FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Bachelorarbeit in Mathematik

im August 2011

Gauß-Bruhat-Zerlegung und Thomas-Zerlegung für einige klassische Gruppen

Ansgar Wigger

LEHRSTUHL D FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Gabriele Nebe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe eines Vektorraums V, die ein BN-Paar haben, untersucht. Insbesondere werden die Gruppen $GL(V), SL(V)$ und $Sp(V)$ betrachtet. Im ersten Kapitel werden allgemeine Eigenschaften der Weyl Gruppe eines BN-Paars gezeigt. Man wird beispielsweise sehen, dass der Rang und die Erzeuger der Weylgruppe eindeutig sind. Im zweiten und dritten Kapitel werden für die oben genannten Gruppen die Doppelnebenklassen BwB genauer betrachtet. Dabei wird für jede der betrachteten Gruppen die Gauß-Bruhat-Zerlegung hergeleitet. Das heißt, es wird gezeigt, dass sich die Gruppe als Vereinigung der Doppelnebenklassen BwB darstellen lässt. Desweiteren wird jede Doppelnebenklasse durch ein einfaches System vom Grad 1 beschrieben. Die Vereinigung über diese Systeme heißt auch Thomas-Zerlegung der Gruppe.

1 BN-Paare und Doppelnebenklassen

Die wesentlichen Ergebnisse und Beweisideen des folgenden Kapitels stammen aus dem Buch „The Geometry of the Classical Groups“ von Donald E. Taylor [2].

1.1 Doppelnebenklassen

Definition 1.1. *Sei G eine Gruppe und U und V Untergruppen von G. Dann operiert $U \times V$ auf G vermöge*

$$\omega : (U \times V) \times G \to G \qquad (u, v, g) \mapsto ugv^{-1}.$$

Die Bahn eines Elements $g \in G$ heißt Doppelnebenklasse von g und wird mit UgV bezeichnet.

Bemerkung 1.2. *Die Doppelnebenklassen bilden eine Partition von G und für zwei Doppelnebenklassen von $g, g' \in G$ gilt stets*

$$UgV = Ug'V \text{ oder } UgV \cap Ug'V = \emptyset.$$

Weiter existiert eine Teilmenge $A \subseteq G$ mit

$$G = \mathop{\dot{\bigcup}}_{g \in A} UgV.$$

Lemma 1.3. *Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Weiter seien $g, g', g'' \in G$. Dann gilt*

$$UgU \subseteq (Ug'U)(Ug''U) \Leftrightarrow Ug'U \subseteq (UgU)(Ug''^{-1}U) \Leftrightarrow Ug''U \subseteq (Ug'^{-1}U)(UgU).$$

Beweis. Es operiert $U \times U$ auf G vermöge

$$\omega : U \times U \times G \to G \qquad (u_1, u_2, g) \mapsto u_1 g u_2^{-1}.$$

Da die Bahnen eine Partition bilden, ist $(Ug'U)(Ug''U) = \mathop{\dot{\bigcup}}_{h \in S} UhU$ für ein $S \subseteq g'Ug''$. Sei nun $UgU \subseteq (Ug'U)(Ug''U) = \mathop{\dot{\bigcup}}_{h \in S} UhU$. Da die Bahnen eine Partition bilden, exisitiert ein $h \in S$ mit $UgU = UhU = Ug'ug''U$ für ein $u \in U$. Also existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $u_1 g u_2 = g'ug''$. Daraus folgt $g'' = u^{-1}g'^{-1}u_1 g u_2$ und $g' = u_1 g u_2 g''^{-1} u^{-1}$. Damit folgt aber

$$g' \in UgUg''^{-1}U \text{ und } g'' \in Ug'^{-1}UgU$$

und damit die Behauptung. □

Bevor wir mit der Konstruktion von BN-Paaren beginnen, sei noch ein Lemma vorangestellt, auf das im Verlauf der Arbeit mehrmals verwiesen wird.

Lemma 1.4. *Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$. Weiter sei $G' \leq G$ und $N' = N \cap G'$. Dann ist $N' \trianglelefteq G'$.*

Beweis. Sei $g \in G'$, $n \in N'$. Dann gilt $gng^{-1} \in N$, da $N \trianglelefteq G$. Weiter gilt $gng^{-1} \in G'$, da $G' \leq G$. Daraus ergibt sich $gng^{-1} \in G' \cap N = N'$. □

1.2 BN-Paar Axiome

Definition 1.5. *Sei G eine Gruppe. Dann heißt (B, N) mit $B, N \leq G$ ein BN-Paar, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

1) $G = \langle B, N \rangle$

2) $H := B \cap N \trianglelefteq N$

3) *$W := N/H$ wird von Elementen $\{w_i | i \in I\}$ mit der Eigenschaft $w_i^2 = 1$ für alle $i \in I$ erzeugt.*

4) *Falls $w_i = n_iH$ und $n \in N$, dann gilt*

   (a) $n_iBn_i \neq B$ *und*

   (b) $n_iBn \subseteq (Bn_inB) \cup (BnB)$.

Jede zu B konjugierte Gruppe heißt *Borel*-Untergruppe. Die Gruppe W heißt *Weyl Gruppe*. Wir werden in Abschnitt 1.4 zeigen, dass die Erzeuger von W eindeutig definiert sind. Damit kann man $|I|$ als den *Rang* des BN-Paars definieren. In den weiteren Abschnitten sollen die von einem BN-Paar induzierten Doppelnebenklassen der Form BwB mit $w \in W$ untersucht werden.

Lemma 1.6. *Sei G eine Gruppe mit BN-Paar (B, N) und Weyl Gruppe W. Sei $w_i = n_iH$ und $n \in N$, dann gilt $nBn_i \subseteq (Bnn_iB) \cup (BnB)$.*

Beweis. Aus Axiom 4b folgt, dass $n^{-1}Bn_i \subseteq (Bn^{-1}n_iB) \cup (Bn^{-1}B)$ gilt. Sei $x \in nBn_i$ und $x = nb^{-1}n_i$ mit $b \in B$. Dann ist

$$x^{-1} = n_i^{-1}bn^{-1} = n_ib'n^{-1} \in n_iBn^{-1}.$$

Damit ist aber $x^{-1} = b_1^{-1}n_in^{-1}b_2^{-1}$ oder $x = b_1^{-1}n_in^{-1}b_2^{-1}$ und damit

$$x \in (Bnn_iB) \cup (BnB).$$

□

1.3 Das Tits Gebäude

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. In den späteren Kapiteln sollen Gruppen untersucht werden, die sich als Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL(V)$ von V auffassen lassen. Weiter werden wir sehen, wie sich ein BN-Paar der Gruppe aus der projektiven Geometrie des Vektorraums ergibt. Dazu werden folgende Definitionen benötigt. Des Weiteren sind alle Vektorräume in diesem Kapitel endlich erzeugt.

Definition 1.7. *Sei V ein Vektorraum.*

a) Die Menge aller Teilräume von V heißt die projektive Geometrie *$\mathfrak{P}(V)$ von V.*

b) $\mathfrak{P}(V)$ ist durch Inklusion partiell geordnet. Eine Teilmenge F von $P(V)$ heißt Fahne, *falls sie vollständig geordnet ist. Die Menge*

$$\{d \in \mathbb{N} | \exists U \in F \text{ mit } dim(U) = d\}$$

heißt Typ *von F.*

c) Maximale Fahnen *sind Fahnen mit Typ $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, wobei $n = dim(V)$ gilt.*

d) Eine Fahne F heißt regulär, *falls weder $V \in F$ noch $\emptyset \in F$ gilt. Die Menge aller regulären Fahnen wird mit $\Delta(V)$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.8. *$GL(V)$ operiert auf $\Delta(V)$ und zwei Fahnen liegen genau dann in derselben Bahn, falls sie den gleichen Typ haben.*

Definition 1.9. *Sei V ein Vektorraum und $\mathfrak{P}(V)$ seine projektive Geometrie.*

a) Ein Rahmen *von $\mathfrak{P}(V)$ ist eine Menge der Form*

$$\mathfrak{F} := \{\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle\},$$

wobei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von B bildet.

b) Das Appartment *$\Sigma(\mathfrak{F})$ eines Rahmens $\mathfrak{F}$ besteht aus allen regulären Fahnen F, für die gilt*

$$V \in F \Rightarrow V \text{ wird von einer Teilmenge von } \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ erzeugt.}$$

Nun können wir für manche Untergruppen U der $GL(V)$ ein BN-Paar konstruieren, indem wir N als den Stabilisator eines Rahmens $\mathfrak{F}$ und B als den Stabilisator einer maximalen Fahne des Appartments $\Sigma(\mathfrak{F})$ setzen.

Definition 1.10. *Sei V ein Vektorraum und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Weiter sei $\Sigma(\mathfrak{F})$ das Appartment des Rahmens*

$$\mathfrak{F} := \{\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle\}$$

und $F \in \Sigma(\mathfrak{F})$ die maximale Fahne

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_{n-1}$$

mit $V_i := \langle e_1, \ldots e_i \rangle$. Desweiteren sei $U \leq GL(V)$ eine Untergruppe der linearen Gruppe. Dann operiert U auf $\mathfrak{P}(V)$ durch Anwenden.

a) Die Borel-Untergruppe B_U von U ist durch

$$B_U := Stab_U(F)$$

definiert.

b) Weiter sei

$$N_U := Stab_U(\mathfrak{F}).$$

Bemerkung 1.11. *a) $B_{GL(V)}$ ist die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen der $GL(V)$ und für $U \leq GL(V)$ ist $B_U = B_{GL(V)} \cap U$.*

b) $N_{GL(V)}$ ist die Menge aller Monomialmatrizen der $GL(V)$ und für $U \leq GL(V)$ ist $N_U = N_{GL(V)} \cap U$.

Beweis. a) Wir berechnen den Stabilisator für ein V_i. Sei $A \in Stab_{GL(V)}(V_i)$. Dann gilt $A(V_i) = V_i$. Daraus folgt, dass für $1 \leq j \leq i$ gelten muss $A(e_j) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k e_k$ mit $\alpha_k \in K$. Also ist speziell $A_{l,i} = 0$ für $l \geq i$. Daraus folgt sofort, dass A obere Dreiecksmatrix ist, falls A im Stabilisator aller V_i liegt. Die Diagonaleinträge können weiterhin nicht 0 sein, da $\det(A) = \prod_{l=1}^{n} A_{l,l} \neq 0$ ist. Offensichtlich stabilisiert auch jede obere Dreiecksmatrix A die Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$.

b) Falls A im Stabilisator von $\{\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle\}$ liegt, kann man A als Permutation der projektiven Punkte $\langle e_i \rangle$ auffassen. Deshalb exisitiert ein Gruppenepimorphismus

$$\sigma : Stab_{GL(V)}(\{\langle e_1, \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle\}) \to S_n.$$

Im Kern dieses Homomorphismus liegen offensichtlich die Diagonalmatrizen. Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung.

$\square$

Satz 1.12. *Sei $U \leq GL(V)$. Dann ist die Gruppe $H_U := B_U \cap N_U$ Normalteiler von N_U und die Weyl-Gruppe von U sei definiert durch*

$$W_U := N_U/H_U.$$

Beweis. Da $H_{GL(V)} = B_{GL(V)} \cap N_{GL(V)}$ Diagonalmatrizen und Kern des in Beweis zu Bemerkung 1.11 eingeführten Homomorphismus sind, folgt $H_{GL(V)} \trianglelefteq N_{GL(V)}$ und $W_{GL(V)} := N_{GL(V)}/H_{GL(V)} \cong S_n$. Diese wird von den Permutationen $w_i := (i, i+1)$ für $i = 1 \ldots, n-1$ erzeugt. Es ist $H_U = B_U \cap N_U = U \cap (B_{GL(V)} \cap N_{GL(V)})$ und $N_U = N_{GL(V)} \cap U$. Da $B_{GL(V)} \cap N_{GL(V)} \trianglelefteq N_{GL(V)}$ gilt, folgt mit Lemma 1.4 die Behauptung. □

Auf diese Weise findet man für eine Untergruppe $U \leq GL(V)$ Gruppen $B_U, N_U \leq U$, welche das BN-Paar Axiom 2 erfüllen. Nun muss man überprüfen, ob die restlichen Axiome auch erfüllt sind. Dies wird in Kapitel 2 für die allgemeine und spezielle lineare Gruppe und in Kapitel 3 für die symplektische Gruppe gezeigt. Insbesondere kann man zeigen, dass $G = BNB$ für jedes BN-Paar gilt, welches man aus der projektiven Geometrie des Vektorraums gewinnt.[1] Dieses Ergebnis wird im Folgenden benutzt. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Gruppen wird dies außerdem explizit gezeigt.

1.4 Die Weyl Gruppe

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Rang eines BN-Paars eindeutig ist. Sei im Folgenden G eine Gruppe mit BN-Paar (B, N) und W seine Weyl Gruppe mit Erzeuger $\{w_i | i \in I\}$. Weiter gelte $G = BNB$.

Definition 1.13. *a) Für $w \in W$ definieren wir die Länge*

$$l(w) := min\{k \in \mathbb{N} | \exists w_{i_1}, \ldots, w_{i_k} \text{ mit } w = w_{i_1} \cdots w_{i_k} \text{ und } i_l \in I \text{ für } l \in \underline{k}\}$$

von w als die Länge der kürzestmöglichen Darstellung von w mit Hilfe der w_i.

b) Falls $l(w) = k$ ist und $w = w_{i_1} \ldots w_{i_k}$ gilt, so heißt das Wort $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck *für w.*

c) Für jede Teilmenge $J \subseteq I$ sei $W_J := \langle w_i | i \in J \rangle$ und N_J die Untergruppe von N, sodass $N_J/H = W_J$ mit $H := B \cap N$.

Lemma 1.14. *Für alle $J \subseteq I$ ist BN_JB eine Untergruppe von G.*

Beweis. Für $n \in N_J$ ist zu zeigen, dass $(BnB)(BN_JB) \subseteq BN_JB$ gilt. Folglich reicht es zu zeigen, dass $nBN_JB \subset BN_JB$ gilt. Sei $n = n_{i_1} \cdots n_{i_k}$ mit $w_{i_j} = n_{i_j}H$. Wir beweisen

[1] siehe [2] S.83-85

die Behauptung mit Induktion über k.
Für $k = 0$ folgt die Behauptung sofort.
Sei also

$$n_{i_2} \cdots n_{i_k} BN_J B \subseteq BN_J B.$$

Aus BN-Paar Axiom 4b folgt, dass $n_{i_1} BN_J B \subseteq Bn_{i_1} N_J B \cup BN_J B = BN_J B$ gilt. Weiter ist nach Induktionsvoraussetzung

$$nBN_J B = n_{i_1} \cdot n_{i_2} \cdots n_{i_k} BN_J B \subseteq n_{i_1} BN_J B \subseteq BN_J B.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(BN_J B)^{-1} = BN_J B$ gilt. Dies ist aber sofort klar, da für $g = b_1 n b_2 \in BN_J B$ gilt $g^{-1} = b_2^{-1} n^{-1} b_1^{-1} \in BN_J B$. □

Definition 1.15. *a) Eine Untergruppe von G heißt* parabolische *Untergruppe, falls sie eine Konjugierte von B enthält.*

b) Die Untergruppen

$$P_J := BN_J B$$

für $J \subseteq I$ sind die standard parabolischen *Untergruppen von G.*

Lemma 1.16. *Sei $J \subseteq I$. Dann bilden B und N_J ein BN-Paar für P_J mit Weyl Gruppe W_J.*

Beweis. Es gilt offensichtlich $\langle B, N_J \rangle = P_J$. Damit ist Axiom 1 erfüllt. Da $B \cap N \cap N_j = B \cap N_J$ gilt, folgt mit Lemma 1.4, dass $B \cap N_J \trianglelefteq N_J$ und damit Axiom 2 gilt. Axiom 3 folgt sofort aus der Definition von N_J. Die Axiome 4a und 4b folgen aus den BN-Paar Eigenschaften von B und N. □

Als nächstes werden wir Doppelnebenklassen der Form BgB mit $g \in G$ untersuchen. Unter der Vorraussetzung $G = BNB$ werden wir zeigen, dass die einzigen Untergruppen von G, die B enthalten, die standard parabolischen Untergruppen sind. Die minimalen Elemente der Menge der Untergruppen von G, welche B enthalten, werden die $P_{\{i\}}$ mit $i \in I$ sein. Zunächst werden wir sehen, dass alle Doppelnebenklassen BgB von der Form BwB mit $w \in W$ sind.

