

Burnsideringe und Thetareihen

Sebastian Schönnenbeck

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

RWTH Aachen

Lehrstuhl D für Mathematik
Prof. Dr. Gabriele Nebe

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Grundlagen und Notation	7
2.1. Gitter	7
3. Modulformen	10
3.1. Einführung	10
3.2. Thetareihen	11
3.3. Sphärische Designs	13
4. Thetareihen über dem Burnsidering	16
4.1. Burnsideringe endlicher Gruppen	16
4.2. Thetareihen mit Koeffizienten im Burnsidering	17
4.3. Wurzelgitter	19
5. Das Thompson-Smith-Gitter	28
5.1. Übersicht	28
5.2. Minimale Untergruppen und ihre Fixgitter	29
5.3. Vektoren kleiner Norm	36
5.3.1. Vektoren von Norm 12	44
5.3.2. Vektoren von Norm größer 12	50
5.4. Die Thetareihe des Thompson-Smith-Gitters	53
A. Anhang	55
A.1. Erläuterungen zu den beigefügten MAGMA-Dateien	55
B. Eigenständigkeitserklärung	57
Literaturverzeichnis	58

1. Einleitung

Eine der größten Errungenschaften auf dem Gebiet der Gruppentheorie im zwanzigsten Jahrhundert war die vollständige Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Ein nicht unwesentlicher Schritt auf dem Weg zu diesem bahnbrechenden Resultat, dessen Beweis mehr als 10000 Seiten umfasst, war 1976 die Entdeckung der nach ihm benannten Thompsongruppe durch den Amerikaner John G. Thompson. Diese gehört zu den 26 sporadisch einfachen Gruppen und wurde noch im gleichen Jahr erstmals von P. E. Smith konstruiert.

Die nicht-triviale Darstellung kleinsten Grades der Thompsongruppe ist vom gruppentheoretischen Standpunkt aus besonders interessant, da sie global irreduzibel ist, also auch nach Reduktion der (ganzzahligen) Darstellung modulo einer beliebigen Primzahl irreduzibel bleibt. Darüber hinaus liefert diese Darstellung aber auch Zugang zu einem ganzen Gitter, da sie eine ganze, positiv definite quadratische Form respektiert und somit als Untergruppe der Automorphismengruppe des zugehörigen Gitters auftaucht.

Aufgrund der hohen Dimension (die oben genannte Darstellung hat Grad 248) ist vergleichsweise wenig über das Gitter (welches aus naheliegenden Gründen den Namen Thompson-Smith-Gitter trägt) und insbesondere über seine Thetareihe bekannt. Lange Zeit war etwa über das Minimum nur die Abschätzung $4 \leq \text{Min}(\Lambda) \leq 16$ bekannt (Thompson selbst vermutete das Minimum sei tatsächlich 16). Im Folgenden konnte die obere Schranke durch explizite Konstruktion eines geeigneten Vektors auf 12 verbessert werden und erst im Jahr 2000 verbesserten Wolfgang Lempken, Bernd Schröder und Pham Huu Tiep unter Verwendung der Theorie sphärischer Designs die untere Schranke auf 10. Das tatsächliche Minimum des Thompson-Smith-Gitters ist jedoch bis heute unbekannt. In dieser Arbeit wollen wir versuchen die Struktur des Thompson-Smith-Gitters und seiner Thetareihe besser zu verstehen, indem wir die Operation der Thompsongruppe auf dem Gitter studieren und hauptsächlich Vektoren mit großem Stabilisator zählen.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden wir dazu zunächst die bekannte Theorie zu Thetareihen, sphärischen Designs und Burnside-Ringen endlicher Gruppen, welche uns eine schöne Möglichkeit zur Notation der Ergebnisse liefern, wiederholen. Im Anschluss betrachten

wir die Operation der Automorphismengruppen kleinerer Gitter auf eben diesen.

Im letzten Kapitel widmen wir uns schließlich dem Thompson-Smith-Gitter und seiner Thetareihe. Hier untersuchen wir die Operation der Thompsongruppe auf dem Thompson-Smith-Gitter und bestimmen unter anderem zu einigen Vektoren kleiner Norm die Stabilisatoren. Dies ermöglicht es uns Vektoren, mit (unter einer geeigneten Definition) kurzen Bahnen zu zählen und neben anderen Resultaten werden wir alle solchen Vektoren von Norm 12 und 16 klassifizieren.

Mein Dank gilt meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Gabriele Nebe für ihre intensive Unterstützung und die Möglichkeit, mich bei Problemen jederzeit an sie wenden zu können.

2. Grundlagen und Notation

2.1. Gitter

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die grundlegenden Bezeichnungen und Definitionen festlegen, welche wir im Folgenden verwenden werden.

Definition 2.1.1 1. Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Einen \mathbb{Z} -Teilmodul $L \leq V$ nennen wir (volles) Gitter in V , falls eine \mathbb{R} -Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ ($n = \dim(V)$) existiert, sodass $L = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}}$. B heißt dann eine Gitterbasis von L und n die Dimension des Gitters.

2. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine beliebige Gitterbasis von L , so heißt die Matrix

$$\text{Gram}(L) := (b_i, b_j)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$$

Grammatrix von L bezüglich (\cdot, \cdot) und der Basis B sowie $\det(L) := \det(\text{Gram}(L))$ die Determinante von L .

3. Mit $\text{covol}(L) := \text{vol}(V/L) := \sqrt{|\det(L)|}$ bezeichnen wir das Covolumen von L .

Bemerkung 2.1.2 1. Ist C eine weitere \mathbb{R} -Basis von V , so ist C genau dann eine Gitterbasis von L , wenn die Basiswechselmatrix ${}^Cid^B$ in $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ liegt. Die Grammatrix von L bezüglich C ergibt sich dann als $({}^Bid^C)^T \text{Gram}(L) {}^Bid^C$.

2. Der erste Teil dieser Bemerkung stellt insbesondere sicher, dass $\det(L)$ und damit auch $\text{covol}(L)$ wohldefiniert sind.

3. $\text{covol}(L)$ ist genau das Volumen des von den Basisvektoren aufgespannten Parallelepipedes, welcher (für ein volles Gitter) außerdem einen Fundamentalbereich der natürlichen Operation von L auf V darstellt.

Definition 2.1.3 Sei $L \leq V$ wie oben ein volles Gitter im euklidischen Vektorraum $(V, (\cdot, \cdot))$.

1. $L^\# := \{v \in V \mid (v, l) \in \mathbb{Z} \forall l \in L\}$ heißt das duale Gitter zu L .
2. Gilt $L \subset L^\#$, so nennen wir L ganz. Gilt sogar Gleichheit, so heißt L unimodular.

Bemerkung 2.1.4 1. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Gitterbasis von L , so ist die Dualbasis $B^\# = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ eine Gitterbasis von $L^\#$.

2. Nach dem ersten Teil dieser Bemerkung ist offensichtlich $\text{Gram}(L)$ die Basiswechselmatrix von B nach $B^\#$.
3. Ein Gitter ist genau dann ganz, wenn für seine Grammatrix gilt: $\text{Gram}(L) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Ein Gitter ist also genau dann unimodular, wenn $\text{Gram}(L) \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$.
4. Im ganzen Fall ist $\text{Gram}(L)$ genau die Relationenmatrix der endlichen, abelschen Gruppe $L^\#/L$.

Definition 2.1.5 1. Ein Gitter $L \leq \mathbb{R}^n$ heißt gerades Gitter, falls

$$(v, v) \in 2\mathbb{Z} \forall v \in L.$$

2. Ist L ganz, so ist

$$L_0 := \{x \in L \mid (x, x) \in 2\mathbb{Z}\} \leq L$$

ein Teilgitter von L vom Index 1 oder 2, genannt gerades Teilgitter von L .

Bemerkung 2.1.6 Ist $L \leq \mathbb{R}^n$ ein Gitter und (b_1, \dots, b_n) eine Gitterbasis von L , so ist L genau dann gerade, wenn $(b_i, b_i) \in 2\mathbb{Z} \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.1.7 Wir wollen die folgenden Bezeichnungen festlegen:

$$\min(L) := \min \{(v, v) \mid 0 \neq v \in L\}$$

$$\text{Min}(L) := \{v \in L \mid (v, v) = \min(L)\}$$

Beispiel 2.1.8 $L = \mathbb{Z}^2 \leq \mathbb{R}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt ist ein ganzes und unimodulares, aber kein gerades Gitter. Es gilt $\min(L) = 1$ und $\text{Min}(L) = \{\pm e_1, \pm e_2\}$.

Definition 2.1.9 Sei $L \leq (V, (\cdot, \cdot))$ ein volles Gitter und $U \leq \text{GL}(V)$ der Stabilisator von (\cdot, \cdot) in $\text{GL}(V)$, dann definieren wir:

$$\text{Aut}(L) := \{g \in U \mid gL = L\}$$

die Automorphismengruppe von L .

Bemerkung 2.1.10 Existiert $v \in L$ mit $(v, v) = r$, so operiert $G := \text{Aut}(L)$ kanonisch auf $\{v \in L \mid (v, v) = r\}$. Insbesondere gilt $G\text{Min}(L) = \text{Min}(L)$.

3. Modulformen

3.1. Einführung

Als Vorbereitung auf das nächste Kapitel folgen nun einige Definitionen und Sätze aus der Theorie der Modulformen.

Bemerkung 3.1.1 *Die Gruppe*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

operiert auf der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

vermöge Möbiustransformationen durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Definition 3.1.2 *Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Modulform vom Gewicht $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ zur Gruppe $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1.

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k \cdot f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

2. *f hat eine Potenzreihenentwicklung der Form:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n z)$$

Bemerkung 3.1.3 Wegen $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$ ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ bereits eine Modulform, wenn sie $f(z+1) = f(z)$ und $f(-1/z) = z^k f(z)$ erfüllt, sowie die obige Potenzreihenentwicklung besitzt.

Bemerkung 3.1.4 Offensichtlich bilden die Modulformen vom Gewicht k zur Gruppe Γ einen \mathbb{C} -Vektorraum, den wir mit $M_k(\Gamma)$ bezeichnen wollen. Des Weiteren gilt für $f \in M_k(\Gamma)$ und $g \in M_l(\Gamma)$: $fg \in M_{k+l}(\Gamma)$. Die Menge der Modulformen bildet also die durch das Gewicht graduierte \mathbb{C} -Algebra:

$$M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} M_k(\Gamma)$$

Lemma 3.1.5 Sei $M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ wie oben. Dann ist:

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_k(SL_2(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Beweis: Ein Beweis dieser Tatsache findet sich in [Ebe02] Kapitel 2 Korollar (2.2). \square

3.2. Thetareihen

Die Aussagen und Beweise dieses Abschnitts entnehmen wir [Ebe02].

Definition 3.2.1 Sei L ein ganzes Gitter im euklidischen Vektorraum $(V, (\cdot, \cdot))$. Die formale Potenzreihe

$$\theta_L = \sum_{v \in L} q^{(v,v)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

mit $a_n = |\{v \in L \mid (v,v) = n\}|$ sowie $q = \exp(\pi iz)$ heißt die Thetareihe von L .

Beispiel 3.2.2 Für $L = \mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ mit dem üblichen Skalarprodukt gilt:

$$\theta_L = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 2q^{n^2}$$

Lemma 3.2.3 Ist L ein ganzes Gitter, so hat θ_L Konvergenzradius 1 als Potenzreihe in q . Setzen wir $q = \exp(\pi iz)$, so ist θ_L eine holomorphe Funktion auf

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |q| = |\exp(\pi iz)| < 1\}.$$

Beweis: Ein Beweis dieser Tatsache findet sich in [Ebe02] Kapitel 2 (Lemma(2.2)).

Bemerkung 3.2.4 Aufgrund der $2\pi i$ -Periodizität von \exp erfüllt die Thetareihe eines ganzen Gitters L die Funktionalgleichung $\theta_L(z+2) = \theta_L(z)$. Für ein gerades Gitter gilt sogar $\theta_L(z+1) = \theta_L(z)$.

Satz 3.2.5 (Theta-Transformationsformel) Ist L ein (volles) Gitter in \mathbb{R}^n so gilt:

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{n/2} \det(L)^{-1/2} \theta_{L^\#}(z)$$

Beweis: [Ebe02] enthält in Kapitel 2 (Proposition(2.1)) einen Beweis der Formel.

Mit Hilfe der Theta-Transformationsformel können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.2.6 Ist $L \leq \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter, so gilt:

1. $n \equiv 0 \pmod{8}$,
2. θ_L ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$.

Beweis: Wir folgen dem Beweis von Satz (2.1) in [Ebe02]. Aufgrund der Theta-Transformationsformel und 3.1.3 folgt (2) bereits aus (1). Sei nun zunächst $\mathbb{E} n \equiv 4 \pmod{8}$ (falls dies nicht der Fall ist, können wir ohne die entscheidenden Eigenschaften zu verändern L durch seine zweifache beziehungsweise vierfache orthogonale Summe mit sich selbst ersetzen). Nun gilt also:

$$\theta_L(z) = \theta_L(z+1),$$

da L gerade ist sowie

$$\theta_L\left(\frac{-1}{z}\right) = (-1)^{n/4} z^{n/2} \theta_L(z) = -z^{n/2} \theta_L(z)$$

nach der Theta-Transformationsformel ($\det(L) = 1$, da L unimodular).

Also folgt insbesondere:

$$\theta_L(T(-1/z)) = \theta_L((TS)z) = -z^{n/2} \theta_L(z)$$

Des Weiteren gilt: $TSz = \frac{z-1}{z}$, $(TS)^2z = \frac{-1}{z-1}$ sowie $(TS)^3 = I_2$. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\theta_L(z) &= \theta_L((TS)^3z) \\
&= - \left(\frac{-1}{z-1} \right)^{n/2} \theta_L((TS)^2z) \\
&= - \left(\frac{-1}{z-1} \right)^{n/2} \cdot \left(- \left(\frac{z-1}{z} \right)^{n/2} \theta_L(TSz) \right) \\
&= \left(\frac{-1}{z-1} \right)^{n/2} \cdot \left(\frac{z-1}{z} \right)^{n/2} \cdot (-z^{n/2} \theta_L(z)) \\
&= -\theta_L(z)
\end{aligned}$$

Widerspruch. □

3.3. Sphärische Designs

Die Sätze und Beweise des folgenden Kapitels gehen zurück auf [Ven01].

Definition 3.3.1 Eine endliche Teilmenge $\emptyset \neq X \subset S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x) = 1\}$ heißt sphärisches t -Design, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gilt $\frac{1}{\#X} \sum_{x \in X} f(x) = \int_{S^{n-1}} f(x) d\lambda(x)$ für alle homogenen Polynome $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ vom Grad $k \leq t$.
2. Es gilt $\frac{1}{\#X} \sum_{x \in X} f(x) = 0$ für alle harmonischen Polynome $f \in \text{Harm}(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid \Delta g = 0\}$ vom Grad $k \leq t$, wobei Δ wie üblich den Laplace-Operator $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ darstellt.
3. Ist $\{g, u\} = \{t, t-1\}$ mit g gerade und u ungerade, so existiert eine Konstante c_g mit der Eigenschaft:

$$\sum_{x \in X} (x, \alpha)^g = c_g (\alpha, \alpha)^{\frac{g}{2}}, \quad \sum_{x \in X} (x, \alpha)^u = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Ein Beweis, dass diese Aussagen tatsächlich äquivalent sind, findet sich [Ven01].

Satz 3.3.2 Die Konstante c_g aus 3.3.1(3) ist:

$$c_g = |X| \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (g-1)}{n \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+g-2)}$$

Beweis: Wir folgen dem Beweis in [Ven01]. Angenommen wir haben

$$\sum_{x \in X} (x, \alpha)^g = c_g (\alpha, \alpha)^{\frac{g}{2}}.$$

Dann gilt auch durch $\frac{g}{2}$ -faches Anwenden des Laplace-Operators (in α):

$$|X| \cdot g! = (\Delta_\alpha)^{\frac{g}{2}} \sum_{x \in X} (x, \alpha)^g = (\Delta_\alpha)^{\frac{g}{2}} c_g (\alpha, \alpha)^{\frac{g}{2}} = c_g \cdot 2^{\frac{g}{2}} \cdot \frac{g!}{2} \cdot (n+g-2) \cdot \dots \cdot n$$

Durch Umstellen nach c_g folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.3.3 1. Ist X symmetrisch um 0, also $X = -X$, so ist die zweite Gleichung in 3.3.1(3) offensichtlich immer erfüllt.

