Seminar zur Algebra im Wintersemester 2009/2010

Geometrie der Klassischen Gruppen

BN-Paare, Diagramme und Geometrien

Tim Schmölzer

16. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

1.1 Einleitung

Nachdem wir in den letzten Vorträgen bereits die BN-Paar Axiome für einige Spezialfälle ($\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{Sp}(V)$) nachgewiesen haben, wollen wir uns nun zunächst mit allgemeineren BN-

Paaren von polaren Geometrien auseinandersetzen, um im Folgenden für diesen allgemeinen Fall erste Eigenschaften aus den Axiomen abzuleiten. Wir werden die Weyl-Gruppe eines BN-Paares genauer untersuchen und feststellen, dass diese in gewisser Weise bereits durch die Gruppe B festgelegt wird. Schließlich ordnen wir BN-Paaren einen Multigraphen, das sogenannte Coxeter-Dynkin-Diagramm, zu, mitdessen Hilfe wir die wichtige Klasse der Coxeter-Gruppen einführen. Letztes Hauptresultat dieses Vortrages ist die Tatsache, dass Weyl-Gruppen Coxeter-Systeme definieren.

1.2 Notation

Im gesamten Vortrag bezeichne V einen endlich dimensionalen Vektorraum über einem (beliebigen) Körper K; es sei β eine nicht ausgeartete alternierende, symmetrische oder σ-hermitesche Form auf V und π die zugehörige Polarität von $\mathcal{P}(V)$. Das Gebäude der polaren Geometrie $(\mathcal{P}(V), \pi)$ ist dann definiert als das Paar $(\Delta_\pi(V), \Sigma)$, wobei $\Delta_\pi(V)$ die Menge der echten Fahnen total isotroper Teilräume von V und Σ die Menge der Apartments polarer Rahmen war. Wir hatten bereits gesehen, dass das Gebäude für $\dim(V) \geq 2$ nichtleer ist, falls V isotrope Vektoren enthält; in diesem Sinne wollen wir auch diese Voraussetzung stellen. Zudem schränken wir β ein wenig ein, indem wir fordern, dass β - falls es symmetrisch ist - von einer quadratischen Form abstammt. Als Konsequenz werden bestimmte unitäre und orthogonale Geometrien von unserer Betrachtung ausgeschlossen. Diesen Geometrien widmen sich die nächsten beiden Vorträge. In jedem Fall jedoch sei m der Witt-Index der Geometrie, $\mathcal{F} := \{P_i, P_i^* | 1 \leq i \leq m\}$ sei ein polarer Rahmen und Σ das Apartment von $\mathcal{F}$.

2 Das BN-Paar eines polaren Gebäudes

Eine Zielsetzung dieses Kapitels ist es, BN-Paare für eine möglichst große Klasse von Gruppen zu konstruieren und in einem möglichst allgemeinen Rahmen Axiome und Eigenschaften zu verifizieren. Diesem Zweck dient die folgende Definition.

Definition 2.1. *Eine Isometriegruppe der polaren Geometrie heißt stark transitiv, wenn sie transitiv auf den Paaren $(M', \mathcal{F}')$ ist, wobei $\mathcal{F}'$ ein polarer Rahmen und M' eine Kammer im Apartment $\Sigma(\mathcal{F}')$ ist.*

Zur Verdeutlichung wollen wir ein wichtiges Beispiel formulieren.

Satz 2.2. *Die Gruppe aller linearen Isometrien einer polaren Geometrie ist stark transitiv.*

Beweis. Sei M' eine Kammer des Apartments Σ' des polaren Rahmens $\{Q_i, Q_i^* | 1 \leq i \leq m\}$. Nach eventueller Umnummerierung können wir annehmen, dass $M' := \langle Q_1, \ldots, Q_i | 1 \leq i \leq m \rangle$ und dass $M := \langle Q_1, \ldots, Q_i | 1 \leq i \leq m \rangle$. Dann existiert eine lineare Isometrie $f : \langle \mathcal{F}' \rangle \to \langle \mathcal{F} \rangle$ mit $f(Q_i) = P_i$ und $f(Q_i^*) = P_i^*$. Nach dem Satz von Witt lässt sich f zu einer linearen Isometrie von V mit $f(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ und $f(M') = M$ fortsetzen. $\square$

Im Folgenden bezeichne G eine stark transitive Isometriegruppe, N sei der Stabilisator von $\mathcal{F}$ und B der Stabilisator von $M := \langle P_1, \ldots, P_i | 1 \leq i \leq m \rangle$. Wir wollen nun zeigen, dass B und N ein BN-Paar von G bilden. Dazu wiederholen wir kurz die BN-Paar Axiome.