Lemma 1.17. *Für jedes $g \in G$ exisitiert ein $w \in W$ mit $BgB = BwB$.*

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig. Da $G = BNB$ gilt, existieren ein $b_1, b_2 \in B$ und $n \in N$ mit $g = b_1 n b_2$. Folglich ist $BgB = BnB = BnHB$, wobei $H = B \cap N \trianglelefteq N$. Es ist aber $nH = w$ für ein $w \in W$. Damit folgt die Behauptung. □

An dieser Stelle sei an Lemma 1.3 über Teilmengenrelationen bei Doppelnebenklassenmultiplikation erinnert. Das folgende Lemma ist ein Spezialfall für Doppelnebenklassen der Form BwB.

Lemma 1.18. *Seien $w, w', w'' \in W$. Dann gilt*

$$BwB \subseteq (Bw'B)(Bw''B) \Leftrightarrow Bw'B \subseteq (BwB)(Bw''^{-1}B) \Leftrightarrow Bw''B \subseteq (Bw'^{-1}B)(BwB).$$

Beweis. Sei $BwB = BnB$, $Bw'B = Bn'B$ und $Bw''B = Bn''B$ für $n, n', n'' \in N$. Dann folgt mit Lemma 1.3

$$n' \in BnBn''^{-1}B \text{ und } n'' \in Bn'^{-1}BnB$$

und damit sofort die Behauptung für w, w', w''. □

Lemma 1.19. *Seinen $w, w' \in W$ mit $BwB = Bw'B$. Dann gilt $w = w'$.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $l(w) \leq l(w')$. Beweis mit Induktion über $l(w)$.
Falls $w = 1$ ist, gilt $Bw'B = B$. Angenommen $w' \neq 1$. Dann ist aber $w' \not\subseteq B$ und damit $Bw'B \neq B$, was einen Widerspruch darstellt. Also ist $w = w'$.
Sei nun $l(w) \geq 1$. Dann existiert ein $\tilde{w}$ mit $w = w_i \cdot \tilde{w}$ mit $l(\tilde{w}) = l(w) - 1$. Es ist dann $Bw'B = BwB \subseteq (Bw_iB)(B\tilde{w}B)$ Mit Lemma 1.18 folgt

$$B\tilde{w}B \subseteq (Bw_i^{-1}B)(Bw'B) = (Bw_iB)(Bw'B).$$

Mit dem BN-Paar Axiom 4b folgt

$$B\tilde{w}B \subseteq (Bw_iw'B) \dot\cup (Bw'B).$$

Angenommen es gilt $B\tilde{w}B = Bw'B$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\tilde{w} = w'$ im Widerspruch zu $l(w) \leq l(w')$. Sei also $B\tilde{w}B = Bw_iw'B$. Dann ist nach Induktionsvorraussetzung $\tilde{w} = w_iw'$ und damit $w = w'$. □

Um die standard parabolischen Gruppen näher zu untersuchen, muss man die Multiplikation der Doppelnebenklassen besser verstehen. Die folgende Aussage stellt eine stärkere Version des Axioms 4b dar.

Satz 1.20. *Für alle $w \in W$ und $i \in I$ gilt stets $l(ww_i) \neq l(w)$ und $l(w_iw) \neq l(w)$. Außerdem gilt:*

(a) $$(Bw_iB)(BwB) = \begin{cases} Bw_iwB & \text{für } l(w_iw) \geq l(w) \\ (Bw_iwB) \cup (BwB) & \text{für } l(w_iw) \leq l(w) \end{cases}$$

(b) $$(BwB)(Bw_iB) = \begin{cases} Bww_iB & \text{für } l(ww_i) \geq l(w) \\ (Bww_iB) \cup (BwB) & \text{für } l(ww_i) \leq l(w) \end{cases}.$$

Beweis. Die Behauptung ist für $w = 1$ klar. Deshalb sei im Folgenden o.B.d.A. $l(w) \neq 0$ und w geschrieben als $w = w'w_j$, sodass $l(w) = l(w') + 1$ gilt.

Sei nun $l(w_iw) \geq l(w)$. Beweis mit vollständiger Induktion. Es gilt immer $(Bw_iwB) \subseteq (Bw_iB)(BwB)$. Angenommen es gilt $(Bw_iB)(BwB) \neq Bw_iwB$ und damit

$$(Bw_iB)(BwB) = (Bw_iwB) \cup (BwB).$$

Es ist aber $l(w') = l(w) - 1 = l(w'w_j) - 1 \leq l(w_iw) - 1 =\leq l(w_iw')$. Induktiv gilt dann aber $(Bw_iB)(Bw'B) = Bw_iw'B$. Damit erhält man

$$BwB \subseteq (Bw_iB)(BwB) \subseteq (Bw_iB)(Bw'B)(Bw_jB) = (Bw_iw'B)(Bw_jB).$$

Mit Lemma 1.18 ist dann aber $(Bw_iw'B) \subseteq (BwB)(Bw_jB)$. Nach Lemma 1.6 ist

$$(BwB)(Bw_jB) \subseteq (Bw'B) \cup (BwB)$$

und damit folgt, dass $Bw_iw'B = Bw'B$ oder $Bw_iw'B = BwB$ gilt. Nach Lemma 1.19 ist aber ersteres nicht möglich. Damit folgt, dass $Bw_iw'B = BwB$ gilt. Dann ist aber $w_iw' = w$ und somit $w' = w_iw$ im Widerspruch zu $l(w_iw) \geq l(w)$. Damit ist gezeigt, dass $(Bw_iB)(BwB) = Bw_iwB$ für $l(w_iw) \geq l(w)$ gilt.
Sei nun $l(w_iw) \leq l(w)$. Dann folgt mit Obigem, dass $(Bw_iB)(Bw_iwB) = BwB$ gilt. Außerdem gilt mit Axiom 4b, dass $(Bw_iB)(BwB) \subseteq (Bw_iwB) \cup (BwB)$. Angenommen es gilt nicht $(Bw_iB)(BwB) = (Bw_iwB) \cup (BwB)$. Dann gilt $(Bw_iB)(BwB) = (Bw_iwB)$, da immer $(Bw_iwB) \subseteq (Bw_iB)(BwB)$ gilt. Damit ist aber

$$BwB = (Bw_iB)(Bw_iwB) = (Bw_iB)^2(BwB).$$

Mit Axiom 4 ist aber $(Bw_iB)^2 = B \cup (Bw_iB)$ und somit

$$BwB = (BwB) \cup (Bw_iwB).$$

Daraus folgt $Bw_iwB = BwB$ im Widerspruch zu Lemma 1.19. Damit ist gezeigt, dass aus $l(w_iw) \leq l(w)$ folgt, dass $(Bw_iB)(BwB) = (Bw_iwB)(BwB)$ gilt.
Behauptung (a) ist nun gezeigt. Behauptung (b) folgt sofort, indem man wie im Beweis zu Lemma 1.6 die Inversen betrachtet. $\square$

Bemerkung 1.21. *Für $w \in W$ und w_i mit $i \in I$ gilt stets*

$$l(w_iw) \in \{l(w) \pm 1\} \text{ und } l(ww_i) \in \{l(w) \pm 1\}.$$

Beweis.
1.Fall: Sei $l(w_iw) > l(w)$.
Sei $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck für w. Dann ist $w_iw_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Aus-

druck für $w_i w$ und die Behauptung folgt sofort.
2.Fall: Sei $l(w_i w) < l(w)$.
Sei $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck für $w_i w$. Dann ist $w_i w_{i_1} \cdots w_{i_k} = w$ und damit $l(w) \leq l(w_i w) + 1$, also $l(w_i w) = l(w) - 1$.
3.Fall: Sei $l(w_i w) = l(w)$.
Dann folgt nach Satz 1.20 $(Bw_i wB)(BwB) = (Bw_i wB)$ und $(Bw_i wB)(BwB) = (Bw_i wB) \cup BwB$, was einen Widerspruch darstellt. □

Für die im späteren Verlauf der Arbeit konstruierten BN-Paare werden wir sehen, dass sich die Multiplikation gemäß der Vorschrift aus Satz 1.20 verhält und dann damit das Axiom 4b zeigen. Auch das Ergebnis aus Lemma 1.19 wird nochmal explizit gezeigt werden müssen, um die BN-Paar Axiome nachzuweisen. Trotzdem liefert der Satz die nötigen Hilfsmittel um die standard parabolischen Untergruppen näher zu charakterisieren.

Satz 1.22. *Sei $n \in N$ und $w = nH$, wobei $H = B \cap N$ ist. Weiter sei $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck für w und $J := \{i_1, \ldots, i_k\}$. Dann gilt*

$$P_J = \langle B, n \rangle = \langle B, nBn^{-1} \rangle.$$

Beweis. Es ist offensichtlich, dass $\langle B, nBn^{-1} \rangle \subseteq \langle B, n \rangle \subseteq P_J$ gilt. Also bleibt zu zeigen, dass $P_J \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$ gilt. Dies wird mit Induktion über $l(w)$ gezeigt. Falls $w = 1$ ist, folgt die Behauptung sofort. Sei also $l(w) \geq 1$. Es ist zu zeigen, dass $N_J \leq \langle B, nBn^{-1} \rangle$ gilt. Seien also $n_{i_j} \in N$ so gewählt, dass $w_{i_j} = n_{i_j} H$ für $j \in \underline{k}$ gilt. Dann bleibt zu zeigen, dass $n_{i_j} \in \langle B, nBn^{-1} \rangle$ gilt. Es ist aber $w_{i_1} w = w_{i_2} \cdots w_{i_k}$ und damit $l(w_{i_1} w) < l(w)$. Mit Satz 1.20 folgt, dass $(Bw_{i_1} B)(BwB) = (Bw_{i_1} wB) \cup (BwB)$, also $(Bn_{i_1} B)(BnB) = (Bn_{i_1} nB) \cup (BnB)$ ist. Damit existiert ein $b \in B$ so, dass $n_{i_1} bn \in BnB$ gilt. Also existieren $b_1, b_2 \in B$ mit $n_{i_1} bn = b_1 n b_2$. Daraus folgt $n_{i_1} = b_1 n b_2 n^{-1} b^{-1} \in \langle B, nBn^{-1} \rangle$. Nach Induktionsvorausetzung ist $P_{J \setminus \{i\}} = \langle B, n_{i_1}^{-1} nBn^{-1} n_{i_1} \rangle \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$. Dann liegen aber alle n_{i_j} in $\langle B, nBn^{-1} \rangle$ und damit folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe des vorherigen Satzes sehen wir nun, dass die Erzeuger der Weyl-Gruppe eindeutig durch B festgelegt sind. Damit ist auch gezeigt, dass der Rang des BN-Paars eindeutig definiert ist.

Satz 1.23. *Sei $w \in W \setminus \{1\}$. Dann gilt $w \in \{w_i | i \in I\}$ genau dann, wenn $B \cup BwB$ eine Gruppe ist.*

Beweis. Sei $w \in \{w_i | i \in I\}$. Dann hat w Ordnung zwei. Es ist zu zeigen, dass $B \cup BwB$ eine Gruppe ist. Nach Satz 1.20 ist

$$(B \cup BwB)(B \cup BwB) = B \cup (BwB) \cup (BwB)(BwB) = B \cup (BwwB) \cup (BwB) = B \cup (BwB).$$

Also ist $B \cup BwB$ unter Multiplikation abgeschlossen. Sei weiter $g \in B \cup BwB$. Falls $g \in B$ gilt, folgt sofort $g^{-1} \in B \cup BwB$. Sei also $g \in BwB$. Dann ist $g = b_1 w b_2$ mit $b_1, b_2 \in B$ und $g^{-1} = b_2^{-1} w^{-1} b_1^{-1} = b_2^{-1} w b_1^{-1} \in B \cup BwB$. Damit folgt die Behauptung.
Sei nun $w \in W$ und $B \cup BwB$ eine Gruppe. Sei weiter $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck für w. Nun ist $B \cup BwB \subseteq \langle B, n \rangle$, wobei $n \in N$ so gewählt ist, dass $w = nH$ gilt. Da $B \cup BwB$ eine Gruppe ist und n enthält, folgt mit Satz 1.22, dass $B \cup BwB = \langle B, n \rangle = P_J$ gilt, wobei $J := \{i_1, \ldots, i_k\}$ ist. Nach der Definition von P_J ist w_{i_1} eine Teilmenge von N_J und damit von $BN_JB = P_J$. Also ist

$$Bw_{i_1}B \subseteq B \cup (BwB)$$

und da $w_{i_1} \neq 1$, gilt $Bw_{i_1}B = BwB$. Mit Lemma 1.19 folgt $w_{i_1} = w$. $\square$

Satz 1.24. *Für jede Untergruppe $U \leq G$ mit $B \subseteq U$ gilt $U = P_J$ für ein $J \subseteq I$.*

Beweis. Sei $J := \{i \in I | Bw_iB \subseteq U\}$. Zu zeigen ist, dass $U = P_J$ gilt. Es gilt $B \subseteq U$ und $w_j \subseteq U$ für alle $j \in J$. Daraus folgt, dass $P_J \subseteq U$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $U \subseteq P_J$ gilt. Sei dazu $g \in U$ beliebig. Dann ist $BgB = BwB$ für ein $w \in W$. Es ist aber $g \in U$ und $B \subseteq U$ also auch $BwB \subseteq U$. Sei $w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein reduzierter Ausdruck für w und $J' = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Da $B \subseteq U$, ist damit auch w eine Teilmenge von U. Es exisitiert damit ein $n \in N$ mit $w = nH$. Es gilt $n \in U$ und nach Satz 1.22 $P'_J \leq U$. Damit ist $J' \subseteq J$ und somit $BgB \subseteq P_J$. Daraus folgt, dass $g \in P_J$ gilt. Damit folgt die Behauptung. $\square$

2 BN-Paar für $GL(V)$ und $SL(V)$

2.1 Gauß-Bruhat-Algorithmus für GL(V)

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Gruppen $B_{GL(V)}$ und $N_{GL(V)}$ ein BN-Paar der $GL(V)$ bilden. Dazu seien, um die Schreibarbeit zu reduzieren, in diesem Abschnitt mit B die Gruppe $B_{GL(V)}$, mit N die Gruppe $N_{GL(V)}$ und mit W die Gruppe $W_{GL(V)}$ bezeichnet. Wir werden nacheinander die BN-Paar Axiome zeigen. Axiom 2 wurde bereits allgemein in Satz 1.12 gezeigt und Axiom 3 ist sofort ersichtlich und wird zu Beginn dieses Abschnittes gezeigt. Die im folgenden Abschnitt gezeigte *Gauß-Bruhat-Zerlegung* liefert Axiom 1. Für einen Nachweis der Axiome 4 ist eine detailliertere Betrachtung der Doppelnebenklassen BwB erforderlich. Dies wird in Abschnitt 2.2 gemacht. Im Folgenden sei V stets ein m-dimensionaler K-Vektorraum.

Satz 2.1. *Ein Vertretersystem von W ist die Gruppe der Permutationsmatrizen der $GL(V)$ und W wird deshalb von Elementen $\{w_i | i \in I\}$ erzeugt mit $w_i^2 = 1$.*

Beweis. In Satz 1.12 haben wir gesehen, dass $W \cong S_n$ gilt. Diese wird von den Permutationen $w_i := (i, i+1)$ für $i = 1 \ldots, n-1$ erzeugt und es gilt $w_i^2 = 1$ für $i = 1 \ldots, n-1$. □

Bemerkung 2.2. *Die Gruppe W ist isomorph zu S_n und damit zur Gruppe der Permutationsmatrizen der $GL(V)$. Deshalb werden wir ab jetzt W mit der Gruppe der Permutationsmatrizen identifizieren.*

Satz 2.3 (Gauß-Bruhat)**.** *Sei $A \in GL(V)$ und $A \neq Id$. Dann existieren Matrizen $b_1, b_2 \in B$ mit Einsen auf der Diagonalen, $w \in W$ und $d \in B \cap N$, also d diagonal mit*

$$A = b_1 w d b_2.$$

Beweis. Es sei $\dim(V) = m$ und $i := max\{1 \leq i \leq m | a_{i,1} \neq 0\}$. Es gilt $i > 0$, da $A \in GL(V)$. Dann räume mittels Zeilen-Gauß die Einträge $a_{j,1}$ für $1 \leq j < i$ aus. Die zugehörige Gaußmatrix sei b_1. Anschließend räume mit Spaltengauß die $i-te$ Spalte aus. Die zugehörige Gaußmatrix sei b_1'. Danach ist $a_{i,1}$ der einzige von Null verschiedene Eintrag in der ersten Spalte von A. Fahre so mit der zweiten bis m-ten Spalte fort. Die zugehörigen Gaußmatrizen seien $b_2, b_2', \ldots, b_n, b_n'$. Dabei ändern sich bei der Umformung b_j die Spalten mit Index kleiner j nicht. In der auf diese Weise aus A hervorgegangenen Matrix n steht in jeder Spalte nur ein Eintrag, der von Null verschieden ist. Also ist $n \in N$. Weiter ist $b_n \ldots b_1 A b_1' \ldots b_n' = n$, also $A = b_1^{-1} \ldots b_n^{-1} n {b_n'}^{-1} \ldots {b_1'}^{-1}$. Nach Satz 2.1 ist n ein eindeutiges Produkt $w \cdot d$ mit $w \in W$ und d Diagonalmatrix. □

Bemerkung 2.4. *In Satz 2.3 wurde auch gezeigt, dass $GL(V) = BNB$ gilt. Damit gelten, falls (B, N) ein BN-Paar der $GL(V)$ bildet, auch alle Eigenschaften der Weyl Gruppe, die in Abschnitt 1.4 gezeigt wurden.*

2.2 Thomas-Zerlegung der $GL(V)$

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass sich die Doppelnebenklassen der Form BwB als Lösung einfacher Systeme darstellen lassen. Dieses Ergebnis stammt aus dem Artikel [1] und wird im Folgenden wiedergegeben.