2. Eine disjunkte, endliche Vereinigung von t -Designs bildet wieder ein t -Design.

Definition 3.3.4 Ein Gitter $L \leq \mathbb{R}^n$ heißt stark perfekt, falls $\text{Min}(L)$ (nach eventuellem Reskalieren) ein sphärisches 4-Design bildet.

Satz 3.3.5 Ist $L \leq \mathbb{R}^n$ ein stark perfektes Gitter, so gilt:

$$\min(L) \min(L^\#) \geq \frac{n+2}{3}$$

Beweis: $\text{Min}(L)$ bildet ein sphärisches 4- sowie ein sphärisches 2-Design. Nach 3.3.1(3) und 3.3.2 gilt also:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^2 &= \min(L) |\text{Min}(L)| \frac{1}{n} (\alpha, \alpha), \\ \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^4 &= \min(L)^2 |\text{Min}(L)| \frac{3}{n(n+2)} (\alpha, \alpha)^2 \end{aligned}$$

Setzen wir nun ein $\alpha \in \text{Min}(L^\#)$ ein und ziehen die linken Seiten voneinander ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^2 ((x, \alpha)^2 - 1) \\ &= \frac{3}{n(n+2)} \min(L)^2 |\text{Min}(L)| \min(L^\#)^2 - \frac{1}{n} \min(L) |\text{Min}(L)| \min(L^\#) \\ &= \frac{1}{n} \min(L) \min(L^\#) |\text{Min}(L)| \left(\frac{3}{n+2} \min(L) \min(L^\#) - 1 \right) \end{aligned}$$

Wegen $(x, \alpha) \in \mathbb{Z} \forall x \in L$ ist die linke Seite größer-gleich 0 und damit auch die rechte Seite. Die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 3.3.6 Wegen $\text{Aut}(L)\text{Min}(L) = \text{Min}(L)$ ist $\sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^4$ ein $\text{Aut}(L)$ -invariantes homogenes Polynom (in α) vom Grad 4. Hat $\text{Aut}(L)$ also keine Invarianten vom Grad 4 außer dem Quadrat der stabilisierten quadratischen Form, so bildet die Summe ein Vielfaches von $(\alpha, \alpha)^2$ und $\text{Min}(L)$ somit nach 3.3.1(3) ein sphärisches 4-Design. Insbesondere ist L dann stark perfekt. Des Weiteren bildet für $0 \neq v \in L$ beliebig $\text{Aut}(L)v$ (nach Reskalieren) ein sphärisches 4-Design.

Beweis: Sei B eine beliebige Gitterbasis von L und $\Phi := \text{Gram}(L)$ die zu (\cdot, \cdot) gehörende Grammatrix (bezüglich B). Da $\text{Aut}(L) \leq O(V)$, gilt $g^T \Phi g = \Phi \forall g \in \text{Aut}(L)$. Demnach gilt (Rechnung in der Darstellung zur Basis B):

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, g\alpha)^4 &= \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x^T \Phi g\alpha)^4 \\ &= \sum_{x \in \text{Min}(L)} ((x^T g^{-T} \Phi g^{-1} g\alpha)^4 \\ &= \sum_{x \in \text{Min}(L)} (g^{-1}x, \alpha)^4 \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^4 \end{aligned}$$

*: Da $\text{Aut}(L)\text{Min}(L) = \text{Min}(L)$.

Also ist $\sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^4$ ein $\text{Aut}(L)$ -invariantes Polynom in α . \square

4. Thetareihen über dem Burnsidering

4.1. Burnsideringe endlicher Gruppen

Definition 4.1.1 Sei G eine endliche Gruppe. Auf der Menge \hat{G} der Ähnlichkeitsklassen $[M]$ der endlichen G -Mengen M definieren wir die folgenden Verknüpfungen:

$$\hat{G} \times \hat{G} \rightarrow \hat{G} : [M] + [N] := [M \dot{\cup} N] \text{ mit } M \cap N = \emptyset$$

$$\hat{G} \times \hat{G} \rightarrow \hat{G} : [M] \cdot [N] := [M \times N]$$

wobei wir für die Addition die Operation von G auf M und N auf $M \dot{\cup} N$ fortsetzen und für die Multiplikation G auf $M \times N$ diagonal operiert. Man sieht leicht ein, dass die zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ assoziativ sind, sodass $(\hat{G}, +, \cdot)$ ein kommutativer Halbring mit $0 = [\emptyset]$ und $1 = [\{1\}]$ ist (d.h. $(\hat{G}, +)$ und (\hat{G}, \cdot) sind kommutative Monoide und die Distributivgesetze gelten).

Auf $\hat{G} \times \hat{G}$ definieren wir nun die Äquivalenzrelation \sim :

$$([M_1], [M_2]) \sim ([N_1], [N_2]) :\Leftrightarrow [M_1] + [N_2] = [N_1] + [M_2]$$

Die Äquivalenzklasse eines Paares $([M], [N])$ bezeichnen wir auch als $[M] - [N]$. Insbesondere bezeichnen wir die Äquivalenzklassen von $([M], [\emptyset])$ und $([\emptyset], [M])$ als $[M]$ und $-[M]$.

Mit dieser Äquivalenzrelation können wir jetzt dem Burnsidering von G definieren als $B(G) := (\hat{G} \times \hat{G}) / \sim$.

$B(G)$ machen wir mittels der zwei folgenden Verknüpfungen zu einem Ring:

$$([M_1] - [M_2]) + ([N_1] - [N_2]) := ([M_1] + [N_1]) - ([M_2] + [N_2])$$

$$([M_1] - [M_2]) \cdot ([N_1] - [N_2]) := ([M_1] \cdot [N_1] + [M_2] \cdot [N_2]) - ([M_1] \cdot [N_2] + [M_2] \cdot [N_1])$$

Zudem können wir \hat{G} in $B(G)$ einbetten durch $\hat{G} \hookrightarrow B(G) : [M] \mapsto [M] := [M] - [\emptyset]$, d.h. die Abbildung ist injektiv und verträglich mit $+$ und \cdot .

$B(G)$ ist ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\mathcal{B} := \{[G/U] \mid U \in \mathcal{V}\}$, wobei \mathcal{V} ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G ist.

Dass dies tatsächlich einen Ring definiert, ist beispielsweise in [Ben98] Kapitel 5 bewiesen.

Die multiplikative Struktur des Burnsiderings ist hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Wir werden in dieser Arbeit nur selten im Burnsidering rechnen und ihn stattdessen vorwiegend als geschickte Methode zur Notation der Ergebnisse nutzen.

4.2. Thetareihen mit Koeffizienten im Burnsidering

Bemerkung 4.2.1 Ist $L \leq \mathbb{R}^n$ ein ganzes Gitter, so ist (wie bereits erwähnt) für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Menge $\{v \in L \mid (v, v) = n\}$ eine $\text{Aut}(L)$ -Menge und lässt sich somit als Element von $\mathcal{B}(\text{Aut}(L))$ auffassen.

Definition 4.2.2 Sei $L \leq \mathbb{R}^n$ ein ganzes Gitter und setze

$$A_n := \{v \in L \mid (v, v) = n\}, \quad a_n := |A_n|$$

Dann ist

$$\theta_L(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n q^n \in \mathbb{Z}[[q]]$$

die übliche Thetareihe von L und wir definieren

$$\theta_L^{\mathcal{B}(G)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} [A_n] q^n \in \mathcal{B}(\text{Aut}(L))[[q]]$$

die Thetareihe von L mit Koeffizienten im Burnsidering der Automorphismengruppe von L .

Bemerkung 4.2.3 1. Während die übliche Thetareihe eine Gitters L lediglich beschreibt, wieviele Vektoren von gegebener Länge es in L gibt, kodiert $\theta_L^{\mathcal{B}}$ zusätzlich

Informationen darüber, wie sich die Menge von Vektoren gegebener Norm unter der Operation von $\text{Aut}(L)$ (oder einer geeigneten Untergruppe) verhält.

2. Offensichtlich kann man in 4.2.2 statt der gesamten Automorphismengruppe auch geeignete Untergruppen und deren Burnsideing betrachten.

Beispiel 4.2.4 Für $L = \mathbb{Z}^2 \leq \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt ist

$$D_8 \cong \text{Aut}(L) = \langle a := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Dabei gilt für $\theta_L^{\mathcal{B}}$: A_1 und A_4 sind isomorphe, transitive D_8 -Mengen vom Typ $D_8/\langle (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}) \rangle$, während A_2 (obwohl ebenfalls von Ordnung 4) eine nicht zu A_1 isomorphe transitive D_8 -Menge vom Typ $D_8/\langle (\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}) \rangle$ ist. A_5 ist als D_8 -Menge isomorph zu D_8 selbst. Interessanter ist A_n in diesem Fall, wenn sich n auf verschiedene Arten als Summe zweier Quadrate schreiben lässt. Beispielsweise zerfällt A_{25} als D_8 -Menge in zwei Bahnen; eine vom Typ D_8 (Bahn von $(3, 4)$) und eine vom Typ $D_8/\langle (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}) \rangle$ (Bahn von $(5, 0)$).

Bemerkung 4.2.5 Ist L ein Gitter und $G \leq \text{Aut}(L)$ so gilt:

$$\begin{aligned} \theta_L &= \sum_{x \in L} q^{(x,x)} \\ &= \sum_{U \leq G} \sum_{x \in L, \text{Stab}_G(x)=U} q^{(x,x)} \end{aligned}$$

Wir wollen $\sum_{x \in L, \text{Stab}_G(x)=U} q^{(x,x)}$ mit η_U bezeichnen. Man beachte, dass η_U im Allgemeinen nicht die Thetareihe des Fixgitters von U ist. Beispielsweise ist $0 \in \text{Fix}_U(L)$, aber $\text{Stab}_G(0) \neq U$, falls $U \neq G$. Der Koeffizient von q^0 in η_U ist für $U \neq G$ mithin 0 und nicht 1. Offensichtlich ist η_U nur von der Konjugiertenklasse von U in G abhängig.

Lemma 4.2.6 In der Situation der vorangehenden Bemerkung sei jetzt $(U_i)_{i=0}^s$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G mit der Eigenschaft, dass $i \leq j$ falls eine zu U_j konjugierte Untergruppe V existiert mit $V \leq U_i$, also insbesondere $U_0 = G$ und $U_s = \{1\}$. Setze außerdem $\alpha_{i,j} := |\{U \in U_j^G \mid U_i \leq U\}|$. Dann gilt:

- 1.

$$\eta_U = \theta_{\text{Fix}(U_i)} - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j} \eta_{U_j}$$

- 2.

$$\theta_L^{\mathcal{B}(G)} = \sum_{i=0}^s \frac{1}{[N_G(U_i) : U_i]} \eta_{U_i} [G/U_i]$$

Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
 \eta_{U_i} &= \sum_{\text{Stab}_G(x)=U_i} q^{(x,x)} \\
 &= \sum_{U_i \leq \text{Stab}_G(x)} q^{(x,x)} - \sum_{U_i \leq \text{Stab}_G(x)} q^{(x,x)} \\
 &= \theta_{\text{Fix}(U_i)} - \sum_{U_i \leq V} \eta_V \\
 &= \theta_{\text{Fix}(U_i)} - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j} \eta_{U_j}
 \end{aligned}$$

2. η_{U_i} zählt die Vektoren, in L deren Stabilisator gerade U_i ist. Nun ist $\text{Fix}_{U_i}([G/U_i]) = [N_G(U_i) : U_i]$; jede Bahn vom Typ $[G/U_i]$ mit Vektoren der Norm n liefert also einen Beitrag $[N_G(U_i) : U_i] q^n$ zu η_{U_i} . Da außerdem jede Bahn von Vektoren als G -Menge ähnlich zu $[G/U_i]$ ist für ein geeignetes i - also in der Summe auftaucht -, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 4.2.7 Möchte man in der obigen Situation $\theta_L^{\mathcal{B}(G)}$ tatsächlich bestimmen, so kann man offensichtlich die U_i , die nicht als voller Stabilisator eines Elements auftauchen, ignorieren. Rechnerisch ist es also von Vorteil, zunächst einen Überblick über die auftretenden Stabilisatoren zu gewinnen.

4.3. Wurzelgitter

Definition 4.3.1 1. Ein gerades Gitter L heißt Wurzelgitter, falls

$$L = \langle \{x \in L \mid (x, x) = 2\} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

2. $R(L) := \{x \in L \mid (x, x) = 2\}$ heißt die Menge der Wurzeln von L .

3. Zu $x \in R(L)$ definiere $\sigma_x \in \text{Aut}(L)$ die Spiegelung entlang x vermöge

$$\begin{aligned}
 \sigma_x : L &\rightarrow L \\
 v &\mapsto v - (v, x)x
 \end{aligned}$$

4. Ist L ein Wurzelgitter, so heißt $W(L) := \langle \sigma_x | x \in R(L) \rangle$ die Weyl-Gruppe von L .
5. $B \subset R(L)$ heißt ein Fundamentalsystem von Wurzeln, falls B eine Gitterbasis von L ist und sich jede Wurzel von L als Linearkombination der Elemente von B mit ausschließlich nichtnegativen oder ausschließlich nichtpositiven Koeffizienten schreiben lässt.

Satz 4.3.2 *Ist L ein Wurzelgitter, so besitzt L ein Fundamentalsystem von Wurzeln. Ist B ein solches Fundamentalsystem von Wurzeln, so gilt $(b, b') \in \{0, -1, 2\} \forall b, b' \in B$.*

Beweis: Einen Beweis kann man unter anderem in [Ebe02] Satz (1.1) nachlesen.

Definition 4.3.3 *Sei L ein Wurzelgitter und B ein Fundamentalsystem von Wurzeln. Der Coxeter-Dynkin-Graph von L ist der Graph dessen Ecken die Elemente von B sind und bei dem b und b' genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $(b, b') = -1$.*

Definition 4.3.4 *Sei \mathbb{K} ein Körper und $G \leq \text{GL}_n(\mathbb{K})$ eine endliche Gruppe.*

1. Ein Element $s \in G$ heißt (Pseudo-)Spiegelung, falls $\dim_{\mathbb{K}}(E_1(s)) = n - 1$, wobei $E_1(s)$ den Eigenraum zum Eigenwert 1 bezeichne.
2. G heißt Spiegelungsgruppe, falls $G = \langle s \in G \mid s \text{ Spiegelung} \rangle$.

Proposition 4.3.5 *Ist $L \leq \mathbb{R}^n$ ein Wurzelgitter, so ist $W(L)$ eine Spiegelungsgruppe.*

Beweis: Ist $v \in L$ eine Wurzel, so ist

$$E_1(\sigma_v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, v) = 0\} = \langle v \rangle^\perp$$

von Dimension $n - 1$. □

Wir wollen nun für einige Gitter aus den beiden unendlichen Familien von irreduziblen Wurzelgittern (bis auf Isometrie $A_n, D_n (n \geq 4)$) ihre Thetareihen mit Koeffizienten in den Burnside-Ringen ihrer Weyl-Gruppen studieren.

Definition 4.3.6 *Wir legen die folgende Bezeichnung fest:*

$$A_n := \left\{ x \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^{n+1}$$

Dabei versehen wir den \mathbb{R}^{n+1} mit dem Standardskalarprodukt.

Bemerkung 4.3.7 Der Coxeter-Dynkin-Graph von A_n ist gegeben durch:

$$b_1 \text{ --- } b_2 \text{ --- } \dots \text{ --- } b_n$$

Dabei ist beispielsweise $\{b_i := e_i - e_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}$ ein geeignetes Fundamentalsystem von Wurzeln. Aus diesem erhalten wir des Weiteren, dass die Weyl-Gruppe von A_n gerade S_{n+1} in der üblichen Permutationsdarstellung ist ($\sigma_{b_i} \equiv (i, i+1)$).

Lemma 4.3.8 Ist $v \in A_n$, so ist $\text{Stab}_{S_{n+1}}(v)$ konjugiert zu einer Gruppe der Gestalt $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$. Des Weiteren ist jede solche Gruppe konjugiert zu einer Untergruppe gleicher Gestalt, die zusätzlich $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ erfüllt.