Erinnerung: BN-Paar Axiome

1. $G = \langle B, N \rangle$
2. $H := B \cap N$ ist ein Normalteiler von N.
3. $W := N/H$ wird von Elementen $\{w_i | i \in I\}$ der Ordnung zwei erzeugt.
4. Für $w_i = n_i H$, $n \in N$ gelten:
   (a): $n_i B n_i \neq B$
   (b): $n_i B n \subseteq (B n_i n B) \cup (B n B)$

Das zweite Axiom folgt direkt aus dem ersten Punkt des anschließenden Lemmas:

Lemma 2.3 (Zweites BN-Paar Axiom)**.** *1. N operiert auf $\mathcal{F}$ mit Kern $B \cap N$.*

2. N/H operiert regulär auf den Kammern von Σ.

Beweis. 1. Sei $n \in N$ im Kern der Operation. Dann fixiert n jeden Punkt von $\mathcal{F}$, also auch M. Demnach liegt n im Stabilisator von M, also in B. Umgekehrt sei nun $n \in B \cap N$. Dann fixiert n $P_1, \ldots, P_m$. Nach Satz (7.13) in [6] fixiert n dann $P_1^*, \ldots, P_m^*$. Zusammen: $B \cap N$ ist der Kern der Operation.

2. G ist stark transitiv, also ist N transitiv auf den Kammern von Σ. Der Stabilisator der Kammer M in N ist $B \cap N$, also ist N/H regulär auf den Kammern.

$\square$

Dieses Lemma verwenden wir nun, um das erste Axiom nachzuweisen.

Satz 2.4 (Erstes BN-Paar Axiom)**.** *$G = BNB$.*

Beweis. Sei $g \in G$. Betrachte die Kammer $g(M)$. Da es zu je zwei Kammern M_1, M_2 ein Apartment gibt, das die beiden beinhaltet, existiert auch ein Apartment Σ', das sowohl M als auch $g(M)$ enthält. Aus der starken Transitivität von G folgt die Existenz eines b mit $b(M) = M$ und $b(\Sigma') = \Sigma$. Dann ist $b(g(M)) \in \Sigma$ und nach 2.3 gibt es ein $n \in N$ mit $nbg(M) = M$. Es sind also b und $nbg \in B$, woraus bereits folgt, dass $g \in BNB$. $\square$

Als nächstes widmen wir uns dem dritten Axiom: Wir brauchen also eine Menge von Erzeugern der Ordnung 2 für die Weyl-Gruppe $W := N/H$.

Satz 2.5 (Drittes BN-Paar Axiom)**.** *Die Weyl-Gruppe des BN-Paares wird durch Elemente der Ordnung zwei erzeugt.*

Beweis. Erneut benutzen wir die Tatsache, dass n genau dann P_i^* fixiert, wenn es auch P_i fixiert. Eine Konsequenz aus dieser Tatsache ist, dass die Teilmengen $\{P_i, P_i^*\}$ für alle i Blöcke der Operation von W auf $\mathcal{F}$ sind. Wie bereits im letzten Vortrag folgern wir, dass die Weyl-Gruppe einer Untergruppe des Kranzprodukts $Z_2 \wr S_m$ ist. Da W regulär auf den Kammern von Σ operiert, ist $|W|$ gleich der Anzahl dieser Kammern. Diese hatten wir jedoch bereits abgezählt: Es gilt $|W| = 2^m m!$. Andererseits ist das bereits die Kardinalität des Kranzproduktes. Also gilt $W = Z_2 \wr S_m$. Aufgrund dieser Gleichheit können wir also für $1 \leq i < m$ ein $n_i \in N$ wählen, sodass $w_i := n_i H$ die Permutation (P_i, P_{i+1}) ist. Diese w_i erzeugen also die symmetrische Gruppe. Um das gesamte Kranzprodukt zu erzeugen, benötigen wir noch ein $n_m \in N$ für das $w_m := n_m H$ die Transposition (P_m, P_m^*) ist. Sowohl die Permutationen, als auch die Transposition haben Ordnung 2. □

Wie wir es bereits im ersten Vortrag zu BN-Paaren gesehen haben, benötigen wir für den Nachweis des letzten Axioms ein weiteres Hilfsmittel. Erneut bezeichen wir echte Fahnen von $m-1$ total isotropen Unterräumen als *Wände*. Eine bekannte Eigenschaft dieser Wände begegnet uns auch in diesem Zusammenhang wieder.