Definition 2.5. *Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{K}$. Weiter seien E, U endliche Teilmengen von $K[x_1, \ldots, x_n]$. Wir nennen (E, U) ein System und*

$$V(E, U; \tilde{K}) := \left\{ a \in \tilde{K}^n | p(a) = 0 \text{ für alle } p \in E,\ q(a) \neq 0 \text{ für alle } q \in U \right\}$$

die Menge seiner Lösungen für einen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K. Für eine Teilmenge $X \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ und einem $i = 1, \ldots, n$ sei $X_{\leq i} := X \cap K[x_1, \ldots, x_i]$ und $X_{=i} := X_{\leq i} - K[x_1, \ldots, x_{i-1}]$. Das System (E, U) heißt einfaches System vom Grad 1, *falls folgende Bedingungen gelten:*

a) $E \cap U = \emptyset$ und $K \cap (E \cup U) = \emptyset$.

b) $E_{=i} \cup U_{=i}$ enthält höchstens ein Element p_i für jedes $i = 1, \ldots, n$.

c) Falls p_i existiert, gilt $deg(p_i(a, x_i)) = 1$ für alle $a \in V(E_{\leq i-1}, U_{\leq i-1}; \bar{K})$.

Die erste Bedingung stellt sicher, dass die Ungleichungen und Gleichungen nicht trivial, also weder immer erfüllt noch unerfüllbar sind. Die zweite und dritte Bedingung sorgen dafür, dass, falls $X_1, \ldots, X_i$ gewählt wurden, X_{i+1} entweder eindeutig festgelegt ist oder unter Berücksichtigungen der Ungleichungen frei gewählt werden kann. Dies soll an einem Beispiel näher verdeutlicht werden.

Beispiele 2.6. *Sei $K = \mathbb{Q}$ und $E = \emptyset, U = \{X_2X_3 - X_1X_4\}$. Dann ist $E_{\leq i} = E_{=i} = \emptyset \quad \forall\, i \in \underline{4}$. Weiter ist $U_{\leq 1} = U_{\leq 2} = U_{\leq 3} = \emptyset$ und $E_{\leq 4} = E$. Damit ist $E_{=1} = E_{=2} = E_{=3} = \emptyset$ und $E_{=4} = E$. Weiter ist $V(E_{\leq 3}, U_{\leq 3}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3$. Jedoch gilt nicht $deg(bc - aX_4) = 1$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Also ist die dritte Bedingung verletzt. Falls $a = 0$ gilt, muss $b, c \neq 0$ gelten, da es sonst keine Lösung gibt. Ist hingegen $a \neq 0$, kann X_4 unter Berücksichtigung von $X_4 \neq \frac{1}{a}(bc)$ frei gewählt werden. Man kann damit zwei einfache Systeme vom Grad 1 finden, deren Lösungen eine Partition des Lösungsraums des gegebenen System bilden:*

$$V(\{X_1\}, \{X_2, X_3\}, \mathbb{Q}) \mathbin{\dot\cup} V(\{\}, \{X_1, X_2X_3 - X_1X_4\}, \mathbb{Q}) = V(E, U, \mathbb{Q}).$$

Trägt man die Variablen in eine Matrix folgendermaßen ein

$$X = \begin{pmatrix} X_2 & X_4 \\ X_1 & X_3 \end{pmatrix},$$

so sind die Lösungen des Systems die $GL(2,\mathbb{Q})$. *Die Lösungsmengen der beiden einfachen Systeme entsprechen gerade den beiden Doppelnebenklassen* $BidB$ *und* $B\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B$.

Nun wollen wir das obige Beispiel verallgemeinern. Dieses verallgemeinerte Beispiel soll die darauf folgenden Definitionen motivieren.

Beispiele 2.7. *Sei*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix},$$

$K = \mathbb{Q}$ *und* $E = \emptyset, U = \{\det(X)\}$. *Nun seien die Variablen in der Reihenfolge*

$$X_{m1}, \ldots, X_{11}, \ldots, X_{mm}, \ldots, X_{1m}$$

geordnet. Dann kann man mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes leicht die Koeffizienten der führenden Variablen X_{im} *ablesen. Diese sind*

$$\det(X_{|\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,m-1\}}).$$

Für eine Zerlegung in einfache Systeme müsste man nun Fallunterscheidungen vornehmen, welche dieser Unterdeterminanten ungleich Null sind. Als nächstes müsste man die dadurch erhaltene Gleichung oder Ungleichung für die Unterdeterminante wieder in ein einfaches System zerlegen.

Mit Hilfe des letzten Beispieles können wir erkennen, dass es notwendig ist die Matrizen in Zellen mit gleichem Rangverhalten für Teilmatrizen einzuteilen. Da diese Beschreibung für allgemeine Matrizen nicht aufwendiger als für quadratischen Matrizen ist, wird dies allgemein durchgeführt.

Definition 2.8. *Für* $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq n$ *sei*

$$d_{k,l} \;:\; K^{m\times n} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : A \mapsto \mathit{Rang}\left(A_{|\{(m-k+1)\ldots m\}\times\{1\ldots l\}}\right).$$

Weiter sei der Rang der leeren Matrix 0 *und* $\alpha_l(A)$ *das minimale* k *mit* $d_{k,l} > d_{k,l-1}$. *Falls solch ein* k *nicht existiert, setzen wir* $\alpha_l(A) := \infty$. *Für ein* $\beta \in \{1,\ldots,m,\infty\}^n$ *definieren wir*

$$C(\beta) = \{A \in K^{m\times n} | \alpha_l(A) = \beta_l \quad \forall l \in \underline{n}\}.$$

Beispiele 2.9. *Sei $K = \mathbb{Q}$. Es gilt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in C((2, 1, \infty)).$$

Bemerkung 2.10. *Man sieht sofort, dass für $\beta_1, \beta_2 \in \{1, \ldots, m, \infty\}^n$ gilt:*

$$\beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow C(\beta_1) \cap C(\beta_2) = \emptyset.$$

Beispiele 2.11. *Für eine Permutationsmatrix $w \in GL(V)$ definiere $\beta \in \{1, \ldots m\}^m$ mit $\beta_i = m+1-\tilde{w}(i)$, wobei $\tilde{w}$ die zu w gehörige Permutation der S_n ist. Dann gilt $w \in C(\beta)$. Damit folgt sofort, dass in jeder Menge $C(\beta)$ höchstens eine Permutationsmatrix der $GL(V)$ liegen kann.*

Lemma 2.12. *Es gilt $C(\beta) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \underline{n}$ mit $i \neq j$ und $\beta_i \neq \infty \neq \beta_j$ gilt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $C(\beta) \neq \emptyset$. Angenommen es existieren $i, j \in \underline{n}$ mit $i \neq j$ und $\beta_i = \beta_j \neq \infty$. Sei o.B.d.A. $i > j$. Weiter sei $A \in C(\beta)$. Wir definieren Vektoren $v_k := (A_{m+1-\beta_j,k}, \ldots, A_{m,k}) \in \mathbb{K}^{\beta_j}$ für $1 \leq k \leq j$. Es gilt $v_j \notin \langle v_1, \ldots, v_{j-1} \rangle$, da der Rang der Teilmatrix von A an dieser Stelle springt. Nach Definition von $\alpha_l(A)$ ist aber $v_j + \langle e_1 \rangle \in \langle v_1 + \langle e_1 \rangle, \ldots, v_{j-1} + \langle e_1 \rangle \rangle$. Daraus folgt aber $e_1 \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ und damit auch $e_1 \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$. Es gilt aber $v_i + \langle e_1 \rangle \in \langle v_1 + \langle e_1 \rangle, \ldots, v_{i-1} + \langle e_1 \rangle \rangle$. Damit ist aber dann $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$ im Widerspruch zu $\beta_i = \alpha_i(A)$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\beta \in \{1, \ldots, m, \infty\}^n$ mit $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \underline{m}$ mit $i \neq j$ und $\beta_i \neq \infty \neq \beta_j$. Sei $A \in K^{m \times n}$ mit $A_{\beta_j, j} = 1$, falls $\beta_j \neq \infty$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Alle anderen Einträge seien gleich Null. Dann ist A offensichtlich in $C(\beta)$ und damit $C(\beta) \neq \emptyset$. □

Mit Hilfe von Lemma 2.12 können wir auch die Umkehrung von Beispiel 2.11 zeigen:

Lemma 2.13. *Sei $\beta \in \{1, \ldots, m\}^m$ mit $C(\beta) \neq \emptyset$. Dann existiert genau eine Permutationsmatrix $w \in GL(V)$ mit $w \in C(\beta)$.*

Beweis. Da $\beta \in \{1, \ldots, m\}^m$ und $C(\beta) \neq \emptyset$, folgt mit Lemma 2.12, dass die Abbildung $w : i \mapsto m + 1 - \beta_i$ eine Permutation definiert und somit $w \in S_n$ gilt. Dann ist die zu w gehörende Permutationsmatrix $\tilde{w}$ in $C(\beta)$ und nach Beispiel 2.11 die einzige. □

Wir wollen nun die Zellen $C(\beta)$ näher untersuchen. Wir werden einerseits sehen, dass sich jede Menge $C(\beta)$ als Lösungsmenge eines einfachen Systems beschreiben lässt. Andererseits werden wir für den Fall $\beta \in \{1, \ldots m\}^m$ sehen, dass die Mengen $C(\beta)$ in Bijektion zu den Doppelnebenklassen BwB des BN-Paars stehen, welches für die $GL(V)$ konstruiert wird. Zunächst wollen wir die Menge $C(\beta)$ als Lösungsmenge von einfachen Systemen charakterisieren. Dazu werden wir als erstes folgendes Lemma zeigen:

Lemma 2.14. *Sei $\beta \in \{1,\dots,m,\infty\}^n$ mit $C(\beta) \neq \emptyset$. Für alle $i \in \underline{n}$ mit $\beta_i \neq \infty$ definieren wir*

$$Z_i = Z(n)_i := \{(a_1,\dots,a_n) | a_1 = \dots = a_{i-1} = 0, a_i \in K\backslash\{0\}, a_{i+1},\dots,a_n \in K\} \subseteq K^{1\times n}$$

und

$$S(\beta)_i := \{(b_1,\dots,b_m)^{tr} | b_i \in K, b_{m+1-\beta_i} = 1, b_j = 0 \text{ für } j > m+1-\beta_i \\ \text{und für alle } j = m+1-\beta_r \text{ für } r < i\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \prod_{\beta_i \neq \infty} S(\beta)_i \times Z_i \to C(\beta) : ((s_i, z_i))_i \mapsto \sum_i s_i z_i$$

bijektiv.

Beweis. Wohldefiniert: Die erste Spalte von $\sum\limits_i s_i z_i$ ist $(z_1)_1 \cdot s_1$. Der erste Eintrag von unten, der von Null verschieden ist, ist $m+1-\beta_1$. Damit ist $\beta_1 = \alpha_1\left(\sum\limits_i s_i z_i\right)$ für alle $((s_i, z_i))_i \in \prod\limits_{\beta_i \neq \infty} S(\beta)_i \times Z_i$. Durch Streichen der letzten Zeile und ersten Spalte folgt die Behauptung induktiv.

Injektiv: Beweis mit vollständiger Induktion über die Spaltenanzahl.
Sei $\varphi((s_i, z_i)_i) = \varphi((\tilde{s}_i, \tilde{z}_i)_i)$. Dann gilt $A_{(m+1-\beta_1,-)} = z_1 = \tilde{z_1}$. Es ist aber auch $A_{(-,m+1-\beta_1)} = (z_1)_1 \cdot s_1 = (\tilde{z}_1)_1 \cdot \tilde{s}_1$ und damit $z_1 = \tilde{z}_1$. Mit Induktionsannahme folgt die Behauptung sofort.

Surjektiv: Sei $A \in C(\beta)$. Wir beweisen die Existenz eines Urbilds mit vollständiger Induktion über Anzahl der Spalten.
Induktionsanfang ist für $m = 1$ klar mit $s = (m+1-A_{\beta_1,1})^{-1}A$ und $z = A_{m+1-\beta_1,1}$.
1. Fall: Sei $\beta_1 = \infty$. Dann ist $A_{i,1} = 0$ für alle $i \in \underline{n}$. Dann existiert nach Induktionsvorraussetzung für $A_{\{1,\dots m\}\times\{2\dots n\}}$ ein Urbild $(\tilde{s}_i, z_i)_i$. Ergänze jedes $\tilde{s}_i$ zu Vektor s_i in K^m durch $s_m = 0$. Dann ist $\varphi((s_i, z_i)_i) = A$.
2. Fall: Sei $\beta_1 \neq \infty$. Dann setze $s_1 = (A_{m+1-\beta_1,1})^{-1}A_{-,1}$ und $(z_1) = A_{m+1-\beta_1,-}$. Dann wendet man die Induktionsvorraussetzung auf $A - s_1 \cdot z_1$ an, indem man bei $A - s_1 \cdot z_1$ die erste Spalte und $m+1-\beta_1$-Zeile streicht. □

Um uns Schreibarbeit zu sparen, führen wir folgende Schreibweise ein:

Definition 2.15. *Seien $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots m\}$ und $j_1, \ldots j_k \in \{1, \ldots n\}$. Dann definieren wir*

$$x(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots j_k) := \det((x_{i_r, j_s})_{r,s=1,\ldots,k}.$$

Wir wollen jetzt die Stellen der Matrix untersuchen, an denen sich der Rang verändern muss.

Definition 2.16. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \{1, \ldots, m, \infty\}^n$ so, dass $C(\beta) \neq \emptyset$.*

a) Sei $\Sigma(\beta)$ die $m \times n$ Matrix, die mit den Symbolen $0, *, \bullet$ auf folgende Weise gefüllt ist: Zunächst sei ein $\bullet$ in jedem Eintrag $(m+1-\beta_i, i)$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\beta_i \neq \infty$. Nun wird die Matrix spaltenweise beginnend mit der Ersten gefüllt: Falls ein $\bullet$ in der k-ten Spalte ist, werden die noch nicht besetzten Einträge in der k-ten Spalte darunter mit Nullen und die Einträge darüber mit $*$ gefüllt. Des weiteren wird in alle Spalten mit größerem Index ein $*$ in die $m+1-\beta_k$-te Zeile gesetzt. Falls in der k-ten Spalte kein $\bullet$ ist, setze in jeden offenen Eintrag dieser Spalte eine Null.

b) Es seien $0 < \nu(1) < \nu(2) < \ldots < \nu(f)$ die Indizes i mit $\beta_i \neq \infty$.

$$U(\beta) := \{x(m+1-\beta_{\nu(1)}, m+1-\beta_{\nu(2)}, \ldots, m+1-\beta_{\nu(r)}; \nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(r)) | 1 \leq r \leq f\}$$

ist in Bijektion zu der Menge der $\bullet$-Einträge $(m+1-i, \beta_i)$ in $\Sigma(\beta)$.

$$E(\beta) := \{x(m+1-\beta_{\mu(1)}, m+1-\beta_{\mu(2)}, \ldots, m+1-\beta_{\mu(s)}, i; \mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(s), j) | \\ \Sigma(\beta)_{i,j} = 0, \{\mu(1) < \mu(2) < \ldots < \mu(s)\} = \{k | 1 \leq k \leq j, \beta_k \neq \infty, m+1-\beta_k < i\}\}$$

ist in Bijektion zu der Menge der 0-Einträge (i, j) in $\Sigma(\beta)$.