Beweis: Ein Element $\pi \in S_{n+1}$ lässt v genau dann fest, wenn $\pi(i) = j$ immer $v_i = v_j$ impliziert. Nach geeigneter Permutation der Einträge von v können wir \mathbb{C} annehmen, dass $v_1 = v_2 = \dots = v_{\lambda_1} < v_{\lambda_1+1} = \dots = v_{\lambda_1+\lambda_2} < \dots < v_{\lambda_1+\dots+\lambda_{k-1}+1} = \dots = v_n$. Damit nun obige Implikation gilt, darf π also nur die ersten λ_1 Einträge, dann die nächsten λ_2 Einträge usw. und schließlich die letzten λ_k Einträge von v permutieren. Also liegt π in $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$. Da außerdem jedes Element dieser Gruppe v festlässt, ist dies bereits der Stabilisator. \square

Beispiel 4.3.9 Wir wollen nun 4.2.6 und 4.3.8 nutzen, um tatsächlich die Thetareihe von A_4 mit Koeffizienten im Burnside-Ring der S_5 auszurechnen (beziehungsweise eine Näherung der Reihe bis zu einer geeigneten Potenz anzugeben). Die Gruppe $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ ist offensichtlich eindeutig festgelegt durch das Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Ordnen wir die möglichen Tupel, die zusätzlich $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ erfüllen, lexikographisch, so erfüllen die zugehörigen Gruppen außerdem die in 4.2.6 geforderte Ordnungsbedingung. Wir erhalten also:

<i>Stabilisator</i>	<i>Fixgitter</i>	$\theta_{\text{Fix}(Stab)}$	η_{Stab}
S_5	$\{0\}$	1	1
$S_4 \times S_1$	$\langle(1, 1, 1, 1, -4)\rangle$	$1 + 2q^{20} + \dots$	$2q^{20} + \dots$
$S_3 \times S_2$	$\langle(2, 2, 2, -3, -3)\rangle$	$1 + 2q^{30} + \dots$	$2q^{30} + \dots$
$S_3 \times S_1 \times S_1$	$\langle(0, 0, 0, 1, -1)$ $(1, 1, 1, -3, 0)\rangle$	$1 + 2q^2 + 6q^6 + 4q^{12} + 2q^{18}$ $+ 4q^{20} + \dots$	$2q^2 + 6q^8 + 4q^{12}$ $+ 2q^{18} + \dots$
$S_2 \times S_2 \times S_1$	$\langle(0, 0, 1, 1, -2)$ $(1, 1, -1, -1, 0)\rangle$	$1 + 2q^4 + 4q^6 + 4q^{14} + 2q^{16}$ $+ 2q^{20} + 4q^{24} + \dots$	$2q^4 + 4q^6 + 4q^{14}$ $+ 2q^{16} + 4q^{24} + \dots$
$S_2 \times S_1^3$	$\langle(0, 0, 0, 1, -1)$ $(0, 0, 1, -1, 0)$ $(1, 1, -2, 0, 0)\rangle$	$1 + 6q^2 + 6q^4 + 12q^6 + 18q^8$ $+ 12q^{12} + 24q^{14} + 18q^{16} + 18q^{18}$ $+ 6q^{20} + 24q^{22} + 24q^{24} + \dots$	$12q^{14} + 12q^{16}$ $+ 12q^{18} + \dots$
$\{1\}$	A_4	$1 + 20q^2 + 30q^4 + 60q^6 + 60q^8$ $+ 120q^{10} + 40q^{12} + 180q^{14}$ $+ 150q^{16} + 140q^{18} + 130q^{20}$ $+ 240q^{22} + 180q^{24} + \dots$	$120q^{10} + 120q^{20}$ $+ \dots$

Dabei ergibt sich beispielsweise der Eintrag in der sechsten Zeile als

$$\eta_{S_{(2,1,1,1)}} = \theta_{\text{Fix}(S_{(2,1,1,1)})} - \eta_{S_5} - 3\eta_{S_{(4,1)}} - 4\eta_{S_{(3,2)}} - 3\eta_{S_{(3,1,1)}} - 3\eta_{S_{(2,2,1)}}$$

da $S_{(2,1,1,1)}$ in vier Gruppen vom Typ $S_{(3,2)}$ und jeweils drei Gruppen vom Typ $S_{(4,1)}$, $S_{(3,1,1)}$ beziehungsweise $S_{(2,2,1)}$ liegt. 4.2.6 folgend können wir also nun eine Näherung der Thetareihe über dem Burnsideing der Weylgruppe angeben:

$$\begin{aligned} \theta_{A_4}^{B(S_5)} &= [S_5/S_5] + [S_5/S_{(3,1,1)}] q^2 + [S_5/S_{(2,2,1)}] q^4 + 2 [S_5/S_{(2,2,1)}] q^6 + [S_5/S_{(3,1,1)}] q^8 \\ &\quad + [S_5/\{1\}] q^{10} + 2 [S_5/S_{(3,1,1)}] q^{12} + 2([S_5/S_{(2,2,1)}] + [S_5/S_{(2,1,1,1)}]) q^{14} + \dots \end{aligned}$$

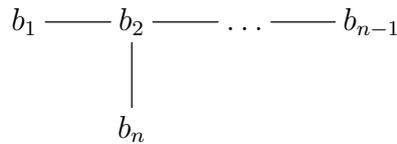
Mit der naheliegenden Bezeichnung $S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$.

Definition 4.3.10 Wir legen die folgende Bezeichnung fest:

$$D_n := \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (x, x) \in 2\mathbb{Z}\} \leq \mathbb{R}^n$$

das gerade Teilgitter von \mathbb{Z}^n mit dem Standardskalarprodukt.

Bemerkung 4.3.11 Der Coxeter-Dynkin-Graph von D_n ist gegeben durch:



Ein geeignetes Fundamentalsystem von Wurzeln ist beispielsweise $b_i = e_i - e_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $b_n = -(e_1 + e_2)$. Die Weyl-Gruppe von D_n ist identisch zur Automorphismengruppe von \mathbb{Z}^n : $W(D_n) = C_2 \wr S_n$

Lemma 4.3.12 *Ist $v \in D_n$, so ist $\text{Stab}_{W(D_n)}(v)$ konjugiert zu einer Gruppe der Gestalt $(C_2 \wr S_{\lambda_1}) \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ mit $\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.*

Beweis: Sei $v \in D_n$ beliebig. Nach Permutation der Einträge und geeigneter Änderung der Vorzeichen können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $v_1 = \dots = v_{\lambda_1} = 0$, $0 < v_{\lambda_1+\dots+\lambda_i+1} = \dots = v_{\lambda_1+\dots+\lambda_{i+1}}$ für $i > 1$, $v_{\lambda_1+\dots+\lambda_i} \neq v_{\lambda_1+\dots+\lambda_j}$, falls $i \neq j$, $\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ sowie $v_i \geq 0 \forall i$. Dann besteht der Stabilisator in der Weyl-Gruppe aber aus allen Elementen, die auf den ersten λ_1 Elementen durch Permutation und Vorzeichenwechsel und dann immer jeweils auf den nächsten λ_i Elementen nur durch Permutation operieren. Er ist also von der gewünschten Gestalt. \square

Beispiel 4.3.13 *Wie in 4.3.9 wollen wir nun eine Näherung für die Thetareihe von D_4 mit Koeffizientem im Burnside-Ring der Weyl-Gruppe angeben. Um eine geeignete Reihenfolge für die auftretenden Stabilisatoren zu erhalten, gehen wir analog zu 4.3.9 vor und betrachten zunächst die Gruppen mit nicht verschwindendem Kranzproduktanteil (in obiger Darstellung).*

Stabilisator	Fixgitter	$\theta_{\text{Fix}(\text{Stab})}$	η_{Stab}
$C_2 \wr S_4$	$\{0\}$	1	1
$(C_2 \wr S_3) \times S_1$	$\langle (0, 0, 0, 2) \rangle$	$1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots$	$2q^4 + 2q^{16} + \dots$
$(C_2 \wr S_2) \times S_2$	$\langle (0, 0, 1, 1) \rangle$	$1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots$	$2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots$
$(C_2 \wr S_2) \times S_1 \times S_1$	$\langle (0, 0, 2, 0) \rangle$ $\langle (0, 0, 1, 1) \rangle$	$1 + 4q^2 + 4q^4 + 4q^8 + 8q^{10}$ $+ 4q^{16} + 4q^{18} + 8q^{20} + \dots$	$8q^{10} + 8q^{20} + \dots$
$(C_2 \wr S_1) \times S_3$	$\langle (0, 2, 2, 2) \rangle$	$1 + 2q^{12} + \dots$	$2q^{12} + \dots$
$(C_2 \wr S_1) \times S_2 \times S_1$	$\langle (0, 1, 1, 0) \rangle$ $\langle (0, 0, 0, 2) \rangle$	$1 + 2q^2 + 2q^4 + 4q^6 + 2q^8$ $+ 4q^{12} + 2q^{16} + 6q^{18}$ $+ 4q^{22} + \dots$	$4q^6 + 4q^{18} + \dots$
$(C_2 \wr S_1) \times S_1^3$	$\langle (0, 1, -1, 0) \rangle$ $\langle (0, 0, 1, -1) \rangle$ $\langle (0, 0, 0, 2) \rangle$	$1 + 12q^2 + 6q^4 + 24q^6$ $+ 12q^8 + 24q^{10} + 8q^{12}$ $+ 48q^{14} + 6q^{16} + 36q^{18}$ $+ 24q^{20} + 24q^{22} + \dots$	$48q^{14} + \dots$

S_4	$\langle(1, 1, 1, 1)\rangle$	$1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots$	$2q^4 + 2q^{16} + \dots$
$S_3 \times S_1$	$\langle(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 2)\rangle$	$1 + 6q^4 + 6q^{12} + 6q^{16} + \dots$	$4q^{12} + \dots$
$S_2 \times S_2$	$\langle(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$	$1 + 4q^2 + 4q^4 + 4q^8 + 8q^{10} + 4q^{16} + 4q^{18} + 8q^{20} + \dots$	$8q^{10} + 8q^{20} + \dots$
$S_2 \times S_1 \times S_1$	$\langle(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 2)\rangle$	$1 + 6q^2 + 12q^4 + 8q^6 + 6q^8 + 24q^{10} + 24q^{12} + 12q^{16} + 30q^{18} + 24q^{20} + 24q^{22} + \dots$	$16q^{18} + 16q^{22} + \dots$
1	D_4	$1 + 24q^2 + 24q^4 + 96q^6 + 24q^8 + 144q^{10} + 96q^{12} + 192q^{14} + 24q^{16} + 312q^{18} + 144q^{20} + 288q^{22} + \dots$	\dots

Mit der Bezeichnung $S_{(2\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} = (C_2 \wr S_{\lambda_1}) \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ können wir nun also die Näherung der Thetareihe mit Koeffizienten im Burnside-Ring der Weyl-Gruppe ($W(D_4) =: G$) angeben:

$$\begin{aligned}
\theta_{D_4}^{B(G)} &= [G/G] + [G/S_{(2,2,2)}] q^2 + ([G/S_{(4)}] + [G/S_{(2,3,1)}]) q^4 \\
&+ [G/S_{(2,1,2,1)}] q^6 + [G/S_{(2,2,2)}] q^8 \\
&+ ([G/S_{(2,2,1,1)}] + [G/S_{(2,2)}]) q^{10} \\
&+ ([G/S_{(2,1,3)}] + [G/S_{(3,1)}]) q^{12} + [G/S_{(2,1,1,1,1)}] q^{14} \\
&+ ([G/S_{(2,3,1)}] + [G/S_{(4)}]) q^{16} \\
&+ ([G/S_{(2,2,2)}] + [G/S_{(2,1,2,1)}] + [G/S_{(2,1,1)}]) q^{18} \\
&+ ([G/S_{(2,2,1,1)}] + [G/S_{(2,2)}]) q^{20} \\
&+ ([G/S_{(2,1,2,1)}] + [G/S_{(2,1,1)}]) q^{22} + \dots
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.14 Wir wollen nun noch die Thetareihe von A_3 und $A_3^\#$ mit Koeffizienten im Burnside-Ring von S_4 vollständig angeben. Wir legen dazu die folgenden Bezeichnungen fest:

$$\theta_{\mathbb{Z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

die Thetareihe von \mathbb{Z} sowie θ_{A_3} die Thetareihe von A_3 und θ_P die Thetareihen des 2-dimensionalen Gitters P dessen Grammatrix durch

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wir erhalten:

U	$\text{Fix}(U)$	$\theta_{\text{Fix}(U)}(z)$
S_4	$\{0\}$	1
$S_3 \times S_1$	$\langle(1, 1, 1, -3)\rangle$	$\theta_{\mathbb{Z}}(12z)$
$S_2 \times S_2$	$\langle(1, 1, -1, -1)\rangle$	$\theta_{\mathbb{Z}}(4z)$
$S_2 \times S_1 \times S_1$	$\langle(1, 1, -2, 0), (0, 0, 1, -1)\rangle$	$\theta_{\mathbb{Z}}(2z)^2$
$\{\text{id}\}$	A_3	θ_{A_3}

Damit erhalten wir nach 4.2.6:

$$\begin{aligned} \theta_{A_3}^{\mathcal{B}(S_4)}(z) &= [S_4/S_4] + (\theta_{\mathbb{Z}}(12z) - 1) [S_4/S_{(3,1)}] + (\theta_{\mathbb{Z}}(4z) - 1) [S_4/S_{(2,2)}] \\ &\quad + (\theta_{\mathbb{Z}}(2z)^2 - 2\theta_{\mathbb{Z}}(12z) - \theta_{\mathbb{Z}}(4z) + 2) [S_4/S_{(2,1,1)}] \\ &\quad + (\theta_{A_3}(z) + 8\theta_{\mathbb{Z}}(12z) + 3\theta_{\mathbb{Z}}(4z) - 6\theta_{\mathbb{Z}}(2z)^2 - 6) [S_4/\{\text{id}\}] \end{aligned}$$

Analog betrachten wir das duale Gitter (dieses reskalieren wir mit dem Faktor 4, um ganzzahlige Einträge zu erhalten).

U	$\text{Fix}(U)$	$\theta_{\text{Fix}(U)}(z)$
S_4	$\{0\}$	1
$S_3 \times S_1$	$\langle(1, 1, 1, -3)\rangle$	$\theta_{\mathbb{Z}}(12z)$
$S_2 \times S_2$	$\langle(2, 2, -2, -2)\rangle$	$\theta_{\mathbb{Z}}(16z)$
$S_2 \times S_1 \times S_1$	$\langle(1, 1, 1, -3), (0, 0, 4, -4)\rangle$	$\theta_P(4z)$
$\{\text{id}\}$	$4A_3^\#$	$\theta_{A_3^\#}(16z)$

Demzufolge gilt also:

$$\begin{aligned} \theta_{A_3^\#}^{\mathcal{B}(S_4)}(16z) &= [S_4/S_4] + (\theta_{\mathbb{Z}}(12z) - 1) [S_4/S_{(3,1)}] + (\theta_{\mathbb{Z}}(16z) - 1) [S_4/S_{(2,2)}] \\ &\quad + (\theta_P(4z) - 2\theta_{\mathbb{Z}}(12z) - \theta_{\mathbb{Z}}(16z) + 2) [S_4/S_{(2,1,1)}] \\ &\quad + (\theta_{A_3}(z) + 8\theta_{\mathbb{Z}}(12z) + 3\theta_{\mathbb{Z}}(16z) - 6\theta_P(4z) - 6) [S_4/\{\text{id}\}] \end{aligned}$$

Es ist auffällig, dass in den beiden unendlichen Familien von Wurzelgittern, die wir gerade betrachtet haben, die Stabilisatoren von Elementen jeweils wieder Spiegelungsgruppen sind. Es drängt sich also die Frage auf, ob dies immer der Fall ist. Dieses Problem klärt der abschließende Satz dieses Kapitels.

Satz 4.3.15 *Es sei L ein Wurzelgitter im euklidischen Vektorraum V , B ein Fundamentalsystem von Wurzeln sowie W die Weyl-Gruppe von L . Setze*

$$D := \{v \in V \mid (v, \sigma) \geq 0 \forall \sigma \in B\}$$

Dann gilt:

1. *D ist ein Fundamentalbereich der Operation von W auf V .*
2. *Der Stabilisator eines Elements $v \in V$ wird von den in ihm enthaltenen Spiegelungen erzeugt.*

Beweis: Wir folgen im Wesentlichen den Beweisen aus Kapitel (1.12) in [Hum90].