Lemma 2.6. *Ist A eine Wand im Apartment Σ, so ist A in genau zwei Kammern von Σ enthalten.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass A aus den Teilräumen $P_1, \langle P_1, P_2 \rangle, \ldots, \langle P_1, P_2, \ldots, P_m \rangle$ mit Ausnahme von $\langle P_1, \ldots, P_i \rangle$ für ein i besteht.
<u>1. Fall:</u> $i < m$.
Dann haben wir genau zwei Möglichkeiten A zu einer Kammer zu erweitern: Wir können entweder $\langle P_1, \ldots, P_i \rangle$ oder $\langle P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1} \rangle$ hinzunehmen.
<u>2. Fall:</u> $i = m$.
Erneut bleiben genau zwei Möglichkeiten: Wir fügen entweder $\langle P_1, \ldots P_m \rangle$ oder $\langle P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m^* \rangle$ hinzu. □

Satz 2.7. *Teil (b) des vierten Axioms ist für B und N erfüllt.*

Beweis. Wir orientieren uns am (fast) analogen Beweis im ersten Vortrag zu den BN-Paaren. Es sei $n \in N$ und für $i \in I$ seien die n_i wie im Beweis von 2.5 definiert. Wir wollen zeigen, dass $nBn_i \subseteq Bnn_iB \cup BnB$. $A = M \cap n_i(M)$ ist die Wand, die wir aus der Kammer M erhalten, wenn wir $\langle P_1, \ldots, P_i \rangle$ auslassen. B ist der Stabilisator von M, also gilt für $b \in B$: $b(A) = A$ und somit auch $n(A) \subseteq nbn_i(M)$. Da zu je zwei Kammern im polaren Gebäude ein Apartment existiert, das beide erhält, folgt die Existenz eines $\Sigma' := \Sigma(\mathcal{F}')$, das sowohl M als auch $nbn_i(M)$ enthält. Somit enthalten sowohl Σ als auch Σ' beide M und $n(A)$. Nach Satz (7.17) in [6] existiert nun eine Isometrie f, die M und $n(A)$ fixiert und $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{F}'$ abbildet. G ist stark transitiv, es existiert also ein Element $g \in G$ mit $g(M) = M$ und $g(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$. Es folgt, dass $g^{-1}f$ sowohl M als auch $\mathcal{F}'$ festhält. Also ist $g^{-1}f$ aus dem Schnitt der Stabilisatoren - aus $B \cap N$ - und somit, wie zuvor gesehen, aus dem Kern der Operation von N auf $\mathcal{F}'$. Also gilt $g^{-1}f(n(A)) = n(A)$. g liegt also in B und $gnbn_i(M)$ ist eine Kammer von Σ, die $n(A)$ enthält. Wir wir gerade gesehen haben muss somit $gnbn_i(M) \in \{n(M), nn_i(M)\}$ gelten, also in jedem Fall $nbn_i \in (BnB) \cup (Bnn_iB)$. □

Im Folgenden wollen wir einen besonderen Fall aus der Betrachtung ausschließen. Orthogonale Geometrien mit Witt-Index m und Dimension $2m$ werden in einem späteren Vortrag näher diskutiert und sollen hier keine Rolle mehr spielen. Unter diesen Voraussetzungen können wir den Beweis der BN-Paar Axiome mit einem Lemma und dem darauf aufbauenden Nachweis des ersten Teils des vierten Axioms abschließen.