Beispiele 2.17. *Sei $n = m = 5$ und $\beta = (3, 2, 5, 4, 1)$. Dann ist*

$$\Sigma(\beta) = \begin{pmatrix} * & * & \bullet & * & * \\ * & * & 0 & \bullet & * \\ \bullet & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$U(\beta) = \{x(3;1), x(3,4;1,2), x(3,4,1;1,2,3), x(3,4,1,2;1,2,3,4), x(3,4,1,2,5;1,2,3,4,5)\}$$

und

$$E(\beta) = \{x(5;1), x(5;2), x(5;3), x(5;4), x(4;1), x(3,4,2;1,2,3)\}.$$

Das folgende Lemma wird zeigen, warum wir durch die Gleichungen $E(\beta)$ und $U(\beta)$ die Menge $C(\beta)$ beschreiben können.

Lemma 2.18. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \{1, \dots, m, \infty\}^n$ so, dass $C(\beta) \neq \emptyset$. Dann ist*

$$V(E(\beta), U(\beta); K) = C(\beta).$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über die Spaltenanzahl n.
Sei $n = 1$.
1.Fall: $\beta = (l)$ mit $l \in \underline{m}$. Dann haben wir eine Ungleichung $x(m+1-l; 1) = x_{m+1-l,1} \neq 0$ und $l-1$ Gleichungen $x(i; 1) = x_{i,1} = 0$ für $m+1-l < i \leq m$. Sei $A \in V(E, U; K)$. Es ist klar, dass $Rang(A_{\{i,\dots,m\}\times\{1\}} = 0)$ für $m+1-l < i \leq m$ und $Rang(A_{\{m+1-l,\dots,m\}\times\{1\}}) = 1$ und damit $A \in C(\beta)$ gilt. Falls $A \in C(\beta)$ ist, gilt offensichtlich auch $A \in V(E, U; K)$.
2.Fall: $\beta = (\infty)$. Dann ist $A \in C(\beta)$ genau dann, falls $A_{i,1} = 0$ für $1 \leq i \leq m$. Dies ist aber äquivalent zu $A \in V(E, U; K)$.
Sei die Behauptung für Matrizen mit $n-1$ Spalten richtig. Weiter sei $\beta \in \{1, \dots, m\}^n$ mit $C(\beta) \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass $V(E(\beta), U(\beta); K) = C(\beta)$ gilt.
Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $A_{|\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n-1\}}$ in $C(\beta_{|\{1,\dots,n-1\}})$ liegt. Wir müssen nur zeigen, dass $\alpha_n(A) = \beta_n$ gilt. Da $C(\beta) \neq \emptyset$, gilt $\alpha_n(A) \neq \beta_i$ für $1 \leq i \leq m-1$ mit $\beta_i \neq \infty$.
1.Fall: $\beta_n = l$ mit $l \in \underline{m}$. Wir müssen zeigen, dass für ein $A \in K^{m\times n}$ genau dann $\alpha_n(A) = l$ gilt, wenn $A \in V(E(\beta), U(\beta); K)$ gilt. Dafür ist zu zeigen, dass $Rang(A_{|\{m+1-k,\dots,m\}\times\{1,\dots,n-1\}}) = Rang(A_{|\{m+1-k,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}})$ für $1 \leq k \leq l-1$ genau dann gilt, falls A die Gleichungen und Ungleichung für die $x_{i,n}$ mit $i \in \underline{m}$ erfüllt. Dies ist für $k = \beta_j$ mit $1 \leq j \leq n-1$ klar, da ansonsten $\beta_n = \beta_j$ und somit $C(\beta) = \emptyset$ gelten würde. Sei also $k \neq \beta_j$ mit $1 \leq j \leq n-1$ und $k < l$. Dann gilt aber $\Sigma(\beta)_{k,n} = 0$. Seien $\mu(1) < \ldots < \mu(s)$ die $j \in \underline{n-1}$ mit $\beta_j < l$ und $1 \leq j \leq n-1$. Dann wird der Spaltenraum von $\tilde{A} := A_{|\{m+1-k,\dots,m\}\times\{1,\times,n-1\}}$ von den Spalten $B_{-,\mu(i)}$ mit $i = 1\dots, s$ erzeugt. Es gilt $\Sigma(\beta)_{k,n} = 0$ und somit liegt die Gleichung $x(m+1-\beta_{\mu(1)}, \dots, \beta_{\mu(s)}, k; \mu(1), \dots, mu(s), n) = 0$ vor. Diese ist genau dann erfüllt, wenn $A_{|\{m+1-k\}\times\{n\}}$ im Erzeugnis der Spalten von B liegt. Damit folgt, dass sich der Rang nicht ändern kann. Seien $\sigma(1) < \ldots < \sigma(r)$ die Indizes kleiner n mit $\beta_{\sigma(i)} \neq \infty$. Dann ist aber $x(m+1-\beta_{\sigma(1)}, \dots, m+1-\beta_{\sigma(r)}, m+1-l; \sigma(1), \dots, \sigma(r), n) \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn $Rang(A_{|\{m+1-l,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}) > Rang(A_{|\{m+1-l,\dots,n\}\times\{1,\dots,n-1\}})$ gilt.
2.Fall: $\beta_n = \infty$. Der Beweis hierzu verläuft wie in Fall 1. Nur muss die Ungleichung nicht geprüft werden.

□

Satz 2.19. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \{1, \dots, m, \infty\}^n$ mit $\beta_i \neq \beta_j$ für $i \neq j$ mit $\beta_i \neq \infty$. Dann bildet $(E(\beta), U(\beta); K)$ aus Definition 2.16 ein einfaches System vom Grad 1 unter* *der Ordnung $x_{m,1},\dots,x_{1,1},\dots,x_{m,n},\dots,x_{1,n}$ der Variablen. Die führende Variable von*

$$U_r := x(m+1-\beta_{\nu(1)}, m+1-\beta_{\nu(2)},\dots,m+1-\beta_{\nu(r)};\nu(1),\nu(2),\dots,\nu(r)) \in U(\beta)$$

ist $x_{m+1-\beta_{\nu(r)},\nu(r)}$ und die führende Variable von

$$E_s := x(\beta_{\mu(1)},\beta_{\mu(2)},\dots,\beta_{\mu(s)},i;\mu(1),\mu(2),\dots\mu(s),\dots,j) \in E(\beta)$$

ist $x_{i,j}$.

Beweis. Zunächst wird die Behauptung für die Ungleichungen bewiesen. Es ist zu zeigen, dass $x_{i,j}$ für $j > r$ oder falls $j = r$ und $i < m+1-\beta_{\nu(r)}$ gilt, nicht auftreten. Weiter ist zu zeigen, dass der Koeffizient von $x_{m+1-\beta_{\nu(r)},\nu(r)}$ nicht Null werden kann. Offensichtlich treten in der Ungleichung U_r nur die Variablen $x_{i,j}$ mit $i = m+1-\beta_\nu(l)$ für $l \leq r$ und $j \leq \nu(r)$ auf. Es ist zu zeigen, dass die Variablen $x_{i,\nu(r)}$ mit $i < m+1-\beta_r$ einen verschwindenden Koeffizienten haben. Entwickelt man die Determinante nach der letzten Spalte, so enthalten die Matrizen, deren Determinanten die Koeffizienten der $x_{i,\nu(r)}$ mit $i < m+1-\beta(r)$ bilden, die Teilmatrix $A_{|\{m+1-\beta_{\nu(r)},\dots,m\}\times\{1,\dots,n-1\}}$. Diese hat nach Definition von $C(\beta)$ nicht vollen Rang und die Koeffizienten verschwinden. Weiter ist $x(m+1-\beta_{\nu(1)}, m+1-\beta_{\nu(2)},\dots,m+1-\beta_{\nu(r-1)};\nu(1),\nu(2),\dots,\nu(r-1)) \in U(\beta)$ der Koeffizient von $x_{m+1-\beta(r),r}$. Dieser verschwindet nicht.
Bei den Gleichungen ist der Sachverhalt deutlich einfacher. Der Koeffizient von $x_{i,j}$ in E_s ist mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz $x(\beta_{\mu(1)},\beta_{\mu(2)},\dots,\beta_{\mu(s)};\mu(1),\mu(2),\dots\mu(s))$ und somit ungleich Null. Weiter ist $x_{i,j}$ offensichtlich die größte in der Gleichung auftretende Variable. □

Nun wollen wir die Gruppe $GL(V)$ näher untersuchen. Es gilt offensichtlich, dass $C(\beta) \subseteq GL(V)$, falls $\beta \in S_m$. Dann ist

$$GL(V) = \bigcup_{\beta\in S_m} C(\beta).$$

In Lemma 2.13 haben wir bereits gesehen, dass jede Zelle $C(\beta)$ genau eine Permutationsmatrix enthält. Deshalb liegt es nahe zu untersuchen, wann man durch Matrixmultiplikation die Zelle verlässt.

Lemma 2.20. *Sei $b \in B$, $A \in GL(V)$ und $\beta \in \underline{n}^n$. Dann gilt:*

a) $A \in C(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad bA \in C(\beta)$

b) $A \in C(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad Ab \in C(\beta)$.

Beweis. a) b erhält für jede Untermatrix $A|_{\{l..m\}\times\{1..s\}}$ von A bei Linksmultiplikation den Zeilenrang. Daraus folgt direkt die Behauptung.

b) b erhält für jede Untermatrix $A|_{\{l..m\}\times\{1..s\}}$ von A bei Rechtsmultiplikation den Spaltenrang. Daraus folgt direkt die Behauptung.

□

Bemerkung 2.21. *W und $M := \{\beta \in \underline{n}^n \mid C(\beta) \neq \emptyset\}$ sind gleichmächtig und für jedes $\beta \in M$ existiert nach Lemma 2.13 ein $w \in W$ mit $w \in C(\beta)$. Damit lässt sich die Bijektion φ von $\{C(\beta) \mid \beta \in M\}$ nach W definieren, die jeder Menge $C(\beta)$ dasjenige $w \in W$ zuordnet, welches in $C(\beta)$ enthalten ist.*

Korollar 2.22. *Die Permutationsmatrix $w \in W$ in der Zerlegung in Satz* 2.3 *ist eindeutig. Weiter ist $C(\beta) = B\varphi(C(\beta))B$ und damit*

$$GL(V) = \mathop{\dot\cup}_{w\in W} BwB.$$

Beweis. Angenommen $A = b_1wdb_2 = b_1'w'd'b_2'$ wie in Satz 2.3 mit $w \neq w'$. Nach Lemma 2.20 gilt $A \in \varphi^{-1}(w)$. Andererseits ist $A \in \varphi^{-1}(w')$. Es ist aber $\varphi^{-1}(w) \cap \varphi^{-1}(w') = \emptyset$. Daraus folgt ein Widerspruch zur Annahme $w \neq w'$. Sei β beliebig mit $C(\beta) \neq \emptyset$ und $A \in C(\beta)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $A \in B\varphi(C(\beta))B$ gilt. Dies folgt aber unmittelbar aus Satz 2.3. □

Bemerkung 2.23. *Die Matrizen $b_1, b_2 \in B$ in der Zerlegung in Satz* 2.3 *sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Es ist beispielsweise in $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$*

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Satz 2.24. *Sei $\tilde{w}, \tilde{w}_i := (i, i+1) \in S_m$ mit $i \in \underline{m-1}$. Weiter seien w, w_i die zu $\tilde{w}, \tilde{w}_i$ gehörende Permutationsmatrix der $GL(V)$ und $b \in B$. Es gilt:*

a) $w_iBw \subseteq (Bw_iwB) \cup (BwB)$

b) Es gilt $w_ibw \in BwB$ genau dann, wenn $b_{i,i+1} \neq 0$ und $\tilde{w}(i) > \tilde{w}(i+1)$ gilt.

Beweis. a) Sei $BwB = C(\beta)$ für ein $\beta \in \underline{m}^m$. Es ist zu untersuchen, in welchen Doppelnebenklassen die Elemente aus w_iBw liegen. Sei also $w_ibw \in w_iBw$ und $w_ibw \in C(\tilde{\beta})$. Sei $\sigma_i, \sigma_{i+1} \in \underline{n}$ so gewählt, dass $\beta_{\sigma_i} = i, \beta_{\sigma_{i+1}} = i+1$. Daraus folgt aber sofort $BwBw_1B \subseteq C(\beta) \cup C(\beta')$ mit

$$\beta_j' = \begin{cases} \beta_{i+1} & j = i \\ \beta_i & j = i+1 \\ \beta_j & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit die Behauptung.

b) Alle Matrizen in wB haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix}
\bullet & * & * & * & & \cdots & & * \\
0 & \ddots & * & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & \bullet & * & & \cdots & & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\
 & & & \bullet & b_{i,i+1} & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & 0 & 0 & \bullet & * & * \\
 & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet
\end{pmatrix},$$

wobei $*$ für beliebige Köperelemente und $\bullet$ für Elemente ungleich 0 steht. Die Matrix w_1 vertauscht lediglich die Spalten der obigen Matrix. Damit lässt sich $\varphi^{-1}(wbw_1)$ sofort ablesen. Es gilt $\varphi^{-1}(wbw_1)_j = \varphi^{-1}(w_1)_j$ für $j \notin \{i, i+1\}$. Weiter ist

$$\varphi^{-1}(wbw_1)_{i+1} = \begin{cases} min\{w_1(i), w_1(i+1)\} & \text{falls } b_{i,i+1} \neq 0 \\ w_1(i) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit folgt die Behauptung.

□

Nun haben wir alle Grundlagen um zu zeigen, dass die in Satz 1.10 eingeführten Gruppen B, N ein BN-Paar der $GL(V)$ bilden.

Korollar 2.25. *Die in Definition 1.10 eingeführten Gruppen B, N bilden ein BN-Paar der $GL(V)$.*

Beweis. Wir müssen die BN-Paar Axiome 1.5 nachrechnen:
Axiom 1 folgt aus Satz 2.3, die Axiome 4a und 4b folgen aus Satz 2.24 und die Axiome 2 und 3 folgen aus Satz 2.1. □

2.3 BN-Paar für SL(V)

Definition 2.26. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum der Dimension m. Dann ist die spezielle lineare Gruppe von V definiert durch*

$$SL(V) := \{A \in GL(V) | det(A) = 1\}.$$

Lemma 2.27. *Die oben definierte Menge $SL(V)$ bildet eine Gruppe.*

Beweis. Die Abbildung

$$det : GL(V) \to K \, , \, A \mapsto det(A)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $SL(V)$. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 2.28. *Sei B die oben konstruierte Borelgruppe der $GL(V)$ und N die Gruppe der Monomialmatrizen der $GL(V)$. Weiter seien $B' := B_{SL(V)} = B \cap SL(V)$ und $N' := N_{SL(V)} = N \cap N_{SL(V)}$ wie in 1.10.*

Wir werden zeigen, dass (B', N') ein BN-Paar der $SL(V)$ bilden.

Lemma 2.29. *Es gilt $SL(V) = B'N'B'$.*

Beweis. Sei $A \in SL(V)$ beliebig. Dann gilt $A \in GL(V)$ und nach Satz 2.3 existieren $b_1, b_2 \in B$ und $n \in N$ mit $A = b_1 n b_2$, wobei zusätzlich b_1 und b_2 nur Einsen auf der Diagonalen haben. Daraus folgt, dass $b_1, b_2 \in B'$ und damit auch $n' \in N'$. □

Lemma 2.30. *$H' := B' \cap N'$ ist Normalteiler von N' und $W' := N' \backslash H'$ wird von Elementen $\{w_i | i \in I\}$ mit $w_i^2 = 1$ für alle $i \in I$ erzeugt.*

Beweis. Die erste Behauptung ist 1.12. Nun definiert man den selben Homomorphismus wie in 1.11

$$\sigma : Stab_{SL(V)}(\{\langle e_1, \rangle, \dots, \langle e_n \rangle\}) \to S_n.$$

Dieser ist offensichtlich ein Epimorphismus und der Kern sind Diagonalmatrizen. Deshalb ist die Weylgruppe der $SL(V)$ isomorph zur S_n und die Behauptung folgt sofort. □

Lemma 2.31. *Es gilt für $n \in N'$ und $w_i = n_i H'$ für alle $i \in I$*

$$n_i B' n \subseteq (B' n_i n B') \cup (B' n B').$$

Beweis. Es ist $n_i B' n = n_i B n \cap SL(V)$ und $(B' n_i n B') \cup (B' n B') = ((B n_i n B) \cup (B n B)) \cap SL(V)$. Mit Satz 2.24 folgt die Behauptung sofort. □

Satz 2.32. *Die Gruppen B' und N' bilden ein BN-Paar der $SL(V)$.*

Beweis. Die Axiome folgen sofort aus Lemma 2.29, 2.30 und 2.31. □

Bemerkung 2.33. *Die Doppelnebenklassen $B'wB'$ mit $w \in W'$ erhält man auch, indem man die zugehörige Zelle $C(\beta)$ mit $SL(V)$ schneidet.*

Definition 2.34. *Sei $\beta \in \underline{m}^m$, sodass $C(\beta) \neq \emptyset$. Weiter seien $E(\beta)$ und $U(\beta)$ gemäß Definition 2.16 gewählt. Dann seien die Mengen $E'(\beta)$ und $U'(\beta)$ folgendermaßen definiert:*

$$E'(\beta) := E(\beta) \cup \{det(X) - 1\} \text{ und } U'(\beta) := U(\beta) \backslash \{det(X), -det(X)\},$$

wobei $X \in K[x_{11}, \dots, x_{mm}]^{m \times m}$ mit $X_{i,j} = x_{ij}$.