1. Wir zeigen zunächst: Zu jedem $v \in V$ existieren $d \in D$ und $w \in W$ mit $w(v) = d$. Sogar: $v - d$ ist nicht-negative Linearkombination der Elemente aus B . Dazu betrachten wir auf V die partielle Ordnung definiert durch $v_1 \leq v_2$ genau dann, wenn $v_2 - v_1$ nicht-negative Linearkombination der Elemente aus B ist. Zu $v \in V$ betrachten wir nun die Menge $v^W \cap \{w \in V \mid v \leq w\}$. Diese ist nicht leer (v ist enthalten) sowie als Teilmenge einer Bahn unter der Operation einer endlichen Gruppe endlich und wir wählen uns ein maximales Element d . Ist nun $b \in B$, so ist $\sigma_b d = d - (d, b)b$ und $\sigma_b d$ liegt ebenfalls in der Bahn von b . Folglich gilt aufgrund der Maximalität von d : $(d, b) \geq 0$. Da b beliebig war, gilt also $d \in D$ wie gewünscht.

Nun zeigen wir: Sind $v_1, v_2 \in D$, $w \in W$ mit $wv_1 = v_2$ so gilt $v_1 = v_2$ und w ist Produkt von zu Elementen aus B gehörenden Spiegelungen, die v_1 stabilisieren. Dies geschieht durch Induktion nach $n(w)$ der (minimalen) Länge von w als Wort in den Spiegelungen zu Elementen aus B . Ist $n(w) = 0$, so ist $w = id$ und es ist nichts zu zeigen. Ist $n(w) \geq 1$ so existiert eine positive Wurzel $\alpha \in R(L)$ (sprich eine Wurzel, die sich als nicht-negative Linearkombination von Elementen aus B schreiben lässt), welche auf eine negative Wurzel abgebildet wird. Dann erhalten wir aber $n(w\sigma_\alpha) = n(w) - 1$.¹ Des Weiteren waren v_1, v_2 positiv, sowie $w\alpha$ negativ und dementsprechend:

$$0 \geq (v_2, w\alpha) = (w^{-1}v_2, \alpha) = (v_1, \alpha) \geq 0$$

also $(v_1, \alpha) = 0$ und somit $\sigma_\alpha v_1 = v_1$. Dann gilt aber $w\sigma_\alpha v_1 = v_2$ und nach Induktion gilt $v_1 = v_2$ und w ist Produkt von Spiegelungen, die v_1 fixieren.

¹Diese beiden Aussagen gelten allgemein in Spiegelungsgruppen über euklidischen Vektorräumen und können in den früheren Kapiteln von [Hum90] nachgelesen werden.

2. Wir nutzen den ersten Teil des Satzes und verschaffen uns zu $v \in V$ ein $d \in D \cap v^W$. Dann ist der Stabilisator von d ebenfalls nach dem ersten Teil des Satzes von den in ihm enthaltenen Spiegelungen erzeugt. Da Konjugation in der Weyl-Gruppe Spiegelungen auf Spiegelungen schickt und die Stabilisatoren von Elementen der gleichen Bahn konjugiert zueinander sind, folgt die Behauptung. \square

5. Das Thompson-Smith-Gitter

5.1. Übersicht

Definition 5.1.1 *Th bezeichne die sporadisch einfache Thompsongruppe. Dann hat Th genau eine irreduzible Darstellung von Grad 248. Diese ist ganzzahlig und respektiert eine positiv definite quadratische Form F . Das zugehörige volle Gitter ist das Thompson-Smith-Gitter, welches wir im Folgenden mit Λ bezeichnen wollen.*

Bemerkung 5.1.2 *Es gilt:*

1. Λ ist gerade und unimodular.
2. $\text{Aut}(\Lambda) = \langle -I_{248} \rangle \times \text{Th}$
3. Λ ist stark perfekt.

Beweis: Dass Λ unimodular ist, folgt aus der Tatsache, dass die 248-dimensionale Darstellung von Th auch nach Reduktion modulo einer beliebigen Primzahl irreduzibel bleibt (vergleiche hierzu [Th76] und [KT94] Kapitel 14, dort findet sich auch die Aussage zur vollen Automorphismengruppe von Λ). Ist L nämlich ein weiteres Th-invariantes Gitter in $\mathbb{Q}\Lambda$, so existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $L = a\Lambda$ ([KT94] Lemma 14.5.2). Demnach gilt insbesondere

$$\Lambda^\# = a\Lambda$$

für ein geeignetes $a \in \mathbb{Q}$. Indem wir F durch $\frac{1}{a}F$ ersetzen können wir also ohne Einschränkung Λ unimodular annehmen. Des Weiteren gilt auch für das gerade Teilgitter von Λ

$$\Lambda_0 = a\Lambda$$

für ein $a \in \mathbb{Q}$. Also folgt $a = 1$, da $|\Lambda/a\Lambda| = |\Lambda/\Lambda_0| \in \{1, 2\}$. Die kürzesten Vektoren von Λ bilden (nach Reskalieren) vermöge der gleichen Argumentation wie in 3.3.6 ein 4-Design (sogar ein 6-Design) (vergleiche hierzu [LST01]); also ist Λ stark perfekt. \square

Satz 5.1.3 *Das Minimum des Thompson-Smith-Gitters ist entweder 10 oder 12.*

Beweis: Nach 5.1.2 ist Λ stark perfekt. Folglich können wir 3.3.5 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \min(\Lambda) \cdot \min(\Lambda^\#) &= \min(\Lambda)^2 \geq \frac{\dim(\Lambda) + 2}{3} = \frac{250}{3} \\ \Rightarrow \min(\Lambda) &\geq 9,1287\dots \\ \Rightarrow \min(\Lambda) &\geq 10 \end{aligned}$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen aufgrund der Tatsache, dass Λ unimodular ist. Dass das Minimum kleiner-gleich 12 ist, ergibt sich aus der expliziten Konstruktion eines Vektors von Norm 12 in Th. Dies wird im nächsten Abschnitt näher behandelt. Da Λ außerdem ein gerades Gitter ist, folgt also die Behauptung. \square

5.2. Minimale Untergruppen und ihre Fixgitter

Wir wollen nun die Operation der Thompsongruppe auf dem Thompson-Smith-Gitter studieren. Wir verschaffen uns dazu zunächst einen Überblick über die minimalen Untergruppen der Thompsongruppe. Da die Fixgitter von Elementen der Ordnung 2 und 3 zu große Dimension haben, um diese rechnerisch handhaben zu können, beschränken wir uns auf Gruppen von Ordnung größer oder gleich 4 (Insbesondere untersuchen wir also nicht nur zyklische Untergruppen von Primzahlordnung, sondern auch Untergruppen vom Isomorphietyp $C_4, C_6, C_9, C_2^2, C_3^2, S_3$):

Satz 5.2.1 *Die folgende Tabelle klassifiziert alle Konjugiertenklassen minimaler Untergruppen von Ordnung größer oder gleich 4 in der Thompsongruppe.*

<i>Untergruppe</i>	<i>Länge der Konjugiertenklasse</i>	<i>Zentralisatorordnung</i>
<i>Zyklische Untergruppen</i>		
31A/B	$\frac{ \text{Th} }{15 \cdot 31}$	31
19A	$\frac{ \text{Th} }{18 \cdot 19}$	19
13A	$\frac{ \text{Th} }{12 \cdot 39}$	39
9A	$\frac{ \text{Th} }{6 \cdot 5832}$	5832
9B	$\frac{ \text{Th} }{6 \cdot 729}$	729
9C	$\frac{ \text{Th} }{6 \cdot 162}$	162
7A	$\frac{ \text{Th} }{6 \cdot 1176}$	1176
6A	$\frac{ \text{Th} }{2 \cdot 2160}$	2160
6B	$\frac{ \text{Th} }{2 \cdot 1728}$	1728
6C	$\frac{ \text{Th} }{2 \cdot 648}$	648
5A	$\frac{ \text{Th} }{4 \cdot 3000}$	3000
4A	$\frac{ \text{Th} }{2 \cdot 387072}$	387072
4B	$\frac{ \text{Th} }{2 \cdot 7680}$	7680
<i>Nicht-zyklische abelsche Untergruppen</i>		
$2A \times 2b$	$45 \cdot \frac{ \text{Th} }{92897280}$	344064
$2A \times 2c$	$5040 \cdot \frac{ \text{Th} }{92897280}$	3072
$3A \times 3a/b$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{ \text{Th} }{12737088} \cdot \frac{12737088}{3 \cdot 5832}$	$3 \cdot 5832$
$3A \times 3c$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{ \text{Th} }{12737088} \cdot \frac{12737088}{2 \cdot 3 \cdot 729}$	$3 \cdot 729$
$3A \times 3d$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{ \text{Th} }{12737088} \cdot \frac{12737088}{2 \cdot 3 \cdot 162}$	$3 \cdot 162$
$3A \times 3e$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{ \text{Th} }{12737088} \cdot \frac{12737088}{2 \cdot 3 \cdot 162}$	$3 \cdot 162$

$3B \times 3\alpha$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{24}{6}$	19683
$3B \times 3\beta$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{216}{6}$	2187
$3B \times 3\gamma$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{216}{6}$	2187
$3B \times 3\delta$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{1944}{6}$	243
$3B \times 3\epsilon$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{1944}{6}$	243
$3B \times 3\zeta$	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{3888}{6}$	243
$3B \times 3\eta$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{3888}{6}$	243
$3B \times 3\theta$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{3888}{6}$	243
$3B \times 3\iota$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{ \text{Th} }{472392} \cdot \frac{1944}{6}$	243
<i>Nicht-abelsche Untergruppen</i>		
S_3A	$1404 \cdot \frac{ \text{Th} }{12737088}$	1512
S_3B	$486 \cdot \frac{ \text{Th} }{472392}$	162
S_3C	$135 \cdot \frac{ \text{Th} }{174960}$	216

Bei den zyklischen Untergruppen ist jeweils die Konjugiertenklasse eines Erzeugers angegeben. Die elementarabelschen 2-Gruppen sind nach der Länge der Konjugiertenklasse sortiert. Bei den zu C_3^2 isomorphen Gruppen sind zunächst diejenigen aufgeführt, die ein Element aus Konjugiertenklasse $3A$ enthalten; diese sind klassifiziert nach der adjungierten Konjugiertenklasse aus $G_2(3) \leq C_{\text{Th}}(3A)$. Im Anschluss sind die C_3^2 aufgeführt, die keinen Vertreter von $3A$ enthalten. Die Namen der adjungierten Elemente sind arbiträr gewählt. Die auftretenden zu S_3 isomorphen Gruppen sind nach den darin auftretenden 3-Elementen klassifiziert.

Beweis: Die zyklischen Untergruppen entnehmen wir der Charaktertafel in [CCW+85]. Zu zeigen ist die Vollständigkeit der Liste also lediglich für die nicht-zyklischen Untergruppen. Alle Rechnungen wurden im Computeralgebrasystem MAGMA ([BCP97]) durchgeführt; die vorliegende ganzzahlige Darstellung wurde dazu modulo einer kleinen Primzahl (im Regelfall 3 oder 5) reduziert.

1. $C_2 \times C_2$: Die Thompsongruppe enthält laut Charaktertafel genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen. Der Zentralisator eines Elements a von Ordnung 2 ist isomorph zu $2_+^{1+8}.A_9$ und enthält nach Rechnung in [BCP97] neben dem zentralen Element a noch zwei weitere Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 2. Diese seien wie üblich der Länge der Konjugiertenklasse nach durchnummeriert und folglich mit $2b$ (Länge der Konjugiertenklasse im Zentralisator von a ist

270) und $2c$ (Länge 30240) bezeichnet. Die Thompsongruppe enthält also demnach höchstens zwei Konjugiertenklassen von C_2^2 . Dass es sich bei $2A \times 2b$ und $2A \times 2c$ tatsächlich um verschiedene Konjugiertenklassen handelt zeigt eine Betrachtung der Fixgitter. Durch Überprüfen geeignet vieler Zufallselemente findet man Vertreter von $2b$ und $2c$ und verifiziert, dass 3584 Vektoren von Norm 12 von $2A \times 2b$ und 128 Vektoren von Norm 12 von $2A \times 2c$ stabilisiert werden.

Die Länge der entsprechenden Konjugiertenklassen und die Zentralisatorordnung ergeben sich damit sofort aus den Längen der Konjugiertenklassen.

2. C_3^2 : Wir wollen zunächst die C_3^2 in der Thompsongruppe klassifizieren, die ein Element aus Konjugiertenklasse $3A$ enthalten. Der Normalisator eines solchen Elements b ist isomorph zu $(C_3 \times G_2(3)) : 2$; jede C_3^2 , die b enthält entsteht also als Erzeugnis von b und einem 3-Element aus $G_2(3)$. Diese Gruppe enthält nach [CCW+85] fünf Konjugiertenklassen von 3-Elementen $(3a, \dots, 3e)$, wobei der äußere Automorphismus von Ordnung 2 noch die Konjugiertenklassen $3a$ und $3b$ vertauscht. Wie im Fall der C_2^2 können wir also folgern, dass es höchstens vier Konjugiertenklassen von C_3^2 gibt, die ein Element aus $3A$ enthalten. Um zu zeigen, dass es sich tatsächlich um verschiedene Klassen handelt, suchen wir wie oben Vertreter der Klassen $3b, \dots, 3e$ und verifizieren via [BCP97] die folgenden Strukturaussagen:

Adjungierte Konjugiertenklasse	Dimension des Fixgitters	Anzahl stab. Vektoren von Norm 12	Auftretende Spuren von 3-Elementen
3b	38	432	$2 \times 5, 6 \times 14$
3c	38	918	$2 \times 5, 6 \times 14$
3d	32	108	$4 \times 5, 2 \times 14, 2 \times -4$
3e	32	108	$4 \times -4, 4 \times 14$

Es handelt sich also tatsächlich um vier verschiedene Konjugiertenklassen von C_3^2 . Die Längen ergeben sich aus den Längen der Konjugiertenklassen in $G_2(3)$ und der Anzahl der auftauchenden Elemente aus Klasse $3A$.

Wir klassifizieren nun noch die Konjugiertenklassen von C_3^2 , die kein Element aus Konjugiertenklasse $3A$ enthalten. Da Th keine Untergruppe vom Typ $3C^2$ enthält, werden wir diese anhand der darin enthaltenen $3B$ -Elemente zählen. Der Normalisator N eines solchen Elements c ist isomorph zu $N \cong 3.3^2.3.(3 \times 3^2).3^2 : 2S_4$ und enthält neben $\{c, c^{-1}\}$ 16 Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3. Von diesen erzeugen 10 zusammen mit c eine zu $C_3 \times C_3$ isomorphe Gruppe, die kein Element aus $3A$ enthält. Wir wollen diese mit $3\alpha, 3\beta, \dots, 3\kappa$ bezeichnen (nach

Länge der Klasse sortiert, bei gleicher Länge wählen wir weitestgehend willkürlich eine Reihenfolge (vgl. MAGMA-Datei)).

Da $3\zeta = 3\kappa^{-1}$ erzeugen 3ζ und 3κ zusammen mit c zueinander konjugierte Untergruppen und wir müssen nur die Klassen $3\alpha, 3\beta, \dots, 3\iota$ betrachten. Wir konstruieren uns Vertreter der einzelnen Konjugiertenklassen und bestimmen die Fixgitter (vgl. Tabelle in 5.2.2). Durch Vergleich der Thetareihen stellen wir fest, dass $3B \times 3\alpha, \dots, 3B \times 3\delta$ jeweils eigene Konjugiertenklassen darstellen. Es bleibt also noch zu prüfen, ob $3B \times 3\zeta, \dots, 3B \times 3\theta$ sowie $3B \times 3\epsilon$ und $3B \times 3\iota$ unter Th konjugiert sind.

Die Vertreter der Konjugiertenklassen $3B \times 3\zeta, \dots, 3B \times 3\theta$ enthalten jeweils 2 Elemente aus Klasse $3B$ sowie 6 Elemente aus Klasse $3C$. Fielen also zwei dieser Klassen zusammen, so wären die Vertreter, die c enthalten also insbesondere bereits in $N_{\text{Th}}(\langle c \rangle)$ konjugiert. Dies ist aber gerade N und man rechnet nach, dass die Gruppen in N nicht konjugiert sind.