Lemma 2.8. *Mit obiger Ausnahme ist jede Wand in mindestens drei Kammern des Gebäudes enthalten.*

Beweis. Wir können wieder annehmen, dass A aus den Teilräumen $P_1, \langle P_1, P_2\rangle, \dots, \langle P_1, P_2, \dots, P_m\rangle$ mit Ausnahme von $\langle P_1, \dots, P_i\rangle$ für ein i besteht. Schwierigkeiten bereitet nur der Fall $i = m$. Unsere Strategie ist es die total isotropen Teilräume zu zählen, die $E := \langle P_1, \dots, P_{m-1}\rangle$ enthalten. Dazu wollen wir zu $E/E^\perp$ übergehen und $m = 1$ annehmen. Angenommen es ist $P_1 = \langle e_1\rangle$, $P_1^* = \langle f_1\rangle$ mit $\beta(e_1, f_1) = 1$. Wir müssen drei Fälle unterscheiden.
1. Fall: β ist alternierend: Dann sind $\langle e_1\rangle$, $\langle f_1\rangle$ und $\langle e_1 + f_1\rangle$ isotrope Punkte.
2. Fall: β ist σ-hermitesch: Wähle $a \in K$ so, dass $a \neq \sigma(a)$ und setze $b := a - \sigma(a) \neq 0$. Dann sind $\langle e_1\rangle$, $\langle f_1\rangle$ und $\langle e_1 + bf_1\rangle$ isotrope Punkte.
3. Fall: Geometrie aus einer quadratischen Form: In diesem Fall existiert ein $u \in \langle e_1, f_1\rangle^\perp$ mit $a := Q(u) \neq 0$. Dann sind $\langle e_1\rangle$, $\langle f_1\rangle$ und $\langle -ae_1 + f_1 + u\rangle$ isotrope Punkte. □

Nun können wir dieses Kapitel abschließen.

Satz 2.9. *Unter obigen Voraussetzungen gilt auch Axion (iv)(a) für B und N; die Gruppen bilden also ein BN-Paar für G.*

Beweis. Wir bleiben bei der obigen Notation und betrachten die Wand $A = M \cap n_i(M)$. Nach dem vorausgegangenen Lemma exitiert nun eine Kammer $M' \notin \{M, n_i(M)\}$, in der A enthalten ist. Sei nun Σ' ein Apartment, das M und M' enthält. G ist stark transitiv, also existiert ein b mit $b(M) = M$ und $b(\Sigma') = \Sigma$. Also gilt $b(A) = A$ und somit auch $A \in b(M')$, da A in M' liegt. Da jede Wand in einem Apartment in genau zwei Kammern dieses Apartments liegt, folgt $b(M') = n_i(M)$. Daraus wiederum folgt, dass $b^{-1}n_i(M) = M' \neq M$, also $n_i b^{-1} n_i(M) \neq M$ und (da $b(M) = M$) $n_i B n_i \neq B$. □

3 Die Weyl-Gruppe

In diesem Abschnitte wollen wir uns ein wenig näher mit der Weyl-Gruppe eines BN-Paares auseinandersetzen. Wir betrachten also wieder den allgemeinen Fall einer beliebigen Gruppe G mit BN-Paar (B, N). Wir beginnen mit der Definition einer wichtigen Klasse von Untergruppen, die in gewisser Weise die Gruppe B und somit bereits - wie wir ebenfalls später sehen werden - die Weyl-Gruppe eines BN-Paares klassifizieren. Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ der Indexmenge I bezeichne im Folgenden $W_J := \langle w_i | i \in J \rangle$ und N_J diejenige Untergruppe von N für die $N_J / B \cap N = W_J$.

Lemma 3.1. *Für jede solche Teilmenge J ist BN_JB eine Untergruppe von G.*

Beweis. Sei $n \in N_J$. Dann ist $n = n_{i_1} \cdots n_{i_k}$ mit $w_{i_j} = n_{i_j} H$ und $i_j \in J$. Wir führen den Beweis nun mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Sei also $k > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir $n_{i_2} \cdots n_{i_k} BN_JB \subseteq BN_JB$. Mit Axiom (iv)(b) für BN-Paare gilt $n_{i_1} BN_JB \subseteq BN_JB$ und somit bereits $nBN_JB \subseteq BN_JB$. Zudem gilt $(BN_JB)^{-1} = BN_JB$, also ist BN_JB eine Gruppe. □

Definition 3.2. *Eine Untergruppe H von G heißt parabolisch, wenn sie eine Konjugierte von B enthält. Die Gruppen $P_J := BN_JB$ heißen die standard-parabolischen Untergruppen von G.*

Die Bezeichnung „parabolisch“ stammt wahrscheinlich von Untersuchungen der modularen Gruppe, bei der zwischen elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Elementen unterschieden wird. Eine weitere (jedoch unwahrscheinliche) Vermutung ist eine Herkunft aus dem Wort „para-borelsch “, da diese Gruppen die Borel-Untergruppen von G enthalten.