Satz 2.35. *Sei $\beta \in \underline{m}^m$, sodass $C(\beta) \neq \emptyset$. Dann ist $(E'(\beta), U'(\beta))$ bei Ordnung der Variablen wie in Satz 2.19 ein einfaches System vom Grad 1.*

Beweis. Nach Satz 2.19 bilden $(E(\beta), U(\beta))$ ein einfaches System von Grad 1. Wir zeigen nun die Bedingungen aus Definition 2.5. Es gilt offensichtlich $U'(\beta) \cap E'(\beta) = \emptyset$ und $K \cap (U'(\beta) \cup E'(\beta)) = \emptyset$. Damit ist Bedingung 1 erfüllt. Des Weiteren sei $k \in \underline{m^2}$ der größte Index mit $E(\beta)_{=k} \cup U\beta)_{=k} \neq \emptyset$. Da alle Elemente in $C(\beta)$ vollen Rang haben, treten in der letzten Spalte von $\Sigma(\beta)$ keine Nullen und nur ein $\bullet$ auf. Dann ist $E(\beta)_{=i} = E'(\beta)_{=i}$ und $U(\beta)_{=i} = U'(\beta)_{=i}$ für $i \leq k$. Als nächstes zeige ich, dass $E'(\beta)_{=k} \cup U'(\beta)_{=k}$ höchstens ein Element enthält. Es ist $E(\beta)_{=k} = \emptyset$ und $U(\beta)_{=k}$ enthält das Polynom $det(\tilde{X})$, wobei $\tilde{X}$ eine Permutation der Zeilen und Spalten von X ist. Deshalb enthält $U(\beta)_{=k}$ entweder das Polynom $det(X)$ oder das Polynom $-det(X)$. Daraus folgt $U'(\beta)_{=k} = \emptyset$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $E'(\beta)_{=j} = U'(\beta)_{=j} = \emptyset$ für $j > k$ gilt. Dies ist aber sofort klar, da dies bereits für $E(\beta)$ und $U(\beta)$ gilt und das Polynom $det(X) - 1$ in $E'(\beta)_{=k}$ liegt. Damit folgt Bedingung 2. Noch zu zeigen bleibt, dass $det(X) - 1$ von Rang 1 in x_k für alle Lösungen aus $V(E_{\leq n^2-1}, U_{leqn^2-1}, K)$ ist. Da aber $det(X)$ von Rang 1 ist, folgt dies auch für $det(X) - 1$. □

Satz 2.36. *Sei $\beta \in \underline{m}^m$, sodass $C(\beta) \neq \emptyset$. Dann ist $V(E'(\beta), U'(\beta), K) = C(\beta) \cap SL(V)$.*

Beweis. Sei $A \in C(\beta) \cap SL(V)$. Dann gilt $det(A) = 1$ und nach Lemma 2.18 ist $A \in V(E(\beta), U(\beta))$. Damit folgt dann aber sofort $A \in V(E'(\beta), U'(\beta), K)$. Sei nun $A \in V(E'(\beta), U'(\beta), K)$. Dann gilt $det(A) = 1$ und insbesondere $det(A) \neq 0$. Damit ist aber $A \in V(E(\beta), U(\beta), K)$ und in $SL(V)$. Nach Lemma 2.18 ist $A \in C(\beta) \cap SL(V)$. Damit folgt die Behauptung. □

3 BN-Paar für $Sp(V)$

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein BN-Paar für die symplektische Gruppe zu konstruieren. Das Vorgehen dabei wird ähnlich wie bei der allgemeinen linearen Gruppe sein.

3.1 Symplektische Vektorräume und die symplektische Gruppe

In diesem ersten Abschnitt wird die symplektische Gruppe eines Vektorraums definiert und einige einfache Eigenschaften symplektischer Räume gezeigt. Diese werden wir später benutzen, um unser BN-Paar zu konstruieren.

Definition 3.1. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und β eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf V, d.h. $\beta(v,v) = 0 \;\; \forall v \in V$ und $V^\perp = \{0\}$. Dann heißt (V,β)* symplektischer Raum*. Die* symplektische Gruppe *auf V ist folgendermaßen definiert*

$$Sp(V) := \{f \in GL(V) | \beta(f(x), f(y)) = \beta(x,y) \, \forall \, x, y \in V\}.$$

Falls $V = K^m$, schreiben wir $Sp(m,K)$ anstelle von $Sp(V)$. Falls zusätzlich noch $K = \mathbb{F}_q$ gilt, schreiben wir auch $Sp(m,q)$.

Bemerkung 3.2. *Sei (V,β) symplektischer Raum. Dann gilt*
$0 = \beta(u+v, u+v) = \beta(u+v, u) + \beta(u+v, v) = \beta(v,u) + \beta(u,v)$ und damit
$\beta(u,v) = -\beta(v,u) \;\; \forall u, v \in V$.

Bemerkung 3.3. *Sei $B = (e_1, .., e_m)$ Basis des symplektischen Raums (V,β) und J die Gram-Matrix von β bzgl. B. Sei f in $GL(V)$ und A die zu f bzgl. B gehörende Matrix. Dann liegt f in $Sp(V)$ genau dann, wenn $A^t J A = J$.*

Beweis. $f \in Sp(v) \Leftrightarrow \beta(f(v), f(u)) = \beta(v,u) \;\; \forall u, v \in V \Leftrightarrow (Av)^t J A u = v^t J u \;\; \forall u, v \in V \Leftrightarrow A^t J A = J$ □

Bemerkung 3.4. *Sei (V,β) symplektischer Raum. Dann bildet die Menge $Sp(V)$ bzgl. der Matrixmultiplikation eine Gruppe.*

Beweis. Wir definieren auf $GL(V)$ folgende Operation:

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V) \quad (A, B) \mapsto A^{-T} B A^{-1}.$$

Dann ist $Sp(V)$ der Stabilisator von J, wobei J die Gram-Matrix von β bzgl. einer Basis B ist. □

Bemerkung 3.5. *Für alle $A \in Sp(V)$ gilt $det(A) = \pm 1$.*

Beweis. Sei $A \in Sp(V)$. Dann gilt nach Bemerkung 3.3 $A^tJA = J$, wobei J die Gram-Matrix von β bzgl. einer Basis B ist. Dann ist aber $det(A^tJA) = det(J)$ und damit $det(A)^2 = 1$. □

Lemma 3.6. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $(u, v) \in V \times V$ mit $\beta(u, v) = 1$. Dann ist $V = \langle u, v\rangle \perp \langle u, v\rangle^\perp$. Das Tupel (u, v) heißt auch* hyperbolisches Paar.

Beweis. Sei $r \in V$. Dann setze $\widetilde{r} = r + \beta(r, u)v - \beta(r, v)u$.
Dann ist $\beta(\widetilde{r}, u) = \beta(r, u) - \beta(r, u)\beta(u, v) - \beta(r, v)\beta(u, u) = 0$. Analog folgt $\beta(\widetilde{r}, v) = 0$ und damit $\widetilde{r} \in \langle u, v\rangle^\perp$. Sei $w \in \langle u, v\rangle \cap \langle u, v\rangle^\perp$. Dann ist $w = \alpha u + \gamma v$ mit $\alpha, \gamma \in K$. Außerdem ist $\beta(w, u) = 0$ und $\beta(w, v) = 0$. Damit folgt aber $\alpha = \gamma = 0$ und damit $w = 0$. □

Lemma 3.7. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum. Dann hat V die Dimension $2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und es existiert eine Basis $(e_1, f_1, ..., e_m, f_m)$ von V mit $\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0$ und $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \underline{m}$. Die Basis $(e_1, f_1, ..., e_m, f_m)$ heißt* symplektische Basis *von V und $\{\langle e_1\rangle, \langle f_1\rangle, ..., \langle e_m\rangle, \langle f_m\rangle\}$ heißt* symplektischer Rahmen.

Beweis. Wähle $e_1 \neq 0$ aus V und $\widetilde{f_1}$ aus V mit $\beta(e_1, \widetilde{f_1}) \neq 0$. Dies ist möglich, da, falls $\beta(e_1, v) = 0$ für alle $v \in V$, wäre β entartet. Setze $f_1 := (\beta(e_1, \widetilde{f_1}))^{-1} \cdot \widetilde{f_1}$. Dann ist $\beta(e_1, f_1) = 1$. Mit Lemma 3.6 erhält man dann $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp \langle e_1, f_1\rangle^\perp$. Fahre mit $\langle e_1, f_1\rangle^\perp$ fort und induktiv ergibt sich, dass $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp ... \perp \langle e_m, f_m\rangle$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $(e_i, f_i) \in V \times V$ hyperbolisches Paar ist, und damit die obigen Behauptungen folgen. □

Im Folgenden sei (V, β) immer ein symplektischer K-Vektorraum der Dimension $2m$.

Lemma 3.8. *Sei $e_1, \ldots, e_m \in V$ linear unabhängig und paarweise orthogonal. Dann existieren $f_1, \ldots, f_m$, so dass $(e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m)$ eine symplektische Basis von V bildet.*

Beweis. Beweis mit Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Behauptung klar. Sei also die Behauptung für ein festes $m-1 \in \mathbb{N}$ wahr und $e_1, \ldots, e_m \in V$ seien linear unabhängig und paarweise orthogonal. Nach Induktionsvorrausetzung existieren dann $h_1, \ldots, h_{m-1}$, sodass $(e_1, h_1, \ldots, e_{m-1}, h_{m-1})$ eine symplektische Basis von $\langle e_1, h_1, \ldots, e_{m-1}, h_{m-1}\rangle$ ist. Nun gilt $e_m \notin \langle e_1, h_1, \ldots, e_{m-1}, h_{m-1}\rangle$, da $e_1, \ldots, e_m$ linear unabhängig und paarweise orthogonal sind. Damit existiert aber ein h_m in $\langle e_1, h_1, \ldots, e_{m-1}, h_{m-1}\rangle^\perp$ mit $\beta(e_m, h_m) \neq 0$. Sei o.B.d.A. $\beta(e_m, h_m) = 1$. Dann setze $f_m = h_m$ und $f_i = h_i - \beta(e_m, h_i)h_m$ für $i = 1, \ldots, m-1$. Dann ist

$$\beta(e_m, f_i) = \beta(e_m, h_i) - \beta(e_m, h_i)\beta(e_m, h_m) = 0$$

für $1 \leq i \leq m-1$. Weiter ist

$$\beta(e_i, f_j) = \beta(e_i, h_i) - \beta(e_m, h_i)\beta(e_i, h_m) = \delta_{i,j}$$

für $1 \leq i, j < m$. □

Bemerkung 3.9. *Falls* $(e_1, f_1, .., e_m, f_m)$ *eine symplektische Basis von* V *bildet, so hat die zu* β *gehörende Matrix* J *in der Basis* $(e_1, ..., e_m, f_m, ..., f_1)$ *die Form*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } Q := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.10. *Es gilt* $A \in Sp(V)$ *genau dann, wenn* $A^T \in Sp(V)$.

Beweis. Es ist $AJA^T = (A^{-T}J^{-1}A^{-1})^{-1} = -(A^{-T}JA^{-1})^{-1} = -J^{-1} = J$, da $J^{-1} = -J$ ist. $\square$

Nun beginnen wir mit der Konstruktion des (B, N)-Paars für die symplektische Gruppe.

Definition 3.11. *Sei* $(e_1, \ldots, e_m, f_m, \ldots, e_1)$ *eine symplektische Basis des symplektischen Raumes* V. *Weiter sei* $(B_{GL(V)}, N_{GL(V)})$ *das* BN*-Paar der* $GL(V)$ *bezüglich dieser Basis. Weiter sei ab nun* $B := B_{SpV(V)} = B_{GL(V)} \cap Sp(V)$ *und* $N := N_{SpV(V)} = N_{GL(V)} \cap Sp(V)$ *wie in Definition 1.10. Weiter sei* $W := W_{Sp(V)} = N/H_{Sp(V)}$.

Zuerst wollen wir die Untergruppen B und N und die Weylgruppe W der $Sp(V)$ betrachten.

Bemerkung 3.12. *Alle Matrizen* $M \in B$ *haben die Gestalt*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & (QA^TQ)^{-1} \end{pmatrix},$$

wobei A *eine obere Dreiecksmatrix ist und* $QA^{-1}B$ *symmetrisch ist.*

Beweis. Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \in K^{2m \times 2m} \cap Sp(V)$. Dann ist M in $B_{GL(V)}$ genau dann, wenn M obere Dreiecksmatrix ist. Da aber $B = B_{GL(V)} \cap Sp(V)$ gilt, folgt, dass A obere Dreiecksmatrix und $D = 0$ sein muss. Weiter muss gelten $M^{tr}JM = J$. Dies bedeutet

$$\begin{pmatrix} A^{tr} & 0 \\ B^{tr} & C^{tr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{tr}QC \\ -C^{tr}QA & B^{tr}QC - C^{tr}QB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ließt man sofort die Bedingungen $A^{tr}QC = Q$ und $C^{tr}QB$ symmetrisch ab. Mit $Q = Q^{tr} = Q^{-1}$ folgt die Behauptung. $\square$

Nun wollen wir die Gruppe N und insbesondere die Gruppe W untersuchen. Nach Lemma 1.12 ist $H := N \cap B \trianglelefteq N$ und die Weylgruppe ist definiert als $W := N/H$.

Lemma 3.13. *Bezüglich der symplektischen Basis $(e_1, \ldots, e_m, f_m, \ldots, f_1)$ sind alle Matrizen in N Monomialmatrizen und $W \cong C_2 \wr S_m$ wird von Elementen $\{w_i \mid i \in I\}$ der Ordnung 2 erzeugt.*

Beweis. Es operiert N auf $\{\langle e_1 \rangle, \langle f_1 \rangle, \ldots, \langle e_m \rangle, \langle f_m \rangle\}$. Dies liefert einen Homomorphismus $\tilde{\varphi}$ von N in die symmetrische Gruppe S_{2m}. H ist das Herz der Operation und somit ist die Einschränkung $\varphi : W = N/H \hookrightarrow S_{2m}$ eine Einbettung von W in die symmetrische Gruppe vom Grad $2m$. Sei $n \in N \subseteq Sp(V)$. Dann gilt $\beta(ne_i, nf_j) = \beta(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$. Also gilt für ein $w \in W$, dass aus $w\langle e_i \rangle = \langle e_j \rangle$ folgt $w\langle f_i \rangle = \langle f_j \rangle$ und aus $w\langle e_i \rangle = \langle f_j \rangle$ folgt $w\langle f_i \rangle = \langle e_j \rangle$. Also bilden die $\{\langle e_i \rangle, \langle f_i \rangle\}$ für $i = 1, \ldots, m$ ein Blocksystem. Daraus folgt, dass W isomorph zu einer Untergruppe von $C_2 \wr S_n$ ist. Weiter erhalten aber auch die linear fortgesetzten Abbildungen $w_i : V \to V$, $e_i \mapsto e_{i+1}$, $f_i \mapsto f_{i+1}$ für $i = 1, \ldots m-1$ und die linear fortgesetzte Abbildung $w_m : V \to V$, $e_i \mapsto f_i$, $f_i \mapsto -e_i$ die Bilinearform β und liegen somit in der symplektischen Gruppe. Deshalb ist die Abbildung $W \hookrightarrow C_2 \wr S_m$ surjektiv. Damit folgt die Behauptung. □

3.2 Gauß-Bruhat-Algorithmus für Sp(V)

In diesem Abschnitt wird das erste BN-Paar Axiom gezeigt. Es wird $Sp(V) = BNB$ gezeigt, indem der Gauß-Bruhat-Algorithmus aus Satz 2.3 auf die symplektische Gruppe übertragen wird. Dazu wird die Basis bezüglich derer wir rechnen gewechselt. Dies wird jedoch nur für diesen Abschnitt gelten, da die Rechnungen bezüglich der gewechselten Basis einfacher und die Ergebnisse in diesem Abschnitt unabhängig von der Basiswahl sind.