Es bleiben also noch die Konjugiertenklassen 3ϵ und 3ι . Bei diesen konstruieren wir uns die Fixgitter und prüfen mit [BCP97] auf Isometrie. Dieser Test fällt negativ aus (beispielsweise haben die Automorphismengruppen unterschiedliche Ordnung) und die beiden Gruppen können demnach nicht konjugiert sein.

Die Längen der Konjugiertenklassen ergeben sich damit wieder sofort aus den Längen der Konjugiertenklassen von 3-Elementen in N . Die Zentralisatorordnung wurde von [BCP97] bestimmt.

3. S_3 : Die auftretenden S_3 in der Thompsongruppe wollen wir anhand der darin auftretenden 3-Elemente klassifizieren. Mit [BCP97] bestimmt man wie im Fall der C_2^2 die Konjugiertenklassen von 2-Elementen in den Normalisatoren der Elemente von Ordnung 3. Jeder der Normalisatoren enthält zwei Klassen von Elementen der Ordnung 2. Dabei taucht jeweils eine Klasse auf, die das betrachtete 3-Element zentralisiert (also mit diesem zusammen eine C_6 erzeugt), während die andere Klasse nicht-trivial auf dem 3-Element operiert und somit gemeinsam mit diesem eine S_3 erzeugt. Es folgt, dass zu jeder Konjugiertenklasse von 3-Elementen in der Thompsongruppe genau eine Konjugiertenklasse von S_3 auftaucht.

Die Längen der Konjugiertenklassen ergeben sich wieder sofort aus den Längen der Konjugiertenklassen von 2-Elementen, während die Zentralisatorordnung in diesem Fall von [BCP97] bestimmt wurde. \square

Bemerkung 5.2.2 *Die folgende Tabelle liefert eine Übersicht über die Fixgitter L der*

minimalen Untergruppen U aus dem vorangehenden Satz.

U	$\dim(L)$	$\text{Elt}(L)$	θ_L
31A/B	8	(31^8)	$1 + \mathcal{O}(q^{28})$
19A	14	$(1, 19^{13})$	$1 + 4q^{20} + 14q^{24} + 28q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
13A	20	$(1, 13^{19})$	$1 + 2q^{12} + 24q^{16} + 108q^{22} + 204q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
9A	32	$(1^3, 3^4, 9^{25})$	$1 + 972q^{16} + 1176q^{18} + 19440q^{22} + 23328q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
9B	26	$(3, 9^{25})$	$1 + 78q^{18} + 2106q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
9C	30	$(1, 3^3, 9^{26})$	$1 + 18q^{12} + 36q^{18} + 162q^{20} + 1458q^{24} + 6480q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
7A	38	$(1^3, 7^{35})$	$1 + 56q^{12} + 84q^{16} + 504q^{20} + 2352q^{22} + 14280q^{24} + 40320q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
6A	40	(6^{40})	$1 + 120q^{12} + 80q^{18} + 74480q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
-6A	40	(6^{40})	$1 + 160q^{18} + 20400q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
6B	44	$(2^6, 6^{38})$	$1 + 66q^{12} + 420q^{16} + 896q^{18} + 4392q^{20} + 14592q^{22} + 61376q^{24} + 346752q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
-6B	48	$(1^4, 2^4, 6^{40})$	$1 + 192q^{12} + 1008q^{16} + 2368q^{18} + 8064q^{20} + 38592q^{22} + 303840q^{24} + 1574208q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
6C	42	$(2^3, 6^{39})$	$1 + 30q^{12} + 228q^{16} + 704q^{18} + 36q^{20} + 5928q^{22} + 28256q^{24} + 53208q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
-6C	44	$(1^4, 2^4, 6^{36})$	$1 + 24q^{12} + 1552q^{18} + 1080q^{20} + 6048q^{22} + 70464q^{24} + 220320q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
5A	48	(5^{48})	$1 + 7320q^{20} + \mathcal{O}(q^{28})$
4A	64	$(2^8, 4^{56})$	$1 + 2688q^{12} + 9216q^{16} + 1085952q^{20} + \mathcal{O}(q^{22})$
-4A	56	(4^{56})	$1 + 6160q^{16} + \mathcal{O}(q^{24})$
4B	60	(4^{60})	$1 + 3240q^{16} + 7680q^{20} + \mathcal{O}(q^{24})$
-4B	60	(4^{60})	$1 + 320q^{12} + 1320q^{16} + 48384q^{20} + \mathcal{O}(q^{24})$

$2A \times 2b$	56	$(2^6, 4^{50})$	$1 + 3584q^{12} + 39312q^{16} + 2365440q^{20} + \mathcal{O}(q^{22})$
$2A \times (-2b)$	64	$(2^{14}, 4^{50})$	$1 + 67456q^{16} + \mathcal{O}(q^{20})$
$2A \times 2c$	56	(4^{56})	$1 + 128q^{12} + 3984q^{16} + 133632q^{20} + \mathcal{O}(q^{24})$
$2A \times (-2c)$	64	$(2^8, 4^{56})$	$1 + 128q^{12} + 3456q^{16} + 9216q^{18} + \mathcal{O}(q^{20})$
$3A \times 3b$	38	$(1^3, 3^{15}, 9^{20})$	$1 + 918q^{12} + 972q^{16} + 25872q^{18} + 26244q^{20}$ $+124416q^{22} + 857304q^{24} + 1679616q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3A \times 3c$	38	$(3^{17}, 9^{21})$	$1 + 432q^{12} + 8862q^{18} + 212868q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3A \times 3d$	32	$(3^8, 9^{24})$	$1 + 108q^{12} + 312q^{18} + 10368q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3A \times 3e$	32	$(3^8, 9^{24})$	$1 + 108q^{12} + 312q^{18} + 10368q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\alpha$	32	$(1, 3^{18}, 9^{13})$	$1 + 756q^{12} + 4374q^{16} + 36168q^{18} + 1189728q^{22}$ $+2207898q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\beta$	26	$(3^7, 9^{19})$	$1 + 108q^{12} + 780q^{18} + 27216q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\gamma$	32	$(3^{12}, 9^{20})$	$1 + 270q^{12} + 3120q^{18} + 80676q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\delta$	32	$(1, 3^9, 9^{22})$	$1 + 486q^{16} + 1824q^{18} + 27216q^{22}$ $+40338q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\epsilon$	32	$(3^{10}, 9^{22})$	$1 + 1176q^{18} + 24786q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\zeta$	26	$(3^3, 9^{23})$	$1 + 132q^{18} + 3888q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\eta$	26	$(3^3, 9^{23})$	$1 + 132q^{18} + 3888q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\theta$	26	$(3^3, 9^{23})$	$1 + 132q^{18} + 3888q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
$3B \times 3\iota$	32	$(3^{10}, 9^{22})$	$1 + 1176q^{18} + 24786q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
S_3A^+	42	$(2^7, 6^{35})$	$1 + 168q^{12} + 378q^{16} + 1736q^{18} + 13608q^{20}$ $+16632q^{22} + 222264q^{24} + 966168q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
S_3A^-	50	$(1^7, 3, 6^{42})$	$1 + 114q^{12} + 378q^{16} + 2856q^{18} + 4536q^{20} + \mathcal{O}(q^{22})$
S_3B^+	39	$(2^3, 6^{36})$	$1 + 12q^{12} + 270q^{16} + 488q^{18} + 1458q^{20}$ $+10152q^{22} + 46176q^{24} + 119232q^{26} + \mathcal{O}(q^{28})$
S_3B^-	47	$(1^4, 3^4, 6^{39})$	$1 + 42q^{12} + 54q^{16} + 2548q^{18} + 1134q^{20} + \mathcal{O}(q^{22})$
S_3C^+	36	(6^{36})	$1 + 24q^{12} + 224q^{18} + 48600q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$
S_3C^-	44	$(3^8, 6^{36})$	$1 + 24q^{12} + 768q^{18} + 127304q^{24} + \mathcal{O}(q^{28})$

Die Bezeichnung $^+$ beziehungsweise $^-$ bei den Gruppen vom Isomorphietyp S_3 gibt an, ob ein Element aus Konjugiertenklasse $2A$ oder $-2A$ adjungiert wurde. Alle Rechnungen wurden mit [BCP97] durchgeführt. Man beachte, dass die Konjugiertenklassen $2A \times (-2b), (-2A) \times (-2b)$ und $(-2A) \times 2b$ alle identisch sind (analog für $2c$ anstatt $2b$); daher ist in der Tabelle nur eine Klasse angegeben.

Bemerkung 5.2.3 In der folgenden Tabelle finden sich einige Informationen zu weiteren Fixgittern kleiner Untergruppen. Die Thetareihe ist hier nicht angegeben, da diese aufgrund der hohen auftretenden Dimensionen zu aufwendig zu berechnen ist.

Untergruppe	$\dim(L)$	$\text{Elt}(L)$
$2A$	120	(2^{120})
$-2A$	128	$(1^8, 2^{120})$
$3A$	92	$(1^{14}, 3^{78})$
$3B$	86	$(1^7, 3^{79})$
$3C$	80	(3^{80})

5.3. Vektoren kleiner Norm

Definition 5.3.1 *Wir nennen einen Vektor v in einem Gitter L N -kurz, falls*

$$|\text{Stab}_{\text{Aut}(L)}(v)| \geq N.$$

Da wir das Argument im Anschluss mehrfach benötigen, halten wir das folgende einfache Lemma fest:

Lemma 5.3.2 *Sei G eine endliche Gruppe, M eine G -Menge, $S \leq G$ und $N := N_G(S)$. Dann ist $M' := \{m \in M \mid \text{Stab}_G(m) = S\}$ unter der natürlichen Operation von N/S eine Vereinigung regulärer Bahnen.*

Beweis: Angenommen $(N/S)m'$ ist keine reguläre Bahn. Dann ist $\{1\} \neq \text{Stab}_{N/S}(m') = S'/S$ und demnach $S \neq S' = \text{Stab}_G(m')$ und daher $m' \notin M'$. Widerspruch. \square

Bemerkung 5.3.3 *Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über einige Bahnen von 4-kurzen Vektoren in Λ von Norm kleiner-gleich 26 und ihre Stabilisatoren in der Thompsongruppe.*

Norm(v)	$\text{Stab}_{\text{Th}}(v)$	$ \text{Stab}_{\text{Aut}(\Lambda)}(v) $	$ v^{\text{Aut}\Lambda} $
12	$C_3 \times G_2(3) = C_{\text{Th}}(3A)$	$2 \cdot 12737088$	$\frac{ \text{Th} }{ C_{\text{Th}}(3A) }$
16	$L_3(3)$	5616	$2 \cdot \frac{ \text{Th} }{5616}$
16	$S \leq 2^5.L_5(2) = N(2A^5)$	$2 \cdot 43008$	$\frac{ \text{Th} }{ S }$
16	$S \leq 2_+^{1+8}.A_9 = N(2A)$	$2 \cdot 6912$	$\frac{ \text{Th} }{ S }$
18	$S \leq [3^9].2S_4 = N(3B)$	$2 \cdot 39366$	$\frac{ \text{Th} }{ S }$
18	$S \leq [3^9].2S_4 = N(3B)$	$2 \cdot 4374$	$\frac{ \text{Th} }{ S }$
18	$S \leq [3^9].2S_4 = N(3B)$	$2 \cdot 486$	$\frac{ \text{Th} }{ S }$
20	$L_2(19)$	$2 \cdot 3420$	$\frac{ \text{Th} }{3420}$
20	$19 : 9$	$2 \cdot 171$	$\frac{ TH }{171}$
20	$(C_5 \times C_5) : 4$	$2 \cdot 100$	$\frac{ \text{Th} }{100}$
20	D_{20}	$2 \cdot 20$	$\frac{ \text{Th} }{20}$
20	$C_3 \times (SL(2, 3) : 2)$	$2 \cdot 144$	$\frac{ \text{Th} }{144}$
22	$14 : 3$	$2 \cdot 42$	$\frac{ \text{Th} }{42}$
22	$18 : 3$	$2 \cdot 54$	$\frac{ \text{Th} }{54}$
22	$13 : 6$	78	$2 \cdot \frac{ \text{Th} }{78}$
22	$7 : 3$	$2 \cdot 21$	$\frac{ \text{Th} }{21}$
24	$U_3(8) : 3$	$2 \cdot 16547328$	$\frac{ \text{Th} }{ U_3(8):3 }$
24	$27 : 3$	$2 \cdot 81$	$\frac{ \text{Th} }{81}$
26	$19 : 9 \leq L_2(19)$	$2 \cdot 171$	$\frac{ \text{Th} }{171}$
26	C_{39}	$2 \cdot 39$	$\frac{ \text{Th} }{39}$
26	$13 : 3$	$2 \cdot 39$	$\frac{ \text{Th} }{39}$

Beweis: Wir beweisen an dieser Stelle nur, dass es sich tatsächlich um volle Stabilisatoren handelt. Auch in diesem Abschnitt wurden alle Rechnungen mit [BCP97] durchgeführt.

1. Der Zentralisator eines Elements aus Konjugiertenklasse $3A$ stabilisiert zwei Vektoren von Norm 12. Aus Ordnungsgründen ist die einzige maximale Untergruppe, in der der Zentralisator enthalten ist, gerade der Normalisator des 3-Elements; dieser hat aber ein triviales Fixgitter. Folglich handelt es sich bereits um den vollen

Stabilisator. Da der Zentralisator Index 2 in seinem Normalisator hat, liegen die beiden Vektoren in einer Bahn und die Behauptung über die Bahnlänge folgt.

2. Die maximale Untergruppe vom Isomorphietyp $L_3(3)$ (nur in der Online-Version von ATLAS [Wil+] aufgeführt) stabilisiert zwei Vektoren von Norm 16. Da es sich um eine maximale Untergruppe handelt, muss dies also bereits der volle Stabilisator sein. Des Weiteren ist $L_3(3)$ als maximale Untergruppe ihr eigener Normalisator und es existiert folglich kein Element der Thompsongruppe, welches die beiden Vektoren vertauscht (jedes solche Element müsste $L_3(3)$ normalisieren). Dementsprechend verdoppelt sich die Bahnlänge beim Übergang zur vollen Automorphismengruppe.
 3. Die Elemente aus Konjugiertenklasse $28A$ stabilisieren jeweils genau einen Vektor v von Norm 16. Betrachtet man dessen Stabilisator in der maximalen Untergruppe $N_{\text{Th}}(2A^5) \cong 2^5.L_5(2)$, so hat dieser Ordnung $2^{11} \cdot 3 \cdot 7$ und Normalisatorindex 2. Durch Reduktion modulo 3 erhält man, dass es sich zumindest in der betrachteten maximalen Untergruppe bereits um den vollen Stabilisator handeln muss. Aus Ordnungsgründen können Obergruppen von S , die v ebenfalls stabilisieren, höchstens noch in den maximalen Untergruppen vom Isomorphietyp ${}^3D_4(2) : 3$ beziehungsweise $2_+^{1+8}.A_9$ auftauchen. Die von $28A$ -Elementen stabilisierten Vektoren von Norm 16 haben in diesen aber allesamt kleinere Stabilisatoren (Rechnung ebenfalls modulo 3). Folglich handelt es sich bei S um den vollen Stabilisator in Th. Da S Index 2 in $N_{\text{Th}}(S)$ hat, liegen v und $-v$ bereits unter Th in einer Bahn.
 4. Analog zum vorherigen Fall betrachten wir hier Elemente aus Konjugiertenklasse $24A$. Diese stabilisieren ebenfalls genau 2 Vektoren von Norm 16 und der Stabilisator eines solchen Vektors in $2_+^{1+8}.A_9$ hat Ordnung $2^8 \cdot 3^3$. Wie zuvor überprüft man die möglichen Obergruppen in den in Frage kommenden maximalen Untergruppen von Th und stellt fest, dass es sich bereits um den vollen Stabilisator handeln muss. Auch dieser Stabilisator hat Index 2 in seinem Normalisator.
-

5. Wir betrachten das Fixgitter eines Vertreters von $27A$. Dieses enthält 6 Vektoren von Norm 18, darunter zwei, deren Stabilisator in $N_{\text{Th}}(3B)$ (dies ist die maximale Untergruppe vom Isomorphietyp $[3^9].2S_4$) von Ordnung $2 \cdot 3^9$ ist. Aus Ordnungsgründen könnte ein möglicher größerer Stabilisator nur in $N_{\text{Th}}(3B^2)$ liegen. In dieser Gruppe ist der Stabilisator aber von gleicher Größe und weist ebenso wie in der ersten betrachteten maximalen Untergruppe Normalisatorindex 2 auf.