Bemerkung 3.3. *Lemma 3.1 zeigt, dass die B und N_J ein BN-Paar für P_J mit Weyl-Gruppe W_J bilden.*

Bemerkung 3.4.
1. *Wegen $G = BNB$ ist jede B-B-Doppelnebenklasse von der Form BwB für ein $w \in W$.*
2. *Für B-B-Doppelnebenklassen X, Y, Z gilt $X \subseteq YZ$ genau dann, wenn $Y \subseteq XZ$.*

Bevor wir weitermachen ist es hilfreich ein paar Begriffe aus der elementaren Gruppentheorie zu wiederholen.

Definition 3.5. *Es sei W eine Gruppe mit den Erzeugern $R = \{w_i | i \in I\}$. Ein Wort für w in den Erzeugern ist ein Tupel $(w_1, \dots, w_k)$ in R mit $w = w_1 \cdots w_k$. Die Länge $l(w)$ eines Elements $w \in W$ ist die kleinste natürliche Zahl n, für die $(w_1, \dots, w_n)$ ein Wort für w ist. Ein Wort $(w_1, \dots, w_n)$ mit $n = l(w)$ heißt vollständig gekürzt. Statt $(w_1, \dots, w_n)$ werden wir in Zukunft häufig einfach $w_1 \cdots w_n$ schreiben.*

Insbesondere das Konzept der Länge eines Elements wird wesentlich in den Beweis der nächsten Aussagen einfließen.

Lemma 3.6. *Ist $BwB = Bw'B$ für $w, w' \in W$, so ist bereits $w = w'$.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $l(w) \leq l(w')$ und führen den Beweis mit Induktion nach $l(w)$. Ist $l(w) = 0$, so ist $w = 1$ und somit auch $w' = 1$. Sei also $l(w) > 0$.
Es sei $w = w_i w''$ mit $l(w'') = l(w) - 1$. Dann ist $Bw'B \subseteq (Bw_iB)(Bw''B)$ und mit Axiom (iv)(b) gilt auch

$$Bw''B \subseteq (Bw_iB)(Bw') \subseteq (Bw_iw'B) \cup (Bw'B)$$

Wäre nun $Bw''B = Bw'B$, so müsste nach Induktionsvoraussetzung $w'' = w'$ gelten; ein Widerspruch zu $l(w'') < l(w)$. Also ist $Bw''B = Bw_iw'B$ und wegen $l(w'') < l(w)$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung $w'' = w_iw'$, also $w = w_iw'' = w'$. $\square$

Ohne Beweis zitieren wir eine schärfere Version von Axiom (iv)(b) aus [6].

Satz 3.7. *Für $i \in I$ und $w \in W$ gilt:*

1. $(Bw_iB)(BwB) = \begin{cases} Bw_iwB, & \text{falls } l(w_iw) = l(w) + 1 \\ (Bw_iwB) \cup (BwB), & \text{falls } l(w_iw) = l(w) - 1 \end{cases}$

2. $(BwB)(Bw_iB) = \begin{cases} Bww_iB, & \text{falls } l(ww_i) = l(w) + 1 \\ (Bww_iB) \cup (BwB), & \text{falls } l(ww_i) = l(w) - 1 \end{cases}$

Die Fälle $l(w_iw) = l(w)$ oder $l(ww_i) = l(w)$ treten nie auf.