Definition 3.14. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m$ eine zugehörige symplektische Basis. Dann hat β bzgl. der Basis die Gestalt*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.15. *Bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ liegen Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in GL(n, K)$$

genau dann in der $Sp(V)$, falls $A = B^{-T}$ und $C^T B$ symmetrisch ist.

Beweis. Man rechnet nach, dass

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ C^T & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BA^T \\ -AB^T & C^TB - B^TC \end{pmatrix}$$

gilt. Damit folgt die Behauptung sofort. □

Bemerkung 3.16. *Bezüglich der Basis* $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ *haben Matrizen aus* B *die Gestalt aus Bemerkung 3.15, wobei* A *eine obere Dreiecksmatrix und damit* B *eine untere Dreiecksmatrix ist. Die Matrizen aus* N *sind Monomialmatrizen und die Matrizen aus* H *damit Diagonalmatrizen.*

Der folgende Algorithmus ist auch bezüglich der Basis $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ formuliert.

Algorithmus 3.17 (Gauß-Bruhat Algorithmus für $Sp(V)$)**.**
Eingabe: Matrix $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in Sp(V)$ *mit* $dim(V) = 2m$, *wobei* $m \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: Matrizen $b_1, b_2 \in B, w \in W$ *mit* $A = b_1 w b_2$.
Initialisierung: Setze $b_1 = Id = b_2$, $d = Id$ *und* $j = 1$.

START:

1. Schritt: A_{21} *„ausräumen"*
Sei $(A_{21})_{i,j}$ *der erste Eintrag in der* j*-ten Spalte, der nicht Null ist. Sind alle Einträge in der* j*-ten Spalte Null, wird* j *um eins erhöht und der Schritt wiederholt. Ansonsten wird die* j*-te Spalte und* i*-te Zeile von* A_{21} *mit Hilfe des Eintrags* $(A_{21})_{i,j}$ *ausgeräumt. Bei jeder Zeilenumforung „Addiere a-mal die* $(m+i)$*-te Zeile von* A *zur* $(m+k)$*-ten Zeile von* A*" muss gleichzeitig die Umformung „Addiere* $(-a)$*-mal die* $(m+1-i)$*-te Zeile von* A *zur* $(m+1-k)$*-ten Zeile von* A*" ausgeführt werden. Bei jeder Spaltenumformung „Addiere a-mal die* j*-te Spalte von* A *zur* k*-ten Spalte von* A*" muss gleichzeitig die Umformung „Addiere* $(-a)$*-mal die* $(2m-j)$*-te Spalte von* A *zur* $(2m-k)$*-ten Spalte von* A*" ausgeführt werden. Weiter wird nach jeder Zeilenumformung* $b_1 := b \cdot b_1$ *gesetzt, wobei* b *die zugehörige Umformungsmatrix ist. Nach jeder Spaltenumformung wird* $b_2 := b_2 \cdot b$ *gesetzt, wobei* b *die entsprechende Umformungmatrix ist. Danach wird* j *um eins erhöht und der Schritt wiederholt bis in jeder Spalte von* A_{21} *höchstens ein Eintrag von Null verschieden ist.*
2. Schritt: Teile von A_{11} *und* A_{22} *„ausräumen"*
Sei $M := \{(l,k) \in \{1 \dots m\} \times \{1 \dots m\} | (A_{21})_{l,k} \neq 0\}$. *Für alle* $(l,k) \in M$ *wird folgender Schritt durchgeführt:*
Räume die k*-te Spalte von* A_{11} *und die* l*-te Zeile von* A_{22} *aus. Bei jeder Zeilenumforung „Addiere a-mal die* $(m+l)$*-te Zeile von* A *zur* i*-ten Zeile von* A*" muss, falls* $l \neq i$ *gilt,*

gleichzeitig die Umformung „Addiere a-mal die $(m+i)$-te Zeile von A zur l-ten Zeile" ausgeführt werden. Bei jeder Spaltenumformung „Addiere a-mal die k-te Spalte von A zur $(m+j)$-ten Spalte von A" muss, falls $k \neq j$ gilt, gleichzeitig die Umformung „Addiere a-mal die j-te Spalte von A zur $(m+k)$-ten Spalte von A" ausgeführt werden. Weiter wird nach jeder Zeilenumformung $b_1 := b \cdot b_1$ gesetzt, wobei b die zugehörige Umformungsmatrix ist. Nach jeder Spaltenumformung wird $b_2 := b_2 \cdot b$ gesetzt, wobei b die entsprechende Umformungmatrix ist.

3. Schritt: A_{11} *„ausräumen"*

Zu Beginn setze $j = 1$.

Sei $(A_{11})_{i,j}$ der letzte Eintrag in der j-ten Spalte, der nicht Null ist. Sind alle Einträge in der j-ten Spalte Null, wird j um eins erhöht und der Schritt wiederholt. Ansonsten wird die j-te Spalte und i-te Zeile von A_{11} mit Hilfe des Eintrags $(A_{11})_{i,j}$ ausgeräumt. Bei jeder Zeilenumforung „Addiere a-mal die i-te Zeile von A zur k-ten Zeile von A" muss gleichzeitig die Umformung „Addiere $(-a)$-mal die $(2m-i)$-te Zeile von A zur $(2m-k)$-ten Zeile" ausgeführt werden. Bei jeder Spaltenumformung „Addiere a-mal die j-te Spalte von A zur k-ten Spalte von A" muss gleichzeitig die Umformung „Addiere $(-a)$-mal die $(2m-j)$-te Spalte von A zur $(2m-k)$-ten Spalte von A" ausgeführt werden. Weiter wird nach jeder Zeilenumformung $b_1 := b \cdot b_1$ gesetzt, wobei b die zugehörige Umformungsmatrix ist. Nach jeder Spaltenumformung wird $b_2 := b_2 \cdot b$ gesetzt, wobei b die entsprechende Umformungmatrix ist. Danach wird j um eins erhöht und der Schritt wiederholt, bis in jeder Spalte von A_{11} höchstens ein Eintrag von Null verschieden ist.

4. Schritt: A_{12} *„ausräumen"*

Sei $M := \{(l,k) \in \{1 \ldots n\} \times \{1 \ldots n\} | (A_{11})_{l,k} \neq 0\}$.

Für alle $(l,k) \in M$ wird folgender Schritt durchgeführt:

Räume die l-te Zeile von A_{12} aus. Bei jeder Spaltenumformung „Addiere a-mal die k-te Spalte von A zur $(m+j)$-ten Spalte von A" muss, falls $k \neq j$ gilt, gleichzeitig die Umformung „Addiere a-mal die j-te Spalte von A zur $(m+k)$-ten Spalte von A" ausgeführt werden. Nach jeder Spaltenumformung wird $b_2 := b_2 \cdot b$ gesetzt, wobei b die entsprechende Umformungmatrix ist.

Sei $N := \{(l,k) \in \{1 \ldots n\} \times \{1 \ldots n\} | (A_{22})_{l,k} \neq 0\}$.

Für alle $(l,k) \in N$ wird folgender Schritt durchgeführt:

Räume die k-te Spalte von A_{12} aus. Bei jeder Zeilenumforung „Addiere a-mal die $(m+l)$-te Zeile von A zur i-ten Zeile von A" muss, falls $l \neq i$ gilt, gleichzeitig die Umformung „Addiere a-mal die $(m+i)$-te Zeile von A zur l-ten Zeile" ausgeführt werden. Nach jeder Zeilenumformung wird $b_1 := b \cdot b_1$ gesetzt, wobei b die entsprechende Umformungmatrix ist.

5. Schritt: *Einträge „normieren"*

Für $i = 1, \ldots, m$ multipliziere die i-te Zeile von A mit $A_{i,j}^{-1}$ und die $i+m$-te Zeile mit $A_{i,j}$,

wobei $A_{i,j}$ der einzige nicht verschwindende Eintrag von A in der i-ten Zeile ist. Weiter setze $d_{i,i} = A_{i,j}$ und $d_{i+m,i+m} = A_{i,j}^{-1}$.
Ausgabe: b_1^{-1}, d, A, b_2^{-1}.

ENDE

Satz 3.18. *Für die in Algorithmus 3.17 ausgegebenen Matrizen gilt:*

a) $b_1, b_2 \in B$

b) $d \in B$

c) $A \in W$.

Beweis. a) Es gilt $b_1 = \tilde{b}_4^1 \cdots \tilde{b}_4^i \cdot \tilde{b}_3^1 \cdots \tilde{b}_3^j \cdot \tilde{b}_2^1 \cdots \tilde{b}_2^k \cdot \tilde{b}_1^1 \cdots \tilde{b}_1^l$, wobei die $\tilde{b}_s^t$ die Umformungsmatrizen im s-ten Schritt sind. Wir zeigen, dass diese in B liegen. Die Matrizen in Schritt 1 haben die Form

$$\begin{pmatrix} A^{-T} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

und die Matrizen in Schritt 3 die Form

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{-T} \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{i,k} & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{i,k} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese liegen nach Bemerkung 3.15 mit $C = 0$ in der $Sp(V)$ und in B. Die Umformungsmatrizen in Schritt 2 und 4 haben die Form

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

mit

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{i,k} & 0 \\ \vdots & & a_{k,i} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese liegen nach Bemerkung 3.15 mit $A = B = I$ in der $Sp(V)$ und in B. Damit liegen b_1 und b_2 in B.

b) Die Behauptung folgt sofort mit Bemerkung 3.15, indem man $A = diag(d_1, \dots, d_n)$, $B = diag(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$ und $C = 0$ setzt.

c) Die Behauptung wird in drei Schritten gezeigt:
<u>1. Schritt:</u> Wir zeigen, dass A nach dem ersten Schritt des Algorithmus die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ w & X_3 \end{pmatrix}$$

hat, wobei in w in jeder Zeile und Spalte höchsten ein Eintrag von Null verschieden ist.
Der Beweis hierzu verläuft analog zu dem Beweis von Satz 2.3. Der einzige Unterschied ist, dass w nicht vollen Rang haben muss.
<u>2. Schritt:</u> Nach dem dritten Schritt hat A folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} p & X \\ w & \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, dass genau dann, wenn in der i-ten Zeile von p ein Eintrag von Null verschieden ist, alle Einträge von w in der i-ten Zeile Null sind. Dies ist äquivalent dazu, dass $p + w \in S_m$ gilt. Nun ist $A \in Sp(V)$. Also gilt

$$A^T J A = J \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -w^T p + p^T w & -w^T X + p^T \tilde{p} \\ -\tilde{p}^T p + X^T w & -\tilde{p}^T X + X^T \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\tilde{p}^T p - X^T w = I$ ist. Nach dem bisherigen Vorgehen ist aber klar, dass in p und in w in jeder Spalte und Zeile nur ein Eintrag von Null verschieden sein kann. Weiter ist $w_{k,i} = 0$ für alle $k \in \underline{m}$, falls $p_{l,i} \neq 0$ für ein $l \in \underline{m}$ gilt. Angenommen es sei $p_{i,k} \neq 0$ und $w_{i,s} \neq 0$. Dann ist aber nach Schritt 2 des Algorithmus $\tilde{p}_{i,-} = 0^{1 \times m}$, also $\tilde{p}^T_{-,i} = 0^{n \times 1}$. Damit folgt, dass $(\tilde{p}^T p)_{k,-} = 0^{m \times 1}$ (*). Da p in jeder Spalte höchstens einen von Null verschiedenen Eintrag enthält, sind in $\tilde{p}^T p$

höchstens $Rang(p)$ Spalten ungleich Null. Mit (*) folgt, dass höchstens $Rang(p)-1$ Spalten von Null verschieden sind. Daraus folgt, dass $Rang(\tilde{p}^T p) < Rang(p)$ gilt. Weiter ist offensichtlich $Rang(X^T w) \leq Rang(w)$, da in jeder Spalte von w nur ein Eintrag von Null verschieden ist. Damit ist aber $Rang(I) = Rang(\tilde{p}^T p + X^T w) \leq Rang(\tilde{p}^T p) + Rang(X^T w) < Rang(p) + Rang(w) = Rang(I)$, was einen Widerspruch darstellt.
<u>3. Schritt:</u> Wir zeigen, dass $\tilde{p}$ aus p hervorgeht, indem man jeden Eintrag invertiert. Analog geht nach dem vierten Schritt X aus w hervor, indem man jeden Eintrag von $-w$ invertiert.

Aus Schritt 2 folgt

$$I = (\tilde{p}^T p - X^T w)_{-,i} = \begin{cases} (\tilde{p}^T p)_{-,i} & p_{i,-} \neq 0 \\ (X^T w)_{-,i} & w_{i,-} \neq 0 \end{cases} .$$

Nun erhält man für $\tilde{p}$ und X folgende Bedingungen: Sei $p_{k,l} \neq 0$. Dann gilt $\tilde{p}^T p_{-,l} = e_l$. Daraus folgt, dass $(\tilde{p}^T)_{-,k} = a \cdot e_l$ bzw. $\tilde{p}_{k,-} = a \cdot e_l^T$ mit $a \in K^*$ gilt. Genauer ist a das Inverse zu dem von Null verschiedenen Eintrag in der k-ten Zeile von p. Weiter sind alle anderen Zeilen von $\tilde{p}$ nach Schritt 2 Null. Dies ändert sich nicht. Ansonsten wiederhole Schritt 2. Dabei verändert sich nur X. Also erhält man $\tilde{p}$ aus p, indem man alle Einträge invertiert. Die gleiche Argumentation liefert für X, dass man nach Schritt 4 X aus w erhält, indem man die Einträge aus $-w$ invertiert. A ist also Monomialmatrix.
<u>4. Schritt:</u> Wir zeigen nun, dass A, welches im Algorithmus ausgegeben wird, in der Weyl-Gruppe W liegt. Da die Umformungsmatrizen alle aus der $Sp(V)$ waren, ist A und damit auch A^T nach dem fünften Schritt Element der $SP(V)$. Weiter gilt offensichtlich $A^T \cdot e_i \in \{e_j | j = 1 \ldots, m\} \cup \{f_j | j = 1, \ldots, m\}$. Nun ist aber $\beta(A^T e_i, A^T f_i) = \beta(e_i, f_i) = 1$. Daraus ergibt sich sofort, dass $A^T f_i \in f_j + \langle e_j \rangle^\perp$ oder $A^T f_i \in -e_j + \langle f_j \rangle^\perp$ gilt, je nachdem ob $A^T e_i = e_j$ oder $A^T e_i = f_j$ ist. Da A^T Monomialmatrix ist, folgt damit aber, dass $A^T f_i = f_j$ oder $A^T f_i = -e_j$ für ein $j \in \underline{m}$ ist. Dann ist $A^T \in W$ und damit auch $A \in W$. Alternativ hat man im Beweis zu Schritt 2 gesehen, dass die Einträge in $\tilde{p}$ und X die Inversen der Einträge aus p und w sind.

□

Beispiele 3.19. *Gauß-Bruhat Algorithmus für*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in Sp(6,7).$$

1. Schritt:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Umformungsmatrizen für den ersten Schritt:

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Umformungsmatrizen für ersten und zweiten Schritt:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \tilde{b}_2$$

Die weiteren Schritte sind in diesem Beispiel nicht notwendig. Damit erhält man folgende Gauß-Bruhat Zerlegung von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.20. *Man erhält die Gauß-Bruhat Zerlegung von $A \in Sp(V)$ bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_m, f_m, \ldots, f_1)$, indem man den Algorithmus 3.17 auf die Matrix, welche sich aus der Konjugation von A mit der Basiswechselmatrix*

$$\begin{pmatrix} id_m & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

ergibt, anwendet. Danach muss man die Ausgabematrizen mit der selben Matrix konjugieren.

3.3 Beweis der BN-Paar Axiome

Um die anderen BN-Paar Axiome zu zeigen, wollen wir nun wieder in der alten Basis rechnen. Im Folgenden sei die symplektische Basis $\{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m\}$ von V folgendermaßen zur Basis $B := (e_1, \dots, e_n, f_n \dots, f_1)$ angeordnet. Dann hat J bzgl. B die Form

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } Q := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter bezeichne im ganzen Abschnnitt $B' = B_{GL(V)}$, $N' = N_{GL(V)}$ und $W' = W_{GL(V)}$. Für ein $\beta \in \underline{2m}^{2m}$ sei $C(\beta)$ wie in Definition 2.8.