6. Betrachtet man die Fixgitter der minimalen Untergruppen, so stellt man fest, dass der Stabilisator eines Vektors von Norm 18 in der Thompsongruppe in jedem Fall Ordnung $2^\epsilon \cdot 3^k$ mit $\epsilon \in \{0, 1\}, 0 \leq k \leq 9$ hat. Der Stabilisator aus (5.) erklärt 18 der 36 stabilisierten Vektoren von Norm 18 eines Vertreters von $9C$. Wir betrachten nun zunächst die Stabilisatoren dieser Vektoren in einer 3-Sylowgruppe S_3 von Th . Wählt man den richtigen Vertreter von $9C$, so haben die 18 Vektoren (von $\pm v$ jeweils nur einer) 6 verschiedene Stabilisatoren mit Ordnungen $1 \times 19683, 2 \times 6561, 3 \times 2187$. Berechnet man zu den Gruppen von Ordnung größer 2187 die vollen Stabilisatoren in $N_{\text{Th}}(3B)$ (die Ordnung vergrößert sich jeweils mindestens um den Faktor 2), so enthalten diese Vertreter von $6A$. Die stabilisierten Vektoren von Norm 18 eben dieser sind aber bereits vollständig durch den ersten Stabilisator erklärt. Folglich müssen die Gruppen von Ordnung 2187 die noch gesuchten Stabilisatoren liefern (dass die Ordnung keinen größeren 3-Anteil als 2187 haben kann, folgt aus der Tatsache, dass für jeden Vertreter von $9C$ in S_3 die Stabilisatoren von Ordnung größer 2187 mit gleicher Argumentation wie oben keinen neuen Stabilisator liefern können). Berechnet man den vollen Stabilisator in $N_{\text{Th}}(3B)$, so hat dieser Ordnung $2 \cdot 2187$, stabilisiert 2 Vektoren von Norm 18 und hat Normalisatorindex 2.
7. Die beiden Bahnen aus (5.) und (6.) enthalten alle stabilisierten Vektoren von Vertretern der Konjugiertenklassen $6A, 9B$ und $9C$. Wir suchen nun unter den Stabilisatoren von Vektoren der Norm 18 im Fixgitter eines Vertreters von $6C$ den Stabilisator, welcher hinsichtlich der Eigenschaft maximal ist, keine Elemente dieser drei Konjugiertenklassen zu enthalten. Dieser Stabilisator hat Ordnung 486. Bei diesem handelt es sich tatsächlich um einen neuen (und damit vollen) Stabilisator, da die 3-Sylowgruppe zu keiner Untergruppe von Ordnung 243 in einem der bekannten Stabilisatoren isomorph ist. Die gefundene Gruppe stabilisiert 2 Vektoren und hat Index 2 in ihrem Normalisator.
-
8. In analoger Argumentation wie zu den Vektoren von Norm 12 handelt es sich bei der Untergruppe vom Isomorphietyp $L_2(19)$ um den vollen Stabilisator zweier Vektoren von Norm 20 (aus Ordnungsgründen liegt diese Gruppe nur in einer maximalen Untergruppe, welche ihrerseits ein triviales Fixgitter hat).
9. Die letztgenannte Bahn zeichnet für 2 der 4 stabilisierten Vektoren von Norm 20 eines Elements von Ordnung 19 verantwortlich. Es muss also noch ein weiterer Stabilisator mit durch 19 teilbarer Ordnung existieren. Rechnung in $U_3(8) : 6$ und $L_2(19)$ zeigt, dass dieser von der angegebenen Gestalt ist. Insbesondere taucht hier der interessante Fall auf, dass der neue Stabilisator Untergruppe des bereits

bekanntem Stabilisator ist; die Gruppe ist daher auch nur zu 2 der 4 fixierten Vektoren von Norm 20 der volle Stabilisator.

10. Der Stabilisator eines Vektors von Norm 20 im Fixgitter eines Vertreters von $10A$ in $N_{\text{Th}}(5A)$ hat Ordnung 100, Index 4 in seinem Normalisator und stabilisiert 4 Vektoren von Norm 20. Aus Ordnungsgründen kommt erneut nur eine weitere maximale Untergruppe in Frage, welche einen größeren Stabilisator enthalten könnte ($N_{\text{Th}}(5A^2)$), dies aber nicht tut. Aufgrund des Normalisatorindex müssen alle 4 stabilisierten Vektoren bereits unter der Thompsongruppe in einer Bahn liegen.
11. Neben den Stabilisatoren von Ordnung 100 tauchen in $N_{\text{Th}}(5A)$ für die fixierten Vektoren der Vertreter von $10A$ auch Stabilisatoren vom Isomorphietyp D_{20} auf. Da $(C_5 \times C_5) : 4$ keine Untergruppen von diesem Isomorphietyp enthält, muss es sich also um einen neuen Stabilisator handeln. Die D_{20} stabilisiert 16 Vektoren von Norm 20, hat Index 8 in ihrem Normalisator und nach Rechnung modulo 2 bleibt die Bahnlänge beim Übergang zu vollen Automorphismengruppe erhalten.
12. Analog zu den meisten anderen Fällen betrachten wir die Vektoren von Norm 20 im Fixgitter eines Vertreters von $12A$ und berechnen die Stabilisatoren in den maximalen Untergruppen, die solche Elemente enthalten. Man erhält, dass die Gruppe von Ordnung 144 der volle Stabilisator ist und sich die Bahnlänge beim Übergang zur vollen Automorphismengruppe nicht verändert.¹

-
13. Wir betrachten das Fixgitter eines Elements von Ordnung 14. Dieses enthält einen Vektor v von Norm 22, dessen Stabilisator in der maximalen Untergruppe vom Isomorphietyp $U_3(8) : 6$ Ordnung 42 hat. Überprüfen der anderen maximalen Untergruppen, die Elemente von Ordnung 14 enthalten, liefert keine größeren Stabilisatoren, es muss sich also bereits um den vollen Stabilisator handeln. Der Stabilisator des Vektors nach Reduktion der Darstellung der maximalen Untergruppe modulo 2 hat 84 Elemente; mithin liegen also $\pm v$ in einer Bahn.
 14. Die Vertreter der Konjugiertenklasse $18A$ stabilisieren 96 Vektoren von Norm 22, darunter einen, dessen Stabilisator in $N_{\text{Th}}(3B)$ Ordnung 54 hat (modulo 2 Ordnung 108). Überprüfen der weiteren maximalen Untergruppen, welche Vertreter von $18A$ enthalten, zeigt, dass bereits der volle Stabilisator vorliegt.

¹Der Isomorphietyp des Stabilisators wurde mittels des Befehls „IdentifyGroup“ und der zugehörigen Datenbank bestimmt.

15. Wir betrachten die Vektoren von Norm 22 im Fixgitter eines Elements von Ordnung 13. Unter diesen finden sich Vektoren, deren Stabilisator in $N_{\text{Th}}(3A) \cong (3 \times G : 2(3)) : 2$ von Ordnung 78 ist. Überprüfen der anderen maximalen Untergruppe, die Elemente von Ordnung 13 enthält, liefert, dass es sich um den vollen Stabilisator handelt und dass dies auch bereits der Stabilisator modulo 2 ist. Insbesondere verdoppelt sich also die Bahnlänge beim Übergang zur vollen Automorphismengruppe.
16. Wir betrachten das Fixgitter eines Vertreters von $-14A$ (beziehungsweise den Eigenraum zum Eigenwert -1 eines Vertreters von $14A$). Dieses enthält 8 Vektoren von Norm 22, deren Stabilisator (durch Überprüfen aller maximalen Untergruppen mit Elementen von Ordnung 14) jeweils Ordnung 21 hat. Da die Vertreter von $14A$ keinen Vektor von Norm 22 stabilisieren, liegen die Vektoren jeweils mit ihrem Inversen in einer Bahn.
-
17. Die eindeutige Untergruppe vom Index 2 in der maximalen Untergruppe vom Isomorphietyp $U_3(8) : 6$ stabilisiert zwei Vektoren von Norm 24, wohingegen die maximale Untergruppe selbst ein triviales Fixgitter aufweist. Analog zum ersten Fall handelt es sich also aus Ordnungsgründen um den vollen Stabilisator und die Bahnlänge ist wie angegeben.
18. Die Vertreter von $27A$ stabilisieren je 18 Vektoren von Norm 24. Durch Überprüfen der beiden maximalen Untergruppen, die Elemente von Ordnung 27 enthalten ($N_{\text{Th}}(3B)$ und $N_{\text{Th}}(3B^2)$), erhält man, dass der Stabilisator eines solchen Vektors v 81-elementig ist und $\pm v$ in einer Bahn unter Th liegen.
-
19. Im Fixgitter eines Vertreters $19A$ findet sich ein Vektor v von Norm 26, dessen Stabilisator in der maximalen Untergruppe vom Isomorphietyp $L_2(19)$ Ordnung 171 hat und insgesamt 4 Vektoren dieser Norm stabilisiert. Überprüfen der anderen maximalen Untergruppe, die Elemente von Ordnung 19 enthält ($U_3(8) : 6$) ergibt, dass es sich bereits um den vollen Stabilisator handelt. $\pm v$ liegen bereits unter der Thompsongruppe in einer Bahn, da der Stabilisator von v nach Reduktion modulo 2 $342 = 2 \cdot 171$ Elemente enthält.
20. Die Vertreter der Konjugiertenklassen $39A/B$ stabilisieren je 12 Vektoren von Norm 26. Die einzige maximale Untergruppe, die Elemente von Ordnung 39 enthält, ist $N_{\text{Th}}(3A) \cong (C_3 \times G_2(3)) : 2$. Bestimmt man in dieser den Stabilisator eines sol-

chen Vektors, so verifiziert man, dass dieser bereits von oben genanntem Element erzeugt wird. Der Charaktertafel entnimmt man, dass eine C_{39} in der Thompsongruppe Normalisatorindex 12 hat und somit die 12 stabilisierten Vektoren bereits in einer Bahn liegen.

21. Da nicht alle Vektoren von Norm 26, die von einem Vertreter von $13A$ stabilisiert werden, bereits in letztgenannter Bahn liegen, überprüfen wir die Stabilisatoren der verbleibenden Vektoren. In der maximalen Untergruppe $N_{\text{Th}}(3A)$ findet sich ein nicht-abelscher Stabilisator von Ordnung 39. Eine Untersuchung der verbleibenden maximalen Untergruppen zeigt, dass dies der volle Stabilisator ist. Modulo 2 verdoppelt sich die Stabilisatorordnung, insbesondere ändert sich also die Bahnlänge beim Übergang zur vollen Automorphismengruppe nicht.

Im Folgenden möchten wir in einigen Fällen zeigen, dass alle N -kurzen Vektoren gegebener Norm bereits in den aufgezählten Bahnen liegen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Algorithmus 5.3.4 *Seien $\text{Th}v_1, \dots, \text{Th}v_k$ paarweise verschiedene Bahnen von N -kurzen Vektoren gleicher Norm l mit $\text{Stab}_{\text{Th}}(v_i) =: S_i$, wobei S_i m_i Vektoren in der Bahn von v_i stabilisiere. Des Weiteren sei $(U_j)_{j=1}^s$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen minimaler Untergruppen von Ordnung größer-gleich N . Um nachzuweisen, dass alle N -kurzen Vektoren bereits in einer der genannten Bahnen liegen, gehen wir wie folgt vor:*

1. *Bestimme für $1 \leq j \leq s$, wieviele Vektoren von Norm l von U_j stabilisiert werden.*
2. *Für $j = 1, \dots, s$ und $i = 1, \dots, k$ bestimme $\beta_{i,j} = |\{S \in S_i^{\text{Th}} | U_j \leq S\}|$.*
3. *Stimmt für $j = 1, \dots, s$ die in (1) bestimmte Anzahl mit $\sum_{i=1}^k \beta_{i,j} m_i$ überein, so liegen alle N -kurzen Vektoren von Norm l in den Bahnen von v_1, \dots, v_k .*

Beweis: Zu jedem $S \in S_i^{\text{Th}}$ mit $U_j \leq S$ stabilisiert U_j m_i durch S eindeutig bestimmte Vektoren aus der Bahn von v_i . Insbesondere gibt $\beta_{i,j} m_i$ also an, wieviele Vektoren aus der Bahn von v_i von U_j stabilisiert werden. Ist der dritte Schritt des Algorithmus' also positiv verlaufen, so stabilisiert jede minimale Untergruppe von Ordnung größer-gleich N nur Vektoren von Norm l , die bereits in den k bekannten Bahnen liegen. Da weitere N -kurze Vektoren aber insbesondere von mindestens einer der minimalen Untergruppen stabilisiert werden müssten, folgt die Behauptung. \square

Um die $\beta_{i,j}$ aus 5.3.4 rechnerisch zu bestimmen, verwenden wir die Resultate der folgenden Lemmata.

Lemma 5.3.5 Sei G eine endliche Gruppe. Zu $g \in G$ beziehungsweise $U \leq G$ bezeichne g^G beziehungsweise U^G die zugehörige Konjugiertenklasse in G . Dann gilt:

$$|\{V \in U^G \mid g \in V\}| = \frac{|U \cap g^G| \cdot |U^G|}{|g^G|}$$

Beweis: Klarerweise gilt $g \in U \Leftrightarrow sgs^{-1} \in sUs^{-1}$. Insbesondere ist also die linke Seite der Gleichung nur von g^G und nicht vom gewählten Vertreter abhängig. Jedes Element aus g^G liegt also in identisch vielen zu U konjugierten Untergruppen von G . Auf der anderen Seite gilt aber offensichtlich:

$$\sum_{h \in g^G} |\{V \in U^G \mid h \in V\}| = |U \cap g^G| \cdot |U^G|$$

Somit folgt die Behauptung. □

Eine analoge Aussage gilt auch für Untergruppen anstelle von Elementen.

Lemma 5.3.6 Sei G eine endliche Gruppe und $S, U \leq G$. Dann gilt:

$$|\{V \in U^G \mid S \leq V\}| = \frac{|\{R \in S^G \mid R \leq U\}| \cdot |U^G|}{|S^G|}$$

Beweis: Analog zu 5.3.5 □

Gelegentlich kann es schwierig sein, verschiedene Konjugiertenklassen von Untergruppen zu unterscheiden. In diesen Fällen kann das folgende Lemma hilfreich sein:

Lemma 5.3.7 Es sei G eine endliche Gruppe, $U_1, U_2 \leq S \leq G$ mit

$$|U_i^G| = k_i, \quad |\{V \in U_i^G \mid V \leq S\}| = l_i, \quad |S^G| = m$$

und die Anzahl der zu S (in G) konjugierten Gruppen, die U_i enthalten, sei durch s_i nach oben beschränkt. Ist nun

$$\frac{(l_1 + l_2) \cdot m}{k_1 + k_2} = \frac{s_1 \cdot k_1}{k_1 + k_2} + \frac{s_2 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

so liegt U_i jeweils in genau s_i zu S konjugierten Untergruppen von G .

Beweis: Nach 5.3.5 liegt U_i in genau $\frac{l_i \cdot m}{k_i}$ zu S konjugierten Untergruppen. Berechnet man den gewichteten Mittelwert, so liegt ein Durchschnittselement aus $U_1^G \cup U_2^G$ in

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{l_1 \cdot m}{k_1} + \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{l_2 \cdot m}{k_2} = \frac{(l_1 + l_2)m}{k_1 + k_2} = \frac{s_1 \cdot k_1}{k_1 + k_2} + \frac{s_2 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

zu S konjugierten Untergruppen von G . Da aber nach Voraussetzung $\frac{ml_i}{k_i} \leq s_i$ und auf beiden Seiten der Gleichung positive Zahlen aufaddiert werden, muss bereits $\frac{ml_i}{k_i} = s_i$ gelten und die Behauptung folgt. \square

Offensichtlich lässt sich das Lemma leicht auf mehr als zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen verallgemeinern.

In der vorliegenden Situation gibt es durch die Anzahl der stabilisierten Vektoren gegebener Norm im Regelfall eine natürliche Wahl für die s_i aus dem vorangehenden Lemma.

5.3.1. Vektoren von Norm 12

Da wir uns nun mit den Vektoren von Norm 12 im Thompson-Smith-Gitter auseinandersetzen wollen, ist es hilfreich, zunächst den bekannten Stabilisator eines solchen Vektors näher zu betrachten.