Satz 3.8. *Für $n \in N$ sei $w := nH$ und sei $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ vollständig gekürzt. Dann gilt für $J := \{i_1, \dots, i_k\}$: $P_J = \langle B, n \rangle = \langle B, nBn^{-1} \rangle$.*

Beweis. Es ist $\langle B, nBn^{-1} \rangle \subseteq \langle B, n \rangle \subseteq BN_JB = P_J$. Andersherum wähle für jedes j ein $n_{i_j} \in N$ mit $w_{i_j} = n_{i_j}H$. Dann ist $l(w_{i_1}w) < l(w)$ und somit nach 3.7 $(Bw_{i_1})(BwB) = (Bw_{i_1}wB) \cup (BwB)$. Es existiert also ein $b \in B$ mit $n_{i_1}bn \in BnB$, also $n_{i_1} \in \langle B, nBn^{-1} \rangle$. Induktiv schließt man, dass $P_{J \setminus i_1} = \langle B, n_{i_1}^{-1}Bn^{-1}n_{i_1} \subseteq \langle B, nBn^{-1} \rangle$ und somit $P_J = \langle B, nBn^{-1} \rangle$. $\square$

Jetzt wollen wir wie angekündigt nachweisen, dass die Gruppe B die Erzeuger von W eindeutig bestimmt.

Satz 3.9. *Für alle $w \in W \setminus \{1\}$ gilt: w ist genau dann Erzeuger der Weylgruppe, wenn $B \cup (BwB)$ eine Gruppe ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$ “: Bw_iB ist eine Gruppe für alle i.
„$\Leftarrow$ “: Angenommen $B \cup (BwB)$ ist eine Gruppe. Sei dann $w = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ ein vollständig gekürztes Wort. Nach 3.8 ist $B \cup (BwB) = P_J$ mit $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Demnach ist $Bw_{i_1}B \subseteq B \cup (BwB)$. Nach 3.6 ist somit schon $w_{i_1} = w$, also $w \in \{w_i | i \in I\}$. □

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch kurz auf eine wichtige Eigenschaft der standard-parabolischen Untergruppen eingehen:

Satz 3.10. *Ist Q eine Untergruppe von G, die B enthält, so ist Q eine standard-parabolische Untergruppe.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $Q = P_J$ für ein geeignetes $J \subseteq I$. Betrachte $J := \{i \in I | Bw_iB \subseteq Q\}$. Dann ist sicherlich $P_J \subseteq Q$. Für $Q \subseteq P_J$, betrachte ein $h \in Q$. Es gilt $BhB = BwB$ für ein $w \in W$ und $BwB \subseteq Q$. Ist $w_{i_1} \cdots_{i_k}$ ein vollständig gekürztes Wort, so folgt aus 3.8: $Bw_{i_j}B \subseteq Q$ für alle j. Also ist $i_j \in J$ und somit auch $h \in P_J$. □

4 Coxeter-Gruppen und die Austauschbedingung

Die Weyl-Gruppe eines BN-Paares wird häufig durch einen Multigraphen, das sogenannte Coxeter-Dynkin-Diagramm dargestellt. Andererseits werden wir zu einem beliebigen Graphen eine Gruppe, die sogenannte Coxeter-Gruppe, definieren. Die Überschneidung des Namens ist hierbei kein Zufall: Zum Ende dieses Abschnittes werden wir sehen, dass unter den von uns gestellten Voraussetzungen Weyl-Gruppen eine Coxeter-Gruppe ist.

Definition 4.1. *Das Coxeter-Dynkin-Diagramm einer Weyl-Gruppe ist der Multigraph Γ mit Knoten $\{w_i | i \in I\}$. Für $i \neq j$ ist der Knoten w_i mit dem Knoten w_j durch $m_{ij} - 2$ Kanten verbunden wobei m_{ij} die Ordnung des Gruppenelements w_iw_j bezeichnet.*

Definition 4.2. *Die Coxeter−Gruppe eines Graphen Γ mit den Knoten $R := \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $m_{ij} - 2$ Kanten zwischen den Knoten x_i und x_j für $i \neq j$ (und $m_{ii} := 1$) ist die Gruppe W mit Erzeugern R und Relationen $(x_ix_j)^{m_{ij}} = 1$. Das Paar (W, R) heißt Coxeter-System.*

Um zu zeigen, dass die Weyl-Gruppe tatsächlich die Coxeter-Gruppe ihres Coxeter-Dynkin-Diagramms ist, benötigen wir ein elementares Hilfsmittel: Die sogenannte Austauschbedingung. Im Folgenden sei W eine Gruppe die von einer Teilmenge R von Elementen der Ordnung 2 erzeugt wird.

Definition 4.3. *Das Paar (W, R) erfüllt die Austauschbedingung, falls für alle vollständig gekürzten Wörter* $w = r_1 \cdots r_l$ *und für alle* $r \in R$ *mit* $l(rw) \leq l(w)$ *ein Index* i *existiert, sodass* $rr_1 \cdots r_{i-1} = r_1 \cdots r_i$.

