

Spiegelungsgruppen

Wir wollen uns einen Sonderfall von Gruppen anschauen, für die der Invariantenring eine besonders schöne Struktur hat, nämlich ein Polynomring ist.

Diese speziellen Gruppen sind Spiegelungsgruppen.

Definition Eine Matrix $\pi \in GL_n(\mathbb{C})$ heißt **Spiegelung** genau dann, wenn genau einer ihrer Eigenwerte (unter Berücksichtigung der Vielfachheit) ungleich 1 ist. Eine endliche Matrixgruppe G heißt **Spiegelungsgruppe**, wenn sie von Spiegelungen erzeugt werden kann.

Wir wollen uns mit dem Invariantenring einer solchen Gruppe beschäftigen. Eine Aussage über die Struktur eines solchen Invariantenrings gibt der folgende Satz:

Shephard-Todd-Chevalley-Theorem Der Invariantenring $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ einer endlichen Matrixgruppe $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ wird von n algebraisch unabhängigen homogenen Invarianten erzeugt
 $\Leftrightarrow G$ ist eine Spiegelungsgruppe.

Um diesen Satz zu beweisen wollen wir uns zwei Hilfsaussagen anschauen.

Für die Rückrichtung wird die folgende Proposition dabei helfen, zu zeigen, dass der Invariantenring $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ einer Spiegelungsgruppe $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ eben von genau n algebraisch unabhängigen homogenen Invarianten erzeugt wird.

Proposition Sei $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ eine Spiegelungsgruppe. Seien weiter $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{C}[x]$ homogene Polynome und $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ Invarianten von G , dann gilt

$$\sum_{i=1}^m g_i \cdot h_i = 0 \Rightarrow h_1 \in \mathcal{I}_G \text{ oder } g_1 \in \langle g_2, \dots, g_m \rangle$$

Dabei bezeichne $\mathcal{I}_G$ das von allen nicht konstanten homogenen Invarianten von G erzeugte Ideal.

Im Beweis der Hinrichtung wird uns das folgende Korollar helfen, die Gleichheit der Gruppe G , deren Invariantenring von n algebraisch unabhängigen homogenen Invarianten erzeugt wird, und der von allen Spiegelungen in G erzeugte Untergruppe $H \leq G$ zu zeigen.

Korollar Sei $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ eine endliche Matrixgruppe mit Invariantenring $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$, der von n algebraisch unabhängigen Invarianten $\theta_1, \dots, \theta_n$ erzeugt wird (also ist G nach Shepard-Todd-Chevalley eine Spiegelungsgruppe). Dabei bezeichne $d_i = \text{Grad}(\theta_i)$ und r die Anzahl an Spiegelungen in G . Dann gilt

$$|G| = \prod_{i=1}^n d_i \text{ und } r = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$$