2	-2	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	2b11	**	|
φ_{18}	o	92378	-2806	-486	106	34	6	-22	6	-2	3	-1	2	-2	-2	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	**	2b11	|
φ_{19}	+	133925	6677	-155	-11	-19	-47	21	-15	9	0	1	5	1	1	-1	2	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	0	0	:
φ_{20}	o	182897	-5279	-79	-63	-23	29	17	-3	5	-3	1	-3	1	1	-1	1	1	0	0	0	0	-1	1+2i2	1-2i2	-1	1-i11	**	|
φ_{21}	o	182897	-5279	-79	-63	-23	29	17	-3	5	-3	1	-3	1	1	-1	1	1	0	0	0	0	-1	1-2i2	1+2i2	-1	**	1-i11	|
φ_{22}	+	193479	10263	-121	-201	47	3	7	-5	-5	4	-1	-1	3	-1	1	-2	4	0	0	0	0	1	3	3	-2	0	0	:
φ_{23}	+	360855	18711	1431	279	-9	39	-9	-9	7	5	-2	-1	-1	-1	-1	1	1	0	0	1	1	0	-1	-1	-1	0	0	:
φ_{24}	+	577368	-21384	216	-72	72	-24	24	0	-8	-7	1	-4	-4	0	0	1	1	0	0	-1	-1	1	0	0	1	0	0	:
φ_{25}	+	852930	-29646	1026	18	-54	6	18	-18	-2	5	1	-2	2	-2	0	-1	1	1	1	0	0	-1	0	0	1	-1	-1	:
φ_{26}	+	1791153	-5103	-2511	81	81	9	33	9	9	3	0	-3	-3	-3	1	-3	-1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	1	1	:
φ_{27}	+	1876446	37422	-1890	-306	54	-30	-18	18	10	-4	-2	-2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	:
	ind	1	2	2	2	4	4	4	4	4	5	7	8	8	8	8	10	10	11	11	13	13	14	16	16	20	22	22	fus
		2	2	2			4		4		10	14				8	10	10	22	22	26	26	14			20	22	22	
φ_{28}	+	176	64	16	0	0	8	0	4	0	1	1	0	0	0	2	-1	1	0	0	-b13	*	1	0	0	3	-2	-2	|
φ_{29}	+	176	-64	16	0	0	-8	0	4	0	1	1	0	0	0	-2	1	1	0	0	*	-b13	-1	0	0	-3	2	2	|
φ_{30}	+	1728	384	64	0	0	16	0	0	0	3	-1	0	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0	0	1	-1	-1	|
φ_{31}	+	1728	-384	64	0	0	-16	0	0	0	3	-1	0	0	0	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	0	-1	1	1	|
φ_{32}	o	5648	832	48	0	0	8	0	-4	0	-2	-1	0	0	0	-2	2	-2	b11	**	b13	*	-1	0	0	-2	2+b11	**	|
φ_{33}	o	5648	-832	48	0	0	-8	0	-4	0	-2	-1	0	0	0	2	-2	-2	**	b11	*	b13	1	0	0	2	**	-2-b11	|
φ_{34}	o	5648	-832	48	0	0	-8	0	-4	0	-2	-1	0	0	0	2	-2	-2	b11	**	*	b13	1	0	0	2	-2-b11	**	|
φ_{35}	o	5648	832	48	0	0	8	0	-4	0	-2	-1	0	0	0	-2	2	-2	**	b11	b13	*	-1	0	0	-2	**	2+b11	|
φ_{36}	+	36048	3136	112	0	0	8	0	-4	0	-2	-2	0	0	0	2	-4	2	1	1	-1	-1	0	0	0	-2	1	1	|
φ_{37}	+	36048	-3136	112	0	0	-8	0	-4	0	-2	-2	0	0	0	-2	4	2	1	1	-1	-1	0	0	0	2	-1	-1	|
φ_{38}	+	52800	1536	-320	0	0	-32	0	0	0	0	-1	0	0	0	4	-4	0	0	0	-1-3b13	*	3	0	0	8	-4	-4	|
φ_{39}	+	52800	-1536	-320	0	0	32	0	0	0	0	-1	0	0	0	-4	4	0	0	0	*	-1-3b13	-3	0	0	-8	4	4	|
φ_{40}	+	71280	6336	336	0	0	24	0	-12	0	5	-1	0	0	0	-2	1	1	0	0	1	1	1	0	0	-1	0	0	|
φ_{41}	+	71280	-6336	336	0	0	-24	0	-12	0	5	-1	0	0	0	2	-1	1	0	0	1	1	-1	0	0	1	0	0	|
φ_{42}	+	191072	9728	-224	0	0	-32	0	-8	0	-3	0	0	0	0	-4	3	1	2	2	-1+2b13	*	-2	0	0	-7	4	4	|
φ_{43}	+	191072	-9728	-224	0	0	32	0	-8	0	-3	0	0	0	0	4	-3	1	2	2	*	-1+2b13	2	0	0	7	-4	-4	|
φ_{44}	+	965952	21120	-1088	0	0	-80	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	2	-2	-2	0	0	1	0	0	0	0	0	|
φ_{45}	+	965952	-21120	-1088	0	0	80	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	2	-2	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	|