Lemma 3.21. *Es gilt $Sp(V) = BNB$.*

Beweis. Folgt direkt aus Bemerkung 3.20 $\square$

Lemma 3.22. *Sei $w \in W, n \in N$, $w = nH$ und $\beta \in \underline{2m}^{2m}$ mit $n \in C(\beta)$. Dann ist $BwB = C(\beta) \cap Sp(V)$.*

Beweis. Es ist $BwB \subseteq B'wB' = C(\beta)$. Andererseits ist jedes $A \in C(\beta) \cap Sp(V)$ nach Satz 3.17 von der Form $A = b_1 w b_2$ mit $b_1, b_2 \in B \subseteq B'$. Damit ist aber $A \in BwB$. $\square$

Lemma 3.23. *Es gilt für $n \in N$ und $w_i = n_i H$ für alle $i \in I$*

$$n_i B n \subseteq (B n_i n B) \cup (BnB).$$

Beweis. Es ist $n_i B n = n_i B' n \cap Sp(V)$ und $(B n_i n B) \cup (BnB) = (B' n_i n B') \cup (B' n B') \cap Sp(V)$. Mit Satz 2.24 folgt die Behauptung sofort. $\square$

Satz 3.24. *Die Gruppen B und N bilden ein BN-Paar der $Sp(V)$.*

Beweis. Die Axiome folgen sofort aus Lemma 3.21, 3.13 und 3.23. $\square$

3.4 Thomas-Zerlegung der Sp(V)

In diesem Abschnitt wird eine Thomas-Zerlegung für die $Sp(V)$ angegeben. Das zentrale Ergebnis ist, dass die Mengen $C(\beta) \cap Sp(V)$ durch einfache Systeme vom Grad 1 beschrieben werden können, wobei $C(\beta)$ eine Zelle der $GL(V)$ ist. Zunächst wird die Gruppe $Sp(V)$ durch Gleichungen beschrieben.

Definition 3.25. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist für $1 \leq l \leq 2m$ und $l < s \leq 2m$ das Polynom $p(l,s) \in K[x_{1,1}, \dots, x_{2m,2m}]$ definiert durch*

$$p(l,s) = \sum_{k=1}^{2m} \alpha(k) x_{(2m-k+1),l} x_{k,s} + \delta_{(2m-s+1,l)}.$$

Dabei ist

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \quad \textit{und } \alpha(k) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } k \leq m \\ -1 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

Lemma 3.26. *Sei V ein $2m$-dimensionaler symplektischer K-Vektorraum mit der symplektischen Basis $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$. Bezüglich der Basis $(e_1, \dots, e_m, f_m, \dots, e_1)$ ist genau dann $X = (x_{i,j})_{i,j \in \underline{2m}} \in Sp(V)$, wenn für $1 \leq l \leq 2m$ und $l < s \leq 2m$ die Gleichungen*

$$p(l, s) = 0$$

erfüllt sind.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt, indem man $X^{tr} JX - J$ mit

$$X^{tr} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{m,1} & x_{m+1,1} & \dots & x_{2m,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,m} & \dots & x_{m,m} & x_{m+1,m} & \dots & x_{2m,m} \\ x_{1,m+1} & \dots & x_{m,m+1} & x_{m+1,m+1} & \dots & x_{2m,m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,2m} & \dots & x_{m,2m} & x_{m+1,2m} & \dots & x_{2m,2m} \end{pmatrix}$$

und

$$JX = \begin{pmatrix} x_{2m,1} & \dots & x_{2m,m} & x_{2m,m} & \dots & x_{2m,2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,m} & x_{m+1,m+1} & \dots & x_{m+1,2m} \\ -x_{m,1} & \dots & -x_{m,m} & -x_{m,m+1} & \dots & -x_{m,2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1,1} & \dots & -x_{1,m} & -x_{1,m+1} & \dots & -x_{1,2m} \end{pmatrix}$$

berechnet und jeden Eintrag gleich Null setzt. Des Weiteren nutzt man aus, dass $(X^{tr} JX - J)^{tr} = -(X^{tr} JX - J)$ gilt. Deshalb verschwinden die Diagonaleinträge und die Einträge unterhalb der Diagonalen liefern die selben Einträge wie die Einträge oberhalb der Diagonalen. □

Ordnet man die Variablen in der Reihenfolge $x_{2m,1}, \dots, x_{2m,2m}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,2m}$, dann ist $x_{k,s}$ die führende Variable in der Gleichung $p(l, s) = 0$ mit Koeffizient $\alpha(k)x_{(m-k+1),l}$. Man sieht, dass für festes $s \in \{1, \dots, 2m\}$ die Gleichungen $p(l, s) = 0$ jeweils die gleichen Variablen $x_{k,s}$ für $k \in \{1, \dots, 2m\}$ festlegen können. Das bedeutet, dass ein System E von Gleichungen der Form $p(l, s) = 0$ in ein einfaches System umgeformt werden kann, indem man separat die Systeme $E(s_i)$, welche aus den Gleichungen der Form $p(l, s_i) = 0$ bestehen, betrachtet. Dies veranlasst uns zu folgender Definition.

Definition 3.27. *Für $2 \leq s \leq 2m$ sei folgendes System definiert:*

$$E(s) := \bigcup_{l=1}^{s-1} \{p(l,s)\}.$$

Im Folgenden werden die Systeme $E(s)$ untersucht. Dafür werden zunächst einige Hilfsmittel benötigt. An dieser Stelle sei an das Schur Komplement erinnert. Es wird benötigt, um das folgende Lemma zu beweisen.

Satz 3.28 (Schur-Komplement)**.** *Sei $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ und $det(A_{11}) \neq 0$. Weiter sei $A/A_{11} := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ das* Schur-Komplement *von A_{11} in A. Dann ist*

$$\det(A) = \det(A_{11})\det(A/A_{11}).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

□

Das folgende Lemma wird benötigt, um die Thomas-Zerlegung der $Sp(V)$ herzuleiten.

Lemma 3.29. *Sei $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Weiter sei $M_{(i,j)}$ die Matrix, welche aus M durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Außerdem sei $X = (M_{(n,n)})_{(n-1,n-1)}$. Dann gilt*

$$\det(X)\det(M) = \det(M_{(n,n)})\det(M_{(n-1,n-1)}) - \det(M_{(n-1,n)})\det(M_{(n,n-1)}).$$

Beweis. Sei

$$w_1^{tr} = (M_{n-1,1}, \ldots, M_{n-1,n-2}), w_2^{tr} = (M_{n,1}, \ldots, M_{n,n-2}),$$

$v_1^{tr} = (M_{1,n-1}, \ldots, M_{n-2,n-1})$ und $v_2^{tr} = (M_{1,n}, \ldots, M_{n-2,n})$, also

$$M = \begin{pmatrix} X & v_1 & v_2 \\ w_1^{tr} & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ w_2^{tr} & M_{n,n-1} & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$

<u>1.Fall:</u> $\det(X) \neq 0$
Es ist

$$\det(X)^{-1}\det(M_{(n,n)}) = \det\left[\begin{pmatrix} X & v_1 \\ w_1^{tr} & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} \mathrm{id} & v_1 \\ w_1^{tr}X^{-1} & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz oder Satz 3.28 ist dann

$$\det(X)^{-1}\det(M_{(n,n)}) = (-1)^n \left(M_{n-1,n-1} - w_1^{tr}X^{-1}v_1\right)$$

und analog

$$\begin{aligned}
\det(X)^{-1}\det(M_{(n,n-1)}) &= (-1)^n \left(M_{n-1,n} - w_1^{tr}X^{-1}v_2\right), \\
\det(X)^{-1}\det(M_{(n-1,n)}) &= (-1)^n \left(M_{n,n-1} - w_2^{tr}X^{-1}v_1\right), \\
\det(X)^{-1}\det(M_{(n-1,n-1)}) &= (-1)^n \left(M_{n,n} - w_2^{tr}X^{-1}v_2\right).
\end{aligned}$$

Damit ist dann aber

$$\begin{aligned}
& \det(M_{(n,n)}M_{(n-1,n-1)}) - \det(M_{(n-1,n)}M_{(n,n-1)}) \\
= & -\det(X)^2 \det \begin{pmatrix} M_{n-1,n-1} - w_1^{tr}X^{-1}v_1 & M_{n,n-1} - w_2^{tr}X^{-1}v_1 \\ M_{n,n-1} - w_1^{tr}X^{-1}v_2 & M_{n,n} - w_2^{tr}X^{-1}v_2 \end{pmatrix} \\
= & -\det(X)\det(X)\det\left(S - W^{tr}X^{-1}V\right)
\end{aligned}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ M_{n-1,n} & M_{n,n} \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \text{ und } W^{tr} = \begin{pmatrix} w_2^{tr} \\ w_1^{tr} \end{pmatrix}.$$

$S - W^{tr}X^{-1}V$ ist aber das Schurkomplement von X in der Matrix

$$\begin{pmatrix} X & V \\ W^{tr} & S \end{pmatrix}.$$

Damit gilt nach Satz 3.28

$$\det(X)\det(S - W^{tr}X^{-1}V) = \det \begin{pmatrix} X & V \\ W^{tr} & S \end{pmatrix}.$$

2.Fall: $\det(X) = 0$.
Falls $\mathrm{Rg}(X) < n-3$, ist die Behauptung sofort klar, da dann alle Teilmatrizen auch nicht vollen Rang haben können. Sei also $\mathrm{Rg}(X) = n-3$. Weiter sei X_k die Matrix, die durch Streichen der k-ten Zeile aus X hervorgeht. Außerdem sei o.B.d.A. die letzte Zeile von X eine Nullzeile. Ansonsten ersetzt man X durch RX und v_i durch Rv_i, sodass RX eine Nullzeile in der letzten Zeile hat. Dann ist

$$\det(M_{(n,n)}) = (-1)^{n+n}(v_1)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\det(M_{(n-1,n)}) = (-1)^{n+n}(v_1)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_2 \end{pmatrix},$$

$$\det(M_{(n,n-1)}) = (-1)^{n+n}(v_2)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(M_{(n-1,n-1)}) = (-1)^{n+n}(v_2)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} & \det(M_{(n,n)}M_{(n-1,n-1)}) - \det(M_{(n-1,n)}M_{(n,n-1)}) \\ = \quad & (v_1)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_1 \end{pmatrix} (v_2)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_2 \end{pmatrix} - (v_2)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_1 \end{pmatrix} (v_1)_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ w_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Definition 3.30. *Sei $\beta \in \underline{2m}^{2m}$ mit $C(\beta) \neq \emptyset$ und $\sigma_i = 2m + 1 - \beta_i$ für $1 \leq i \leq 2m$. Dann definieren wir für ein $1 < s \leq 2m$ und $\rho \leq l < s$ das Polynom*

$$p_{\rho,l,s} = \alpha(i) \sum_{i \notin \{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\rho-1}\}} x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\rho-1}, i; 1, \ldots, \rho - 1, l) x(2m + 1 - \sigma_i, s).$$

Satz 3.31. *Sei $C(\beta)$ eine Zelle der Thomas-Zerlegung der $GL(2m, K)$, die der Lösung des einfachen Systems (E, U, K) entspricht. Weiter sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2m}$ so gewählt, dass $\beta_i = 2m + 1 - \sigma_i$ für alle $i \in \underline{m}$ gilt. Also entsprechen die Positionen (σ_i, i) den $\bullet$ Einträgen in der Matrix $\Sigma(\beta)$. Dann ist für alle $s \in \underline{2m}$ das System $(\tilde{E}, U, K)$ mit $\tilde{E} = E \cup E(s)$ für jedes $r \in \underline{s-1}$ äquivalent zu dem System $(G_r(s), U, K)$, wobei $G_r(s) = E \cup \bar{E}_r(s)$ und die Elemente von $\bar{E}(s)$ gegeben sind durch:*

$$\bar{E}_r(s) = \left(\bigcup_{\rho=1}^{r} \{p_{\rho,\rho,s} + R_{r,\rho,s}\} \right) \cup \left(\bigcup_{l=r+1}^{s-1} \{p_{r,l,s} + R_{r,l,s}\} \right)$$

mit $R_{r,j,s} \in Quot(K[x_{1,1}, \ldots, x_{n,1}, \ldots, x_{1,s-1}, \ldots, x_{n,s-1}])$. Weiter gilt folgende Rekursionsformel:

$$R_{1,i,s} = 0 \text{ für } i \neq 2m + 1 - s \ , \ R_{1,2m+1-s,s} = 1$$

und

$$R_{r,l,s} = \begin{cases} R_{r-1,l,s}, & l < r \\ \frac{x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1};1,\ldots,r-1)R_{r-1,l,s} - x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1};1,\ldots,r-2,l)R_{r-1,r-1,s}}{x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-2};1,\ldots,r-2)}, & l \geq r \end{cases}.$$

Beweis. Beweis mit Induktion über r. Für $r = 1$ erhalten wir das System $E(s)$ und die Behauptung folgt sofort. Sei nun $r < s - 1$ und das System $(\tilde{E}, U, K)$ äquivalent zum System $(G_r(s), U, K)$. Da $x(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; 1, \ldots, r) \in U$, gilt $x(\sigma_1, \ldots, \sigma_r; 1, \ldots, r) \neq 0$. Also kann $\bar{E}_r(s)$ durch

$$Q_r(s) = \left(\bigcup_{\rho=1}^{r}\{p_{\rho,\rho,s} + R_\rho\}\right) \cup \left(\bigcup_{l=r+1}^{s-1}\{x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r;1,\ldots,r)(p_{r,l,s}+R_l)\}\right)$$

ersetzt werden. Nun kann man die Gleichung $p_{r,r}+R_r = 0$ nach $x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r;1,\ldots,r)x(2m+1-\sigma_r,s)$ auflösen und in die Gleichungen $x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r;1,\ldots,r)(p_{r,l,s}+R_l) = 0$ für $l = r+1,\ldots,s-1$ einsetzen. Dann erhält man in der Gleichung $x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r;1,\ldots,r)(p_{r,l,s}+R_l) = 0$ für $x_{2m+1-i,s}$ mit $i \notin \{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\}$ den Koeffizienten

$$\begin{aligned} &x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r;1,\ldots,r)x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1},i;1,\ldots,r-1,l) \\ &\qquad\qquad - x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1},i;1,\ldots,r)x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r,1,\ldots,r-1,l). \end{aligned}$$

Dieser ist aber nach Lemma 3.29

$$x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1};1,\ldots,r-1)x(\sigma_1,\ldots,\sigma_r,i;1,\ldots,r,l).$$

Nachdem man durch $x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1};1,\ldots,r-1)$ geteilt hat, folgt die Behauptung. □

Nun wollen wir die Terme $R_{r,i,s}$ für $2 \leq s \leq 2m$ und $i,r \in \underline{s-1}$ untersuchen. Wir werden sehen, dass diese sogar in $K[x_{1,1},\ldots,x_{n,1},\ldots,x_{1,s-1},\ldots,x_{n,s-1}]$ liegen. Dazu wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma 3.32. *Sei $X \in K^{(n+1)\times n}, v^1,v^2,v^3 \in K^{n+1}, w^{tr} \in K^n$ und $u_1,u_2,u_3 \in K$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} X & v^3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} X & v^1 & v^2 \\ w & u_1 & u_2\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X & v^2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} X & v^1 & v^3 \\ w & u_1 & u_3\end{pmatrix}& \\ = -\det\begin{pmatrix} X & v^1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} X & v^2 & v^3 \\ w & u_2 & u_3\end{pmatrix}&. \end{aligned}$$

Beweis. Falls X nicht vollen Rang hat, folgt die Behauptung sofort. Sei also $\mathrm{Rg}(X) = n$. Weiter sei o.B.d.A. $X = \begin{pmatrix}\mathrm{id}_n \\ 0\end{pmatrix}$. Ansonsten multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\det(R)^2$, wobei $RX = \begin{pmatrix}\mathrm{id}_n \\ 0\end{pmatrix}$ und ersetzen v^i durch Rv^i.