Lemma 5.3.8 *Die gegebene 248-dimensionale Darstellung von $G_2(3)$ zerfällt in je eine irreduzible Darstellung vom Grad 1 und 91 sowie zwei vom Grad 78. Die irreduzible Darstellung vom Grad 91 gehört dabei zum Charakter χ_6 aus der Charaktertafel der $G_2(3)$ in [CCW+85]. In der Darstellung der $C_3 \times G_2(3)$ fallen die beiden Darstellungen vom Grad 78 noch zu einer irreduziblen Darstellung vom Grad 156 zusammen.*

Beweis: Reduziert man die gegebene 248-dimensionale Darstellung modulo 5, so zerfällt diese in drei irreduzible Darstellungen vom Grad 1, 91 und 156. Da jede solche Zerlegung von einer Zerlegung über \mathbb{Z} stammt und die gegebenen Grade nicht aus der Zerlegung einer größeren irreduziblen Darstellung erhalten werden können (vgl. auftretende Grade von Darstellungen der $G_2(3)$), muss dies bereits der Zerlegung in irreduzible Darstellungen über \mathbb{Z} entsprechen. Das zentrale Element von Ordnung 3 operiert dabei in den Darstellungen vom Grad 1 und 91 trivial und in der Darstellung vom Grad 156 durch 78 2-dimensionale Darstellungen, also durch ein zu $\text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ konjugiertes Element. Betrachtet man die 248-dimensionale Darstellung nur für $G_2(3) (= (C_3 \times G_2(3))')$, so zerfällt der 156-dimensionale Anteil noch in zwei irreduzible Darstellungen vom Grad 78 (Rechnung ebenfalls modulo 5).

Insgesamt ergibt sich also die Darstellung aus den irreduziblen Darstellungen vom Grad 1 beziehungsweise 91 (zugehörig zu χ_6 nach Spur eines Elements von Ordnung 2) der $G_2(3)$ sowie aus der irreduziblen Darstellung vom Grad 78 tensoriert mit der oben genannten zwei-dimensionalen Darstellung der C_3 . \square

Das vorangehende Lemma ermöglicht es uns nun, eine Zuordnung zwischen den Konjugiertenklassen in $C_3 \times G_2(3)$ und Th herzustellen.

Proposition 5.3.9 *Sei z eines der beiden zentralen Elemente von Ordnung 3 in $C_3 \times G_2(3)$ sowie χ_i der i -te irreduzible Charakter von $G_2(3)$ (Reihenfolge wie in [CCW+85]). Dann ergibt sich in der gegebenen Darstellung für beliebiges $x \in G_2(3)$:*

$$\text{Tr}(xz^\kappa) = \chi_1(x) + \chi_6(x) + \chi_5(x) \cdot (2\delta_{0,\kappa} - \delta_{1,\kappa^2}), \quad \kappa \in \{-1, 0, 1\}$$

Beweis: Sofort aus 5.3.8. \square

Satz 5.3.10 *Alle 4-kurzen Vektoren des Thompson-Smith-Gitters von Norm 12 liegen in einer Bahn.*

Beweis: Da wir bereits eine Bahn von 4-kurzen Vektoren der Norm 12 kennen (vgl. 5.3.3), genügt es, 5.3.4 anzuwenden. In der Sprache des Algorithmus ist also $k = 1, m_1 = 2$. Die erforderlichen Informationen über die minimalen Untergruppen von Ordnung größer-gleich 4 sind in 5.2.2 aufgeführt (wir beschränken uns im Folgenden aus naheliegenden Gründen darauf, nur Untergruppen zu betrachten, die auch tatsächlich Vektoren von Norm 12 stabilisieren). Außerdem werden wir im Fall der zyklischen Untergruppen Elemente anstelle von Untergruppen zählen.

Im Folgenden sei nun $S \cong C_3 \times G_2(3)$ der Stabilisator eines fest gewählten Vektors v aus der bekannten Bahn und $z \in S$ eines der beiden zentralen 3-Elemente in S . Die zur Anwendung von 5.3.4 nötigen Informationen zu den zyklischen Untergruppen (beziehungsweise den entsprechenden Elementen) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Konjugiertenklasse in Th	Zugehörige Konjugiertenklassen in S	$ \{U \in S^{\text{Th}} g \in U\} $
13A	13a, 13b	1
9C	9a, 9b, 9c	9
7A	7a	28
6A	$6dz^\epsilon, 6c$	60
6B	$6az^\epsilon, 6bz^\epsilon, 2az^\epsilon, 6d$	33
6C	$6cz^\epsilon, 6a, 6b$	15
4B	4a, 4b	1344

Mit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Dabei entsteht die erste Spalte durch Anwenden von 5.3.9, da mit der Spur in allen relevanten Fällen eine trennende Invariante der Konjugiertenklassen von Elementen gleicher Ordnung vorliegt. Die dritte Spalte ergibt sich dann aus den Informationen in der zweiten Spalte durch Anwenden von 5.3.5.

Wir müssen nun für die Konjugiertenklassen nicht-zyklischer Untergruppen aus 5.2.2 zählen, wie oft diese in S vertreten sind.

$C_2 \times C_2$: Sei d ein Vertreter der (einzigen) Konjugiertenklasse $2a$ von Elementen der Ordnung 2 in S . Dann ist $C_S(d) \cong C_3 \times C_{G_2(3)}(d)$ und $|C_S(d)| = 3 \cdot 576$. $C_S(d)$ besitzt seinerseits zwei nicht-zentrale Konjugiertenklassen 2α von Länge 18 und 2β von Länge 72 von Elementen der Ordnung 2. Konstruiert man sich durch Überprüfen geeignet vieler Zufallselemente Vertreter der beiden Konjugiertenklassen, so erhält man (vermöge der Anzahl stabilisierter Vektoren von Norm 12), dass $2a \times 2\alpha \in (2A \times 2b)^{\text{Th}}$ und $2a \times 2\beta \in (2A \times 2c)^{\text{Th}}$ gilt. Folglich liegt jeder Vertreter von $(2A \times 2b)^{\text{Th}}$ in

$$\frac{|TH|}{6|G_2(3)|} \cdot \frac{18|G_2(3)|}{3 \cdot 2 \cdot 576} = 1792$$

$$\frac{1}{6} \cdot 270 \cdot \frac{|TH|}{|C_{TH}(2A)|}$$

und jeder Vertreter von $(2A \times 2c)^{\text{Th}}$ in 64 zu S konjugierten Untergruppen. Dies entspricht in beiden Fällen genau der Hälfte der Anzahl der stabilisierten Vektoren von Norm 12.

S_3 : S enthält 17 Konjugiertenklassen von 3-Elementen ($3az^\delta, \dots, 3ez^\delta, z, z^{-1}$ mit $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ und $3a, \dots, 3e$ den Konjugiertenklassen aus $G_2(3)$). Da z jedoch zentral in S und folglich (in S) nicht zu seinem Inversen konjugiert ist, treten lediglich $3a, \dots, 3e$ als 3-Elemente in den zu S_3 isomorphen Untergruppen von S auf. Analog zum Fall der C_2^2 müssen wir also wieder die Zuordnung zwischen den Konjugiertenklassen in der Thompsongruppe und denen in S herstellen und letztere dann zählen. Durch Anwenden von 5.3.9 erhalten wir:

Konjugiertenklasse in Th	Zugehörige Konjugiertenklassen in $G_2(3)$
$3A$	$3e$
$3B$	$3a, 3b, 3c$
$3C$	$3d$

Es ist also nun nur noch nötig, die Anzahl von 2-Elementen in S zu bestimmen, die einen Vertreter einer der fünf Konjugiertenklassen auf sein Inverses konjugieren. Da die Bestimmung eines Normalisators im Regelfall rechenaufwendig ist, führen wir die dazu nötige Rechnung in der 14-dimensionalen Darstellung der $G_2(3)$ über \mathbb{F}_2 durch und erhalten die folgenden Ergebnisse:

Konjugiertenklasse	Anzahl geeigneter 2-Elemente
$3a$	324
$3b$	324
$3c$	81
$3d$	54
$3e$	54

Folglich liegt jeder Vertreter von S_3A in

$$\frac{|Th|}{6 \cdot |G_2(3)|} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{|G_2(3)|}{162} \cdot \frac{54}{3}}{1404 \cdot \frac{|Th|}{12737088}} = 84$$

zu S konjugierten Gruppen. Analog liegt jeder Vertreter von S_3B in 6 und jeder Vertreter von S_3C in 12 zu S konjugierten Untergruppen von Th.

$C_3 \times C_3$: Im Fall der zu C_3^2 isomorphen Untergruppen ist es oft schwer, die verschiedenen Konjugiertenklassen nach Reduktion der Darstellung modulo einer kleinen Primzahl zu unterscheiden (die Unterscheidung war in den meisten Fällen nur über die Thetareihe des Fixgitters möglich, welche nach Reduktion nicht mehr zu bestimmen ist). Wir werden also 5.3.7 zur Anwendung bringen, da es meist gut möglich, ist die Anzahl der Vertreter einer Vereinigung von Konjugiertenklassen in S zu bestimmen.

Wie bei der Klassifikation der minimalen Untergruppen betrachten wir zunächst die C_3^2 , die ein Element aus $3A$ enthalten. Diese Untergruppen haben die folgende Struktur:

Konjugiertenklasse	Auftretenden Spuren von 3-Elementen
$3A \times 3a/b$	$2 \times 5, 6 \times 14$
$3A \times 3c$	$2 \times 5, 6 \times 14$
$3A \times 3d$	$2 \times 14, 2 \times -4$
$3A \times 3e$	$4 \times -4, 4 \times 14$

Wir zählen nun die Vertreter in S anhand ihrer Spurverteilung:

S enthält fünf Konjugiertenklassen von 3-Elementen mit Spur 5. Zu jeder dieser Konjugiertenklassen berechnen wir mit [BCP97] den Zentralisator und gehen wiederum dessen Konjugiertenklassen durch, um zu bestimmen, in wievielen $C_3 \times C_3$ mit ersterer Spurverteilung das fest gewählte Element liegt (dies ist genau die Anzahl von Elementen aus dem Zentralisator, die gemeinsam mit dem fest gewählten Element eine solche Gruppe erzeugen dividiert durch 6). Auf diese Art und Weise erhält man, dass S genau 321048 Untergruppen vom Typ C_3^2 mit der Spurverteilung $6 \times 14, 2 \times 5$ enthält. Also liegt ein Durchschnittselement aus den zwei Konjugiertenklassen mit dieser Spurverteilung in

$$\frac{321048 \cdot \frac{|TH|}{6|G_2(3)|}}{2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{|TH|}{3|G_2(3)|} \cdot \frac{1}{2} \frac{|G_2(3)|}{5832}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{|TH|}{3|G_2(3)|} \cdot \frac{1}{2} \frac{|G_2(3)|}{729}} = \frac{321048 \cdot 6}{|G_2(3)| \cdot \left(\frac{2}{5832} + \frac{1}{729}\right)} = \frac{1323}{5}$$

zu S konjugierten Untergruppen der Thompsongruppe, stabilisiert also $\frac{2646}{5}$ Vektoren von Norm 12. Dies ist aber auch genau der gewichtete Mittelwert

$$\frac{\frac{432}{729}}{\frac{2}{5832} + \frac{1}{729}} + \frac{\frac{2 \cdot 918}{5832}}{\frac{2}{5832} + \frac{1}{729}} = \frac{2646}{5}$$

Folglich liegen also nach 5.3.7 alle stabilisierten Vektoren in der bekannten Bahn.

Die Untergruppen mit anderer Spurverteilung können direkt gezählt werden, da diese die Konjugiertenklasse bereits eindeutig festlegt. Wir erhalten, dass S 707616 Untergruppen vom Typ $C_3 \times C_3$ mit Spurverteilung $2 \times 14, 2 \times -4, 2 \times 5$ enthält. Folglich liegt jede solche Gruppe in

$$\frac{707616 \frac{|TH|}{6|G_2(3)|}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{|TH|}{3|G_2(3)|} \cdot \frac{1}{2} \frac{|G_2(3)|}{162}} = 54 = \frac{108}{2}$$

zu S konjugierten Gruppen. Analog berechnet man, dass es in S 353808 Untergruppen mit Spurverteilung $4 \times 14, 4 \times -4$ gibt, was auch hier der gewünschten Anzahl entspricht.

Es verbleibt nunmehr noch, die Untergruppen vom Typ C_3^2 zu betrachten, die Vektoren von Norm 12 stabilisieren und kein Element aus Konjugiertenklasse $3A$ enthalten. Nach

5.2.2 sind dies genau $3B \times 3\alpha$, $3B \times 3\beta$ und $3B \times 3\gamma$.

Wie zuvor zählen wir nun die in S enthaltenen C_3^2 mit Spurverteilung 2×5 , 6×-4 (dies ist genau die Verteilung von $3B \times 3\beta$) und erhalten, dass es in S genau 52416 Vertreter dieser Konjugiertenklasse gibt und jede solche C_3^2 , die Vektoren von Norm 12 stabilisiert, folglich in 54 zu $C_3 \times G_2(3)$ konjugierten Untergruppen liegt. Für die Gruppen vom Typ $3B^2$ ($3B \times 3\alpha$ und $3B \times 3\gamma$) wenden wir erneut 5.3.7 an. In S liegen 42952 Untergruppen mit der gegebenen Spurverteilung. Dementsprechend liegt ein Durchschnittselement aus der Vereinigung der beiden Konjugiertenklassen in

$$\frac{42952 \cdot \frac{|TH|}{6|G_2(3)|}}{\frac{1}{8} \frac{|TH|}{|C_{TH}(3B)|} \cdot \left(\frac{24}{6} + \frac{216}{6}\right)} = \frac{42952 \cdot |C_{TH}(3B)|}{|G_2(3)| \cdot 30} = \frac{1593}{10} = \frac{1}{2} \cdot \left(270 \cdot \frac{216}{240} + 756 \cdot \frac{24}{240}\right)$$

zu S konjugierten Untergruppen der Thompsongruppe und nach 5.3.7 liegen dementsprechend alle stabilisierten Norm-12-Vektoren in der bekannten Bahn.

Für die minimalen Untergruppen der Automorphismengruppe, die nicht in Th enthalten sind, gehen wir zum vollen Stabilisator $S : 2$ über und berechnen analog zu den obigen Betrachtungen:

Konjugiertenklasse von u	$ \{g \in u^{\text{Aut}(\Lambda)} \mid u \in S : 2\} $	$ \{U \in S : 2^{\text{Aut}(\Lambda)} \mid g \in U\} $
$-6B$	1415232	96
$-6C$	471744	12
$-4B$	530712	160

Beziehungsweise für die nicht-zyklischen Untergruppen:

Konjugiertenklasse von U	$ \{V \in U^{\text{Aut}(\Lambda)} \mid V \leq S : 2\} $	$ \{P \in S : 2^{\text{Aut}(\Lambda)} \mid U \leq P\} $
$2A \times (-2c)$	265356	64
S_3A^-	160065	57
S_3B^-	550368	21
S_3C^-	235872	12

Somit ist für jede minimale Untergruppe der der Automorphismengruppe von Ordnung mindestens 4 gezeigt, dass alle stabilisierten Vektoren von Norm 12 in der Bahn des bekannten, von S stabilisierten, Vektors liegen. \square

5.3.2. Vektoren von Norm größer 12

Wie eine Betrachtung der Tabelle 5.3.3 zeigt, setzt sich die übersichtliche Struktur der 4-kurzen Vektoren mit nur einer Bahn von Vektoren der Norm 12 bei den Vektoren größerer Norm nicht ohne Weiteres fort. Nichtsdestoweniger lassen sich einige weitere Vollständigkeitsaussagen beweisen.

Satz 5.3.11 *Die Menge der 4-kurzen Vektoren von Norm 16 im Thompson-Smith-Gitter zerfällt unter der vollen Automorphismengruppe in 3 Bahnen, welche in 5.3.3 aufgeführt sind.*

Beweis: Dass es sich bei den angegebenen Gruppen bereits um volle Stabilisatoren handelt, ist bereits in 5.3.3 bewiesen. Dass alle 4-kurzen Vektoren in einer dieser Bahnen liegen, zeigt eine zum Fall der Norm-12-Vektoren analoge Rechnung. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen zusammengefasst. Der Übersichtlichkeit halber sei $S^{(1)}$ der zu $L_3(3)$ isomorphe Stabilisator, $S^{(2)}$ der Stabilisator in $2^5.L_5(2)$ und $S^{(3)}$ der Stabilisator in $N_{\text{Th}}(2A)$.