	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	@	
		10450	33	29	663	122	9	6	1												
		94400	17760	03040	552	880	216	144	536	384	384	384	96	600	60	40	42	14	16	20	
		A	A	A	B	B	B	B	C	A	A	C	D	AD	AF	AE	AD	AF	C	BG	
		A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AD	AF	AE	AD	AF	A	AG	
	ind	2D	2E	2F	4F	4G	4H	4I	4J	8E	8F	8G	8H	10C	10D	10E	14B	14C	16C	20B	
φ_{1}	++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	φ_{1}
φ_{2}	++	21	5	-7	-11	5	1	-3	1	1	-3	1	-1	-4	-2	0	0	0	-1	0	φ_{2}
φ_{3}	++	57	9	13	25	9	5	1	-3	1	5	1	-1	7	3	-1	1	-1	1	-1	φ_{3}
φ_{4}	++	70	-26	14	-26	6	-2	6	-2	-2	-2	2	2	-5	-1	-1	0	0	0	1	φ_{4}
φ_{5}	++	201	41	49	41	9	1	9	1	1	1	-3	1	1	-1	1	-2	0	-1	-1	φ_{5}
φ_{6}	++	182	-26	-14	54	6	-6	-2	2	-2	2	2	0	7	1	-1	0	0	0	1	φ_{6}
φ_{7}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{7}
φ_{8}																					φ_{8}
φ_{9}	++	372	36	-64	-76	4	8	-4	0	-4	0	0	-2	-3	1	1	1	-1	2	-1	φ_{9}
φ_{10}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{10}
φ_{11}																					φ_{11}
φ_{12}	++	622	46	-34	-114	14	-2	-2	-2	6	-2	-6	2	-3	1	1	-1	1	0	-1	φ_{12}
φ_{13}	++	77	-83	77	-19	13	-3	-3	5	1	1	-3	-3	2	2	2	0	0	1	-2	φ_{13}
φ_{14}	++	925	61	125	93	-3	13	-3	5	-7	1	1	1	0	0	-4	1	-1	-1	2	φ_{14}
φ_{15}	++	546	-30	98	-94	-30	2	2	2	2	2	2	-2	-4	-2	0	0	0	-2	0	φ_{15}
φ_{16}	++	1085	-83	-63	189	13	9	-11	-7	1	5	-3	-1	10	2	2	0	0	1	-2	φ_{16}
φ_{17}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{17}
φ_{18}																					φ_{18}
φ_{19}	++	423	183	155	-25	-41	-13	-1	-5	-1	-5	11	1	-2	0	-2	3	1	1	4	φ_{19}
φ_{20}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{20}
φ_{21}																					φ_{21}
φ_{22}	++	2271	-81	-13	127	-17	-21	7	3	7	-5	-1	-3	-4	2	4	3	1	3	-2	φ_{22}
φ_{23}	++	3645	189	189	189	61	-3	-3	-3	5	5	-3	-3	-5	-1	-1	-2	0	1	1	φ_{23}
φ_{24}	++	5832	-216	-216	-216	-56	24	24	0	-4	-4	0	0	7	-1	-1	1	1	0	-1	φ_{24}
φ_{25}	++	2430	-594	594	-162	46	-6	6	-6	2	-2	-6	0	5	-1	1	1	-1	0	1	φ_{25}
φ_{26}	++	5103	-81	567	-81	-81	-9	-33	15	3	3	3	3	3	-3	-1	0	0	1	-1	φ_{26}
φ_{27}	++	5346	-270	-378	162	-110	30	-6	6	2	-2	6	0	-4	2	0	-2	0	0	0	φ_{27}
	ind	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	10	20	10	14	28	16	20	
φ_{28}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{28}
φ_{29}																					φ_{29}
φ_{30}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{30}
φ_{31}																					φ_{31}
φ_{32}	o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{32}
φ_{33}																					φ_{33}
φ_{34}	o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{34}
φ_{35}																					φ_{35}
φ_{36}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{36}
φ_{37}																					φ_{37}
φ_{38}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{38}
φ_{39}																					φ_{39}
φ_{40}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{40}
φ_{41}																					φ_{41}
φ_{42}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{42}
φ_{43}																					φ_{43}
φ_{44}	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	φ_{44}
φ_{45}																					φ_{45}

Literaturverzeichnis

[1] J. L. ALPERIN, *Local representation theory*, Cambridge University Press, 1993.

[2] F. W. ANDERSON und K. R. FULLER, *Rings and Categories of Modules*, Springer–Verlag, 1974.

[3] D. BENSON und J. H. C. CONWAY, Diagrams for modular lattices, *J. Pure Appl. Algebra* **37**:2 (1985), S. 111–116.

[4] T. BREUER, GAP Package ctbllib, Version 1.1.3. http://math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/ctbllib.

[5] T. BREUER, J. BRAY, R. A. PARKER und R. A. WILSON, GAP Package AtlasRep, Version 1.2.1. http://math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/atlasrep.

[6] J. H. CONWAY, R. T. CURTIS, S. P. NORTON, R. A. PARKER und R. A. WILSON, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, 1985.