Die Verbindung zur Weyl-Gruppe ist schnell hergestellt.

Lemma 4.4. *Ist* W *die Weyl-Gruppe eines BN-Paares und sind* R *die Erzeuger von* W*, so erfüllt* (W, R) *die Austauschbedingung.*

Beweis. Sei $w = r_1 \cdots r_l$ vollständig gekürzt und sei $l(rw) \leq l(w)$ für ein $r \in R$. Wir wählen das kleinste $i \in I$, sodass $rr_1 \cdots r_i$ nicht vollständig gekürzt ist. Dann sind $u := rr_1 \cdots r_{i-1}$ und $v := r_1 \cdots r_i$ vollständig gekürzt und $ur_i = rv$. Aus 3.7 folgt jetzt die Gleichheit

$$(Bur_iB) \cup (BuB) = (BrB)(Br_1B) \cdots (Br_iB) = (BrvB) \cup (BvB).$$

Das liefert $BuB = BvB$ und somit (nach 3.6) $u = v$. □

Bemerkung 4.5. *Sind* $r, s \in R$ *und gilt* $|rs| = m$*, so folgt* $rsrs \cdots = srsr \cdots$*, wobei beide Wörter die Länge* m *haben.*

Diese Bemerkung gibt Anlass zur folgenden Definition

Definition 4.6. *Zwei gekürzte Wörter* $a = (a_1, \ldots, a_l)$ *und* $b = (b_1, \ldots, b_l)$ *heißen* (r, s)*-verwandt, wenn das eine durch Ersetzen einer Teilfolge* $(r, s, r, s, \ldots)$ *durch* $(s, r, s, r, \ldots)$ *aus dem anderen hervorgeht.* a *heißt homotop zu* b*, falls* $a = b$ *oder falls es eine Kette von Wörtern* $a = c_1, c_2, \ldots, c_k = b$ *gibt, für die für alle* $1 \leq i < k$ *die Glieder* c_i *und* c_{i+1} (r, s)*-verwandt sind.*

Jetzt haben wir genügend Hilfsmittel gesammelt, um den folgenden Satz beweisen zu können.

Satz 4.7. *Erfüllt das Paar* (W, R) *die Austauschbedingung, so sind für alle* $w \in W$ *alle vollständig gekürzten Wörter für* w *homotop.*

Beweis. Sei $w \in W$. Wir führen den Beweis mit Induktion nach der Länge von w. Für $l(w) = 1$ sind natürlich alle vollständig gekürzten Wörter für w homotop. Sei also $l(w) > 1$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle Wörter w' mit $l(w') < l(w)$ gezeigt ist. Jetzt führen wir den Beweis indirekt. Angenommen, dass $a := (a_1, \ldots, a_l)$ und $b := (b_1, \ldots, b_l)$ zwei vollständig gekürzte, jedoch nicht homotope, Wörter für w sind. Nach Induktionsvoraussetzung muss $a_1 \neq b_1$ und $a_l \neq b_l$ gelten. Jetzt gilt also $l(b_1w) = l(w) - 1$, und somit können wir die Austauschbedingung verwenden: Es ist $b_1a_1 \cdots a_{i-1} = a_1 \cdots a_i$ für ein i. Nun ist $b' := (b_1, a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_l)$ ein vollständig gekürztes Wort für w, welches nach Induktionsvoraussetzung homotop zu b ist. Im Fall

$i < l$ enden sowohl a als auch b' mit a_l, sind also homotop nach Induktionsvoraussetzung; ein Widerspruch zur Annahme. Also muss in unserem Fall $i = l$ gelten und somit $b' = (b_1, a_1, \ldots, a_{l-1})$. Als nächstes führen wir die gleiche Argumentation für a und b' statt a und b. Auf diese Weise erhalten wir ein Wort $a' = (a_1, b_1, a_1, \ldots, a_{l-2}$. Man sieht: Nach endlichen vielen Iterationen erhalten wir zwei Wörter $a_0 := (a_1, b_1, a_1, b_1, \ldots)$ und $b_0 := (b_1, a_1, b_1, a_1, \ldots)$. Diese sind nach Konstruktion vollständig gekürzte Wörter für w und nicht homotop. Es gilt aber $w^2 = (r_1 s_1)^l = 1$ und somit sind r_0 und s_0 (r, s)-verwandt und insbesondere homotop; ein Widerspruch. □