Konjugiertenklasse von h	$ h^{\text{Th}} \cap S^{(1)} $	$ h^{\text{Th}} \cap S^{(2)} $	$ h^{\text{Th}} \cap S^{(3)} $
13A	1728	0	0
9A	0	0	1152
7A	0	3072	0
6B	0	2688	1248
6C	936	0	128
4A	0	576	72
4B	702	4704	432

Wir definieren $s_i(h) := |\{U \in (S^{(i)})^{\text{Th}} | h \in U\}|$ für $i = 1, 2, 3$ und erhalten vermöge 5.3.5:

Konjugiertenklasse von h	stab. Vektoren von Norm 16	$s_1(h)$	$s_2(h)$	$s_3(h)$
13A	24	12	0	0
9A	972	0	0	486
7A	84	0	42	0
6B	420	0	54	156
6C	228	108	0	6
4A	9216	0	2592	2016
4B	3240	960	420	240

Analog gehen wir nun für die nicht-zyklischen Untergruppen vor. Wo nötig wenden wir 5.3.7 an. In der Tabelle ist dann jeweils der gewichtete Mittelwert angegeben.

Zu $U \leq \text{Th}$ bezeichne nun $l_i(U) := |\{V \in U^{\text{Th}} | V \leq S^{(i)}\}|$.

Konjugiertenklasse(n)	l_1	l_2	l_3
$2A \times 2b \cup 2A \times 2c$	234	2107	711
$3A \times 3b$	0	0	64
$3B \times 3\alpha \cup 3B \times 3\delta$	130	0	0
S_3A	0	1792	0
S_3B	624	0	384

Sei nun $s_i(U) := |\{S \in S^{(i)} | U \leq S\}|$, dann gilt nach der Version von 5.3.5 für Untergruppen:

Konjugiertenklasse(n)	stab. Vektoren von Norm 16	s_1	s_2	s_3
$2A \times 2b \cup 2A \times 2c$	$\frac{485520}{13}$	$\frac{86016}{113}$	$\frac{50568}{113}$	$\frac{106176}{113}$
$3A \times 3b$	972	0	0	486
$3B \times 3\alpha \cup 3B \times 3\delta$	$\frac{21870}{41}$	$\frac{10935}{41}$	0	0
S_3A	378	0	189	0
S_3B	270	108	0	27

Für die nicht in Th enthaltenen Untergruppen gehen wir zu $S^{(2)}.2$ und $S^{(3)}.2$ (den vollen Stabilisatoren in $\text{Aut}(\Lambda)$) über. l_i und s_i seien nun analog zu oben für diese Stabilisatoren definiert.

Konjugiertenklasse von h	$ h^{\text{Aut}(\Lambda)} \cap S^{(2)}.2 $	$ h^{\text{Aut}(\Lambda)} \cap S^{(3)}.2 $
$-6B$	14336	1728
$-4A$	336	56
$-4B$	4704	432

Konjugiertenklasse von h	$s_2(h)$	$s_3(h)$
$-6B$	288	216
$-4A$	1512	1568
$-4B$	420	240

Entsprechend für die nicht-zyklischen Untergruppen:

Konjugiertenklasse(n)	l_2	l_3	s_2	s_3
S_3A^-	1792	0	189	0
S_3B^-	0	384	0	27
$2A \times (-2b) \cup 2A \times (-2c)$	11160	2772	$\frac{89280}{113}$	$\frac{137984}{113}$

Damit liefert uns nun Algorithmus 5.3.4 die Behauptung. \square

Lemma 5.3.12 *Die ersten beiden in 5.3.3 angegebenen Bahnen von Vektoren der Norm 18 sind die einzigen deren Stabilisatorordnung nicht $2 \cdot 729$ teilt.*

Beweis: Wie bereits im Beweis von 5.3.3 erwähnt, hat jeder Stabilisator eines 4-kurzen Vektors von Norm 18 Ordnung $2^\epsilon \cdot 3^k$ mit $\epsilon \in \{0, 1\}$, $0 \leq k \leq 9$ (9, da die 3-Sylogruppen von Th triviales Fixgitter haben). Vermöge 5.3.4 verifizieren wir, dass die beiden bekannten Stabilisatoren alle fixierten Vektoren von Norm 18 der Konjugiertenklassen $6A, 6B, 9B$ und $9C$ erklären. Insbesondere kann also ein weiterer Stabilisator keinen Vertreter einer dieser Klassen enthalten. Mit [BCP97] verschaffen wir uns Vertreter der Untergruppen von Index 27 (also Ordnung 2187) in der 3-Sylogruppe von Th. Mit 3 Ausnahmen enthalten diese alle einen Vertreter von $9B$ oder $9C$, liefern also keinen neuen Stabilisator. Die 3 Ausnahmen haben allesamt triviales Fixgitter und kommen somit ebenfalls nicht als Stabilisator vor. Damit kann also jeder weitere Stabilisator höchstens einen 3-Anteil von 729 enthalten und muss daher einen Teiler von $2 \cdot 729$ als Ordnung haben. \square

Lemma 5.3.13 *Jeder in 5.3.3 noch nicht angegebene Stabilisator eines Vektors von Norm 18 enthält keine Elemente von Ordnung 9.*

Beweis: Die drei genannten Stabilisatoren seien der Größe nach mit $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$ bezeichnet. Zu einem Element u sei weiterhin $s_i(u) := |\{S \in S^{(i)} \mid u \in S\}|$. Dann gilt:

Konjugierten- klasse	stab. Vektoren	$s_1(u)$	$s_2(u)$	$s_3(u)$
$u \in 9A$	1176	48	108	432
$u \in 9B$	78	12	24	0
$u \in 9C$	36	9	9	0

Damit liefert uns Algorithmus 5.3.4, dass jeder weitere Stabilisator keine Elemente von Ordnung 9 enthalten kann. \square

Lemma 5.3.14 *Jede in 5.3.3 noch nicht angegebene Bahn von Vektoren der Norm 20 hat durch $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$ teilbare Länge.*

Beweis: Elemente von Ordnung 13 oder 31 stabilisieren keine Vektoren von Norm 20; folglich können 13 und 31 nicht in der Ordnung eines weiteren Stabilisators auftreten. Die fixierten Vektoren eines Elements von Ordnung 19 liegen bereits in den bekannten Bahnen (vgl. Beweis von 5.3.3), also taucht auch 19 nicht in der Ordnung eines weiteren Stabilisators auf.

Vermöge Algorithmus 5.3.4 stellen wir fest, dass alle fixierten Vektoren einer Untergruppe vom Isomorphietyp C_5^2 in einer der bekannten Bahnen liegen (genauer in der Bahn mit Stabilisatorordnung 100). Da die Thompsongruppe keine Elemente von Ordnung 25 enthält, kann der 5-Anteil eines weiteren Stabilisators also höchstens noch 5^1 betragen.

Die 7-Sylowgruppe von Th stabilisiert keine Vektoren von Norm kleiner oder gleich 26, insbesondere ist der 7-Anteil jedes weiteren Stabilisators also höchstens 7^1 .

Die Untergruppen vom Index 9 einer 3-Sylowgruppe von Th stabilisieren keine Vektoren von Norm 20 (entweder sie haben triviales Fixgitter oder enthalten Vertreter von $9A$); folglich ist der 3-Anteil eines Stabilisators höchstens 3^7 .

Analog betrachten wir die Untergruppen vom Index 8 in einer 2-Sylowgruppe von Th. Diese haben alle ein triviales Fixgitter und demnach hat jede Bahnlänge mindestens 2-Bewertung 4. \square

Bei den Vektoren von Norm 20, 22, 24 und 26 gelingt es nicht vollumfänglich, 5.3.4 anzuwenden, da die Stabilisatoren überwiegend eher kleine Ordnung haben und daher die Berechnung der Normalisatorordnung mit [BCP97] zu rechenaufwendig ist.

5.4. Die Thetareihe des Thompson-Smith-Gitters

Da das Thompson-Smith-Gitter ein gerades, unimodulares Gitter in Dimension 248 ist, handelt es sich bei seiner Thetareihe um eine Modulform vom Gewicht 124 zur vollen Modulgruppe. Wir kennen aus dem vorangegangenen Abschnitt bereits die Koeffizienten der Thetareihe an $q^0(1)$, q^2, q^4, q^6, q^8 (alle 0) sowie die Koeffizienten an $q^{10}, q^{12}, q^{14}, q^{16}$

wenigstens modulo $\frac{|\text{Th}|}{3}$ (es tauchen höchstens noch Stabilisatoren von Ordnung 1,2 oder 3 auf, die noch nicht bekannt sind). Da $\dim_{\mathbb{C}}(M_{124}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))) = 11$, würden also zwei weitere Koeffizienten genügen, um die Thetareihe des Thompson-Gitters modulo $\frac{|\text{Th}|}{3}$ zu bestimmen.

Bemerkung 5.4.1 Dem vorangehenden Abschnitt entnehmen wir, dass die Thetareihe des Thompson-Smith-Gitters (modulo $\frac{|\text{Th}|}{3}$) wie folgt beginnt:

$$\theta_{\Lambda} = 1 + 7124544000q^{12} + 47555663274000q^{16} + \mathcal{O}(q^{18}) \pmod{\frac{|\text{Th}|}{3}}$$

Bemerkung 5.4.2 Geben wir uns damit zufrieden, die Koeffizienten modulo einer etwas kleineren Zahl zu kennen, so können wir nach 5.3.12 außerdem angeben:

$$\theta_{\Lambda} = 1 + 7124544000q^{12} + 47555663274000q^{16} + 209771907072000q^{18} + \mathcal{O}(q^{20}) \pmod{\frac{|\text{Th}|}{2 \cdot 729}}$$

Bemerkung 5.4.3 Fassen wir alle Informationen aus dem vorangehenden Abschnitt zusammen, so kennen wir genug Koeffizienten, um die Thetareihe des Thompson-Smith-Gitters nun vollständig modulo $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$ anzugeben.

$$\begin{aligned} \theta_{\Lambda} = 1 + 7124544000q^{12} + 47555663274000q^{16} + 209771907072000q^{18} \\ + 6632148735313920q^{20} + \mathcal{O}(q^{22}) \pmod{578869200} \end{aligned}$$

Aus Dimensionsgründen legt dies die Thetareihe des Thompson-Smith-Gitters modulo der angegebenen Zahl eindeutig fest.

A. Anhang

A.1. Erläuterungen zu den beigefügten MAGMA-Dateien

Alle Rechnungen zum Thompson-Smith-Gitter können anhand der beigefügten MAGMA-Dateien nachvollzogen werden. Bei allen Dateien handelt es sich um MAGMA-lesbare Textdateien (können also mit dem „load“-Befehl eingelesen werden). Die folgenden Erläuterungen sollen die Bedienung erleichtern. Dazu zunächst eine Übersicht über die vorhandenen Daten:

Dateiname	Inhalt
Fm	Grammatrix von Λ
Gm	Standarderzeuger der Thompsongruppe
THCC	Vertreter der Konjugiertenklassen von Elementen
$C2^2$	Vertreter von $2A \times 2b$ und $2A \times 2c$
$C3^2A$	Vertreter der Konjugiertenklassen von C_3^2 , die einen Vertreter von $3A$ enthalten
$C3^2B$	Vertreter der verbleibenden Konjugiertenklassen von C_3^2
S3	Vertreter der Konjugiertenklassen von S_3
Stab16(DW)	Stabilisator eines Vektors von Norm 16 in $2^5.L_5(2)$
Stab16(N2A)	Stabilisator eines Vektors von Norm 16 in $2_+^{1+8}.A_9$
Verschiedene	Konstruktion der im Dateinamen angegebenen max. Untergruppe

Die Grammatrix in Fm ist mit F bezeichnet; die beiden Standarderzeuger in Gm heißen „A“ und „B“. Die Vertreter der Konjugiertenklassen in THCC sind nach dem Format „Großbuchstabe“„Ordnung“ benannt. **Beispiel:** A13 ist ein Vertreter der Konjugiertenklasse 13A. Ergibt sich eine Konjugiertenklasse durch Potenzieren der Elemente einer anderen Klasse gleicher Ordnung, so ist - analog zur Online-Version von [CCW+85] - nur ein Vertreter angegeben. **Beispiel:** Es ist kein Vertreter von 15B angegeben, da $15B = 15A^7$. Die Vertreter von 2A, 3A, 3B und 3C entsprechen genau den Elementen,

deren Normalisatoren von den SLPs aus der Online-Version von [CCW+85] konstruiert werden. Konsequenterweise sind dies also auch die Elemente, die zur Konstruktion der nicht-zyklischen Untergruppen herangezogen wurden.

Die Datei $C2^2$ enthält die Elemente $A2, b2, c2$, sodass $\langle A2, b2 \rangle$ ein Vertreter von $2A \times 2b$ und $\langle A2, c2 \rangle$ ein Vertreter von $2A \times 2c$ ist. Analog enthält die Datei $C3^2A$ die Elemente $A3, b3, c3, d3, e3$, die in naheliegender Zuordnung Vertreter der Konjugiertenklassen $3A \times 3b, \dots, 3A \times 3e$ erzeugen. In der Datei $C3^2B$ finden sich die Elemente $B3, alpha3, \dots, iota3$, die in analoger Konstruktion Vertreter der verbleibenden Konjugiertenklassen erzeugen.

Die Datei $S3$ enthält die Elemente $A3, B3, C3, s3A, s3B, s3C$. Dabei sind die letzten drei von Ordnung 2 und erzeugen jeweils mit dem zugehörigen Element von Ordnung 3 einen Vertreter der entsprechenden Konjugiertenklasse von S_3 .

$Stab16(DW)$ enthält Erzeuger $g1$ und $g2$ des Stabilisators eines Vektors von Norm 16 in der maximalen Untergruppe $2^5.L_5(2)$ (Stabilisatorordnung 43008, vgl. 5.3.3).

$Stab16(N2A)$ enthält Erzeuger $g1$ und $g2$ des Stabilisators eines Vektors von Norm 16 in der maximalen Untergruppe $2_+^{1+8}.A_9$ (Stabilisatorordnung 6912, vgl 5.3.3).

Des Weiteren stehen SLPs (aus der Online-Version von [CCW+85] übernommen) zur Konstruktion der maximalen Untergruppen zur Verfügung. Wird eine der Dateien in MAGMA eingelesen, so konstruiert MAGMA die maximale Untergruppe, die im Dateinamen angegeben ist und speichert diese als „H“ ab. Damit dies funktioniert, müssen die Standarderzeuger bereits eingelesen sein und mit „A“ und „B“ bezeichnet sein.

B. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Aachen, im März 2012

Literaturverzeichnis

- [Ben98] D. J. Benson: *Representations and Cohomology I*, Cambridge University Press, 1998
- [BCP97] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust: *The Magma algebra system.*, I. The user language, *J. Symbolic Comput.*, 24 (1997), 235–265.
- [CCW+85] J. H. Conway, R. T. Curtis, R. A. Wilson, S. P. Norton, R. A. Parker: *ATLAS of Finite Groups*, Oxford University Press, 1985
- [Ebe02] W. Ebeling: *Lattices and Codes*, Vieweg, 2002
- [Hum90] J. E. Humphreys: *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990
- [KT94] A. I. Kostrikin, P.H. Tiep: *Orthogonal Decompositions and Integral Lattices*, de Gruyter, 1994
- [LST01] W. Lempken, B. Schröder, P. H. Tiep: *Symmetric Squares, Spherical Designs, and Lattice Minima*, *Journal of Algebra* 240, 185-208, 2001
- [Neb08] G. Nebe: *Gitter und Codes*, Vorlesungsskript, RWTH Aachen, 2008
- [NS] G. Nebe, N. J. Sloane: *A Catalogue of Lattices*, <http://www.math.rwth-aachen.de/Gabriele.Nebe/LATTICES/>, Stand März 2012
- [Th76] J. G. Thompson: *Finite Groups and Even Lattices*, *Journal of Algebra* 38, 523-524, 1976
- [Ven01] B. Venkov: *Réseaux et designs sphériques*, Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires. L'Ens. Math. Monographie 37, 2001

[Wil+] R. A. Wilson et al.: *ATLAS of Finite Group Representations - Version 3*,
<http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>, Stand März 2012