[7] C. CURTIS und I. REINER, *Methods of Representation Theory With Applications to Finite Groups and Orders I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, 1990.

[8] B. FISCHER, Finite groups generated by 3-transpositions. I., *Invent. Math.* **13**, (1971), S. 232–246.

[9] THE GAP GROUP, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2004. http://www.gap-system.org.

[10] D. M. GOLDSCHMIDT, *Lectures on Character Theory*, Publish or Perish, Inc., 1980.

[11] J. A. GREEN, *Polynomial Representations of GL_n*, Lecture Notes in Mathematics **830**, Springer–Verlag, 1980.

[12] A. HENKE, G. HISS und J. MÜLLER, The 7-modular decomposition matrices of the sporadic O'Nan group, *J. London Math. Soc. (2)* **60**:1 (1999), S. 58–70.

[13] G. HISS, Die sporadischen Gruppen, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **105**, (2003), S. 169–194.

[14] G. HISS und K. LUX, *Brauer Trees of Sporadic Groups*, Oxford University Press, 1989.

[15] G. HISS, K. LUX, R. PARKER und C. JANSEN, Computational modular character theory. `http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/CoMoChaT`.

[16] G. HISS, M. NEUNHÖFFER und F. NOESKE, The 2-modular characters for Fi_{23}, *J. Algebra, erscheint demnächst*, (2005).

[17] T. HOFFMAN, *Constructing Basic Algebras for the Principal Block of Sporadic Simple Groups*, Dissertation, University of Arizona, 2004.

[18] D. HOLT und S. REES, Testing modules for irreducibility, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **57**, (1994), S. 1–16.

[19] I. M. ISAACS, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1976.

[20] C. JANSEN, *Ein Atlas 3–modularer Charaktertafeln*, Dissertation, RWTH Aachen, 1995.

[21] ——, The minimal degrees of faithful representations of the sporadic simple groups and their covering groups, *LMS J. Comput. Math.* **8**, (2005), S. 122–144.

[22] C. JANSEN, K. LUX, R. PARKER und R. WILSON, *An atlas of Brauer characters*, London Mathematical Society Monographs. New Series **11**, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Appendix 2 by T. Breuer and S. Norton, Oxford Science Publications.

[23] C. JANSEN und J. MÜLLER, The 3-modular decomposition numbers of the sporadic simple Suzuki group, *Comm. Algebra* **25**:8 (1997), S. 2437–2458.

[24] C. JANSEN und R. A. WILSON, The 2-modular and 3-modular decomposition numbers for the sporadic simple O'Nan group and its triple cover, *J. London Math. Soc. (2)* **57**:1 (1998), S. 71–90.

[25] P. LANDROCK, *Finite group algebras and their modules*, Cambridge University Press, 1983.

[26] F. LÜBECK und M. NEUNHÖFFER, Enumerating large orbits and direct condensation, *Experiment. Math.* **10**:2 (2001), S. 197–205.

[27] K. LUX, *Algorithmic Methods in Modular Representation Theory*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1997.

[28] K. LUX, J. MÜLLER und M. RINGE, Peakword condensation and submodule lattices: an application of the Meat-Axe, *J. Symbolic Comput.* **17**:6 (1994), S. 529–544.

[29] K. LUX und M. WIEGELMANN, Condensing tensor product modules, in *The atlas of finite groups: ten years on (Birmingham, 1995)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **249**, Cambridge Univ. Press, 1998, S. 174–190.

[30] H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[31] J. MÜLLER, *5-modulare Zerlegungszahlen für die sporadische einfache Gruppe Co_3*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1991.

[32] ——, *On Endomorphism Rings and Character Tables*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 2003.

[33] J. MÜLLER und J. ROSENBOOM, Condensation of induced representations and an application: The 2-modular decomposition numbers of Co_2, in *Proceedings of the Euroconference on computational methods for the representations of groups and algebras, Essen, 1997*, Progr. Math. **173**, Birkhäuser, 1999, S. 309–321.

[34] M. NEUNHÖFFER, *Untersuchungen zu James' Vermutung über Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ A*, Dissertation, RWTH Aachen, 2003.

[35] W. NICKEL, *Endliche Körper in dem gruppentheoretischen Programmsystem GAP*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1988.

[36] R. PARKER, The computer calculation of modular characters, in *Computational Group Theory*, M. Atkinson (Hrsg.), Academic Press, 1984, S. 267–274.

[37] E. STIEFEL und A. FÄSSLER, *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung*, Teubner, 1979.

[38] J. G. THACKRAY, *Modular Representations of Some Finite Groups*, Dissertation, University of Cambridge, 1981.

[39] M. WIEGELMANN, *Fixpunktkondensation von Tensorproduktmoduln*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1994.

[40] R. WILSON, P. WALSH, J. TRIPP, I. SULEIMAN, S. ROGERS, R. PARKER, S. NORTON, S. LINTON und J. BRAY, Atlas of finite group representations. `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/`.

[41] R. A. WILSON, Standard generators for sporadic simple groups, *J. Algebra* **184**:2 (1996), S. 505–515.