Korollar 4.8. *Erfüllt das Paar (W, R) die Austauschbedingung, so ist (W, R) ein Coxeter-System.*

Beweis. Wir zeigen, dass W isomorph zur Gruppe mit den Erzeugern $\{x_i | i \in I\}$ und Relationen $(x_i x_j)^{m_{ij}}$ ist. Dazu nutzen wir die universelle Abbildungseigenschaft der Präsentationen, zeigen also, dass jeder Homomorphismus $f : R \to G$ in eine beliebige Gruppe G, der $f(x_i)f(x_j)^{m_ij} = 1$ erfüllt, eine Fortsetzung $W \to G$ besitzt. Ist $r = r_1 \cdots r_l$ ein vollständig gekürztes Wort für w, so definieren wir $f(w) = f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_l)$. Da je zwei vollständig gekürzte Wörter homotop sind, ist $f(w)$ wohldefiniert. Ist $r \in R$ und $l(rw) = l(w) + 1$, so ist $f(rw) = f(r)f(w)$, ist hingegen $l(rw) = l(w) - 1$, so betrachte $w' := rw$. Es gilt wieder $f(rw') = f(r)f(w')$ und somit in beiden Fällen $f(rw) = f(r)f(w)$. Induktiv erhält man $f(vw) = f(v)f(w)$, f ist also wie gewünscht ein Homomorphismus. □

Korollar 4.9. *Die Weyl-Gruppe eines BN-Paares ist eine Coxeter-Gruppe.*

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in diesem Vortrag gesehen, wie man BN-Paare auch für größere Klassen von Geometrien definieren und die Axiome nachweisen kann. Die beiden außer Acht gelassenen Sonderfälle - einige unitäre und orthogonale Geometrien - werden in den folgenden Seminarvorträgen behandelt. In der Tat haben wir unter unseren Voraussetzungen die BN-Paar Axiome „beinahe“auch für orthogonale Geometrien von Wittindex m und Dimension $2m$ nachgewiesen. Hier scheiterten unsere Ausführungen lediglich an Axiom (iv)(a). Allein aus den BN-Paar Axiomen konnten wir nachweisen, dass die Erzeuger der Weyl-Gruppe eines BN-Paares eindeutig von der Gruppe B festgelegt werden. Der Weyl-Gruppe galt auch im letzten Abschnitt des Vortrages unsere größte Aufmerksamkeit. Mit wenigen elementaren Hilfsmittel aus der Gruppentheorie gelang es uns zu zeigen, dass die Weyl-Gruppe die Austauschbedingung erfüllt und das diese Austauschbedingung bereits ein Coxeter-System impliziert. Weiterführend kann man zeigen, dass Coxeter-Gruppen genau die Gruppen sind, die die Austauschbedingung erfüllen; über Coxeter-Gruppen ist ohnehin sehr viel bekannt, was die Bedeutung dieses Resultats noch weiter unterstreicht.

6 Literatur

Dieser Seminarvortrag basiert weitestgehend auf [6]. Einige Details zu Wörtern und Präsentationen entstammen [3] und [5]. Die Seminarvorträge, auf die im Text Bezug genommen wurde sind [4], [1] und [2].

Literatur

[1] Anschütz, J. und J. Knappmann: *Polare Geometrie*. Seminar zur Algebra. Lehrstuhl D für Mathematik, Wintersemester 09/10, RWTH Aachen.

[2] Goens, A. und A. Wigger: *Symplektische Gruppen*. Seminar zur Algebra. Lehrstuhl D für Mathematik, Wintersemester 09/10, RWTH Aachen.

[3] Hiss, G.: *Group Theory*. Vorlesungsskript, RWTH Aachen, 2007.

[4] Löbbert, C. und S.C. Siccha: *BN-Paare und Gebäude*. Seminar zur Algebra. Lehrstuhl D für Mathematik, Wintersemester 09/10, RWTH Aachen.

[5] Rotman, J.: *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Text in Mathematics. Springer, New York, 1995.

[6] Taylor, D.: *The Geometry of the Classical Groups*. Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann, Berlin, 1992.