Dann ist $\det\begin{pmatrix} X & v^i\end{pmatrix} = v_{n+1}$ für $i \in \underline{3}$ und nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz (n+1-te Zeile)

$$\det\begin{pmatrix} X & v^i & v^j \\ w & u_i & u_j\end{pmatrix} = v^i_{n+1}(u_j - w\cdot\bar{v}^j) - v^j_{n+1}(u_i - w\cdot\bar{v}^i) \text{ für } 1 \leq i < j \leq 3,$$

wobei $(\bar{v}^k)^{tr} := (v_1^k, \dots, v_n^k)$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} X & v^3 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X & v^1 & v^2 \\ w & u_1 & u_2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X & v^2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X & v^1 & v^3 \\ w & u_1 & u_3 \end{pmatrix} \\
=& v_{n+1}^3[v_{n+1}^1(u_2 - w \cdot \bar{v}^2) - v_{n+1}^2(u_1 - w \cdot \bar{v}^1)] - v_{n+1}^2[v_{n+1}^1(u_3 - w \cdot \bar{v}^3) - v_{n+1}^3(u_1 - w \cdot \bar{v}^1)] \\
=& v_{n+1}^1[v_{n+1}^3(u_2 - w \cdot \bar{v}^2) - v_{n+1}^2(u_3 - w \cdot \bar{v}^3)] \\
=& -\det\begin{pmatrix} X & v^1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} X & v^2 & v^3 \\ w & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.33. *Sei $R_{r,i,s}$ für $2 \leq s \leq 2m$ und $i, r \in \underline{s-1}$ der in $\bar{E}_r(s)$ auftretende Term aus obigem Satz. Dann gilt:*

$$\forall r \in \underline{2m+1-s} : R_{r,i,s} = \begin{cases} 0 & i \neq 2m+1-s \\ x(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}; 1, \dots, r-1) & i = 2m+1-s \end{cases}$$

und

$$\forall r \in \{2m+2-s, \dots, s-1\} :$$

$$R_{r,i,s} = \begin{cases} 0 & i < 2m+1-s \\ x(\sigma_1, \dots, \sigma_{2m-s}; 1, \dots, 2m-s) & i = 2m+1-s \\ (-1)^{(s+1-i)} x(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}; 1, \dots, 2m-s, 2m+2-s, \dots, i) & 2m+1-s < i \leq r \\ (-1)^{(s+1-r)} x(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}; 1, \dots, 2m-s, 2m+2-s, \dots, r-1, i) & r < i < s \end{cases},$$

wobei die Determinante der leeren Matrix 1 sein soll.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die hier angegebenen $R_{r,l,s}$ die Rekursionsgleichung aus Satz 3.31 erfüllen.

<u>1. Fall:</u> $l < r$

Nach Satz 3.31 ist zu zeigen, dass $R_{r,l,s} = R_{r-1,l,s}$ gilt.

<u>Fall 1.1:</u> $r \leq 2m+1-s$. Dann folgt $r-1 \leq 2m+1-s$.

Dann ist $R_{r,l,s} = 0 = R_{r-1,l,s}$, da $l < 2m+1-s$ und insbesondere $l \neq 2m+1-s$ gilt. Folglich ist die Rekursionsgleichung erfüllt.

<u>Fall 1.2:</u> $r > 2m+1-s$

<u>Fall 1.2.1:</u> $r-1 > 2m+1-s$

Es gilt $l \leq r-1$ und somit gilt $R_{r,l,s} = R_{r-1,l,s}$, da r in diesem Fall in der Berechnung von $R_{r,l,s}$ und $R_{r-1,l,s}$ nicht auftritt. Damit ist die Rekursionsgleichung erfüllt. Sei also $l = r$ und damit $l > r-1$. Dann ist $R_{r,l,s} = (-1)^{(s+1-l)} x(\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}; 1, \dots, 2m-s, 2m+2-s, \dots, l) = (-1)^{(s+1-r)} x(\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}; 1, \dots, 2m-s, 2m+2-s, \dots, r-1, l) = R_{r-1,l,s}$ und die Rekursionsgleichung erfüllt.

Fall 1.2.2: $r-1=2m+1-s$

Nun müssen die einzelnen Fälle für l geprüft werden. Falls $l<2m+1-s$ ist, gilt $R_{r,l,s}=0$. Weiter ist dann auch $l\neq 2m+1-s$ und somit $R_{r-1,l,s}=0$ und die Rekursionsgleichung erfüllt. Ist $l=2m+1-s$, so ist $R_{r,l,s}=R_{r-1,l,s}=x(\sigma_1,\dots,\sigma_{2m-s};1,\dots,2m-s)$ und die Rekursionsgleichung erfüllt.

2. Fall: $l\geq r$

Nach Satz 3.31 ist zu zeigen, dass

$$R_{r,l,s}=\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)R_{r-1,l,s}-x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-2,l)R_{r-1,r-1,s}}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}$$

gilt.

Fall 2.1: $l<2m+1-s$

Dann sind auch $r,r-1<2m+1-s$. Damit ist insbesondere $R_{r-1,l,s}=0$ und $R_{r-1,r-1,s}=0$ und somit ist auch die Rekursionsformel erfüllt, da dann

$$R_{r,l,s}=\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)\cdot 0-x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-2,l)\cdot 0}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}=0$$

gilt.

Fall 2.2: $l=2m+1-s$

Dann ist auch $r\leq 2m+1-s$ und $r-1<2m+1-s$. Damit ist insbesondere

$$R_{r-1,l,s}=x(\sigma,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)$$

und $R_{r-1,r-1,s}=0$ und somit ist auch die Rekursionsformel erfüllt, da dann

$$\begin{aligned}R_{r,l,s}=&\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)\cdot x(\sigma,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}\\&-\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-2,l)\cdot 0}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}=x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)\end{aligned}$$

gilt.

Fall 2.3: $2m+1-s<l$

Fall 2.3.1: $r\leq 2m+1-s$

Dann ist auch $r-1\leq 2m+1-s$ und $l\neq 2m+1-s$. Damit ist insbesondere $R_{r-1,l,s}=0$ und $R_{r-1,r-1,s}=0$ und somit ist auch die Rekursionsformel erfüllt, da dann

$$R_{r,l,s}=\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)\cdot 0-x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-2,l)\cdot 0}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}=0$$

gilt.

Fall 2.3.2: $r = 2m+2-s$
Dann ist $r-1 = 2m+1-s$ und $l \neq 2m+1-s$. Damit ist insbesondere $R_{r-1,l,s} = 0$ und

$$R_{r-1,r-1,s} = x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-2}; 1, \ldots, r-2).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} R_{r,l,s} &= 0 - \tfrac{x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1};1,\ldots,r-2,l) \cdot x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-2};1,\ldots,r-2)}{x(\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-2};1,\ldots,r-2)} \\ &= (-1)^{2m+2+1-s} x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}; 1, \ldots, r-2,). \end{aligned}$$

Fall 2.3.2: $r > 2m+2-s$
Dann ist auch $r-1 > 2m+1-s$. Somit ist

$$R_{r-1,l,s} = (-1)^{(s-r)} x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-2}; 1, \ldots, 2m-s, 2m+2-s, \ldots, r-2, l)$$

und

$$R_{r-1,r-1,s} = (-1)^{(s-r)} x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-2}; 1, \ldots, 2m-s, 2m+2-s, \ldots, r-2, r-1).$$

Wir setzen

$$X := \begin{pmatrix} x_{\sigma_1,1} & \ldots & x_{\sigma_1,2m-s} & x_{\sigma_1,2m+2-s} & \ldots & x_{\sigma_1,r-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{\sigma_{r-2},1} & \ldots & x_{\sigma_{r-2},2m-s} & x_{\sigma_{r-2},2m+2-s} & \ldots & x_{\sigma_{r-2},r-2} \end{pmatrix},$$

$$(v^1)^{tr} := (x_{\sigma_1,2m+1-s}, \ldots, x_{\sigma_{r-2},2m+1-s}), (v^2)^{tr} := (x_{\sigma_1,r-1}, \ldots, x_{\sigma_{r-2},r-1}),$$

$$(v^3)^{tr} := (x_{\sigma_1,l}, \ldots, x_{\sigma_{r-2},l}), w := (x_{\sigma_{r-1},1}, \ldots, x_{\sigma_{r-1},2m-s}, x_{\sigma_{r-1},2m+2-s}, \ldots, x_{\sigma_{r-1},r-2})$$

und

$$u_1 := x_{\sigma_{r-1},2m+1-s}, u_2 := x_{\sigma_{r-1},r-1}, u_3 := x_{\sigma_{r-1},l}.$$

Dann ist mit Lemma 3.32

$$
\begin{aligned}
&\frac{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-1)R_{r-1,l,s}-x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,r-2,l)R_{r-1,r-1,s}}{x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-2};1,\dots,r-2)}\\
&=(-1)^{(s-r)}\frac{\det\begin{pmatrix}X & v^3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}X & v^1 & v^2\\ w & u_1 & u_2\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}X & v^2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}X & v^1 & v^3\\ w & u_1 & u_3\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}X & v^1\end{pmatrix}}\\
&=(-1)^{(s+1-r)}\det\begin{pmatrix}X & v^2 & v^3\\ w & u_2 & u_3\end{pmatrix}\\
&=(-1)^{(s+1-r)}x(\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1};1,\dots,2m-s,2m+2-s,\dots,r-1,l)\\
&=R_{r,l,s}.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 3.34. *Für $2 \le s \le 2m$ und $1 \le r,l < s$ ist $R_{r,l,s} \in K[x_{n,1},\dots,x_{1,1},\dots,x_{n,n-1},\dots,x_{1,n-1}]$.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 3.33 □

Nun haben wir alle Grundlagen, um das Hauptresultat dieses Kapitels zu beweisen.

Definition 3.35. *Sei $\beta \in \underline{2m}^{2m}$ mit $C(\beta) \neq \emptyset$ und $\sigma_i = \beta_{2m+1-i}$ für $1 \le i \le 2m$. Weiter sei $C(\beta)$ die Lösung des einfachen Systems $V(E,U;K)$ aus der Thomas-Zerlegung der $GL(V)$. Dann definieren wir für ein $1 < s \le 2m$ und $1 \le \rho < s$ das Polynom*

$$\tilde{p}_{\rho,s} = \sum_{\substack{i\notin\{\sigma_1,\dots,\sigma_{\rho-1}\},\\ i\le\sigma_\rho}} \alpha(i)x(\sigma_1,\dots,\sigma_{\rho-1},i;1,\dots,\rho)x(2m+1-i,s) + R_{s-1,\rho,s}.$$

Weiter sei

$$U_{Sp} := \bigcup_{i=1}^{m}\{x(\sigma_1,\dots,\sigma_i;1\dots,i)\},$$

$$\bar{E}_{Sp} := E \cup \bigcup_{s=2}^{2m}\bigcup_{r=1}^{s-1}\{\tilde{p}_{r,s}\}$$

und

$$E_{Sp} := E_{red} \cup \bigcup_{s=2}^{2m}\bigcup_{r=1}^{s-1}\{\tilde{p}_{r,s}\},$$

wobei E_{red} aus E hervorgeht, indem man alle Gleichungen weglässt, die durch einen 0 Eintrag in $\Sigma(\beta)$ mit den Koordinaten $(2m+1-\sigma_i, j)$ für $1 \le i < j \le 2m$ entstehen.

Satz 3.36. *Sei $C(\beta)$ eine Zelle der Thomas-Zerlegung der $GL(2m,K)$, die der Lösung des einfachen Systems $V(E,U;K)$ entspricht. Weiter sei $\sigma_i = \beta_{2m+1-i}$ für $1 \le i \le 2m$. Also entsprechen die Positionen (σ_i, i) den • Einträgen in der Matrix $\Sigma(\beta)$. Dann ist* *das System $(\tilde{E}, U; K)$ mit $\tilde{E} = E \cup \bigcup_{s=2}^{2m} E(s)$ äquivalent zu dem System $(E_{Sp}, U_{Sp}; K)$. Weiter ist $(E_{Sp}, U_{Sp}; K)$ ein einfaches System vom Grad 1 und es gilt $V(E_{Sp}, U_{Sp}; K) = C(\beta) \cap Sp(V)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Äquivalenz beider Systeme. Nach Satz 3.31 ist $(\tilde{E}, U; K)$ äquivalent zu dem System $(\bigcup_{s=2}^{2m} G_{s-1}(s), U; K)$. Man erhält aber $\bar{E}_{Sp}$ aus $\bigcup_{s=2}^{2m} G_{s-1}(s)$, indem man lediglich in allen Gleichungen die Summanden weglässt, bei denen der Koeffizient in E liegt. Daraus folgt, dass $(\tilde{E}, U; K)$ zu $(\bar{E}_{Sp}, U; K)$ äquivalent ist. Nun ist zu zeigen, dass die Ungleichungen in $U \backslash U_{Sp}$ weggelassen werden können. Wir beweisen mit vollständiger Induktion über k, dass $(\tilde{E}_{\leq x_{1,k}}, U_{\leq x_{1,k}}; K)$ zu $((\bar{E}_{Sp})_{\leq x_{1,k}}, (U_{Sp})_{\leq x_{1,k}}; K)$ äquivalent ist. Dies ist für $k = 1, \ldots, m$ sofort klar. Wir zeigen nun den Schritt von m nach $m+1$. Es ist zu zeigen, dass $x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+1}; 1 \ldots, m+1) \neq 0$ für alle Lösungen von $((\bar{E}_{Sp})_{\leq x_{1,m+1}}, (U_{Sp}); K)$. Bestimmt man aus den Gleichungen $(E_{Sp})_{\leq x_{1,m}}$ und $(U_{Sp})_{\leq x_{1,m}}$ die Variablen $x_{2m,1}, \ldots, x_{1,1}, \ldots, x_{2m,m}, \ldots, x_{1,m}$, so sind die Vektoren $v_i = x_{2m,i}, \ldots, x_{1,i}$ für $i = 1, \ldots, m$ für jede Lösung linear unabhängig und paarweise orthogonal. Also existieren nach Lemma 3.8 für jede Lösung von $((\bar{E}_{Sp})_{\leq x_{1,m}}, (U_{Sp})_{\leq x_{1,m}}; K)$ Vektoren $w_1, \ldots, w_m$, die $v_1, \ldots, v_m$ zu einer symplektischen Basis ergänzen. Durch Lösen von $((\bar{E}_{Sp})_{\leq x_{1,m+1}}, U_{Sp}; K)$ erhält man alle Möglichkeiten für w_m. Deshalb lässt sich jede Lösung des Systems $((\bar{E}_{Sp})_{\leq x_{1,m+1}}, U_{Sp}; K)$ zu einer symplektischen Matrix ergänzen. Da aber w durch $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ bereits festgelegt ist, muss für $x(\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+1}; 1, \ldots, m+1) \neq 0$ gelten. Für die weiteren Ungleichungen betrachtet man $\langle v_k, \ldots, v_m, w_m, \ldots, w_k \rangle^{\perp}$ und argumentiert analog. Als nächstes zeigen wir, dass $(\bar{E}_{Sp}, U_{Sp}; K)$ zu $(E_{Sp}, U_{Sp}; K)$ äquivalent ist. Es gilt offensichtlich $V(\bar{E}_{Sp}, U_{Sp}; K) \subseteq V(E_{Sp}, U_{Sp}; K) \subseteq Sp(V)$. Angenommen es gilt $V(\bar{E}_{Sp}, U_{Sp}; K) \neq V(E_{Sp}, U_{Sp}; K)$. Sei

$$A \in V(E_{Sp}, U_{Sp}; K) \backslash V(\bar{E}_{Sp}, U_{Sp}; K).$$

Dann muss aber A in einer Nebenklasse $C(\tilde{\beta})$ von $GL(V)$ liegen. Dabei muss bei $\Sigma(\tilde{\beta})$ in einem 0 Eintrag von $\Sigma(\beta)$ mit Koordinaten $(2m+1-\sigma_i, j)$ für $1 \leq i < j < 2m+1-i$ ein $\bullet$ stehen. Dann ist aber $\Sigma(\tilde{\beta}) \cap Sp(V) = \emptyset$, was einen Widerspruch darstellt. Damit ist die Äquivalenz gezeigt. Man sieht sofort, dass $M \in V(\tilde{E}, U; K)$ genau dann gilt, wenn $M \in Sp(V) \cap C(\beta)$. Es fehlt noch die letzte Behauptung, dass $(E_{Sp}, U_{Sp}; K)$ ein einfaches System vom Grad 1 ist. Man sieht sofort, dass $x_{2m+1-\sigma_r,s}$ die führenden Variablen von $\tilde{p}_{r,s}$ ist. Alle Ungleichungen und Gleichungen, die diese Variable als führende Variable haben, wurden entfernt. $\square$

Literatur

[1] Wilhelm Plesken. Gauss-Bruhat decomposition as an example of Thomas decomposition. *Arch. Math. (Basel)*, 92(2):111–118, 2009.

[2] D.E. Taylor. *The geometry of the classical groups*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1992.