# Seminar zu klassischen Gruppen und deren Geometrie

Vortrag 3 von Artur Schäfer

April 28, 2010

## 1 Einleitung

In diesem Vortrag werde ich über den Isomorphismus PSL(3,2) $\cong$ PSL(2,7) reden. Das Ziel wird dabei sein etwas über die Operation der beiden Gruppen auf der Fanoebene zu betrachten. Das Ziel dieses Vortrags ist der Hauptsatz und der obige Isomorphismus eine Folgerung daraus.

## 2 Die Ebene aus 7 Punkten (Fanoebene)

**Definition:** Sei V ein $\mathbb{F}_2$ Vektorraum mit dim(V)= 3. Dann heißt die Projektive Ebene P(V), die sieben Punkte und sieben Geraden hat, Fanoebene. Dabei besteht jede Gerade aus drei Punkten und jeder Punkt liegt auf drei Geraden.

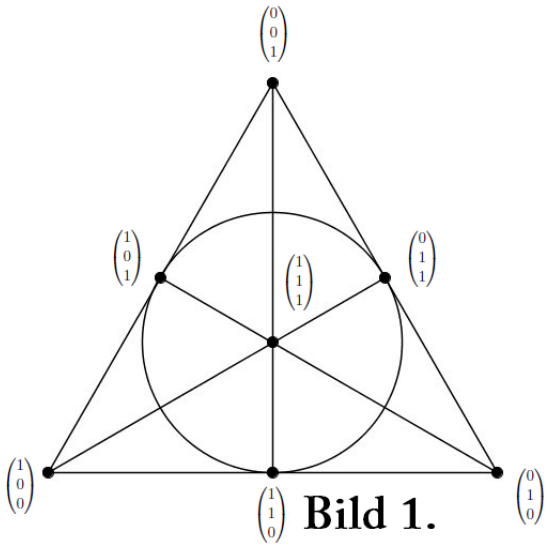


**Bild 1.**

Die Gruppe PΓL(3,2) =PSL(3,2) der Ordnung 168 operiert kollinear auf der Fanoebene.
D.h. PSL(3,2)=$SL_3(\mathbb{F}_2)$= $\{A \in {\mathbb{F}_2}^{3\times 3} \mid det(A) = 1\}$ operiert auf
$P({\mathbb{F}_2}^3) = \{\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle \mid 0 \neq \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2\}$.

Eine Eigenschaft der Fanoebene ist folgende:
Ist $\Omega$ eine 7-elementige Menge und $\mathbb{B}$ eine 7-elementige Menge von 3-elementigen Teilmengen von $\Omega$ mit der Eigenschaft, dass der Schnitt von je zwei paarweise verschiedenen Elementen aus $\mathbb{B}$ genau aus einem Element bestehet, welches in $\Omega$ ist. Dann gibt es eine Bijektion $f : \Omega \to {\mathbb{F}_2}^3 - \{0\}$, mit $f(\mathbb{B}) = \{U - \{0\} \mid U \leq {\mathbb{F}_2}^3, dim(U) = 2\}$.

Zum Beispiel nimmt man $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, so ist
$\mathbb{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$

Für den Beweis des Hauptsatzes in diesem Vortrag benötigen wir noch eine weitere Konstruktion der Fanoebene.

Seien P,Q $\in \Omega$, P≠Q, so gehören P und Q zu genau einem Element L aus $\mathbb{B}$. Wir definieren P+Q als drittes Element aus L. (In obiger Abbildung kann man diese Summe der Punkte auf den Geraden der Fanoebene gut nachvollziehen.)
Weiter machen wir W:= $\Omega \cup \{0\}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{F}_2$, indem wir P+Q wie oben setzen und $P + 0 = 0 + P = P, P + P = 0 \ \forall \ P \in W$ festlegen. Damit folgen durch kurzes nachrechnen, da es nur 7 Punkte gibt, alle Vektorraumaxiome für W. Das bedeutet W $\cong$ V. Also kann die Menge der Punkte von P(W) mit $\Omega$ und die Menge der Geraden von P(W) mit $\mathbb{B}$ identifiziert werden.

# 3 Vorbereitung zum Hauptsatz

Als Vorbereitung für den Hauptsatz wiederholen wir einige gruppentheoretische Definitionen.

Für H,G Gruppen, H≤G, ist der Normalisator von H in G

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

die größte Untergruppe von G, in der H Normalteiler ist.

Der Zentralisator ist

$$C_G(H) := \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in H\}.$$

Ist G endlich so ist $|G : N_G(H)|$ die Anzahl der Konjugierten von H in G. Dabei gilt: Wenn H eine p-Sylowgruppe von G ist, so ist
$|G : N_G(H)| \equiv 1 \ mod \ p$.

**Lemma 1:** Die 7-Sylowgruppen von $A_8$ sind in $A_8$ selbstzentralisierend.

Beweis: O.B.d.A $p$=(1 2 3 4 5 6 7) $\in A_8$. Dann ist $|\langle p\rangle|$ =7 und $\langle p\rangle \in Syl_7(A_8)$.
Zeige: $p \in C_{A_8}(p)$. Sei $x \in C_{A_8}(p)$, dann ist $x(1) = a \in$ {1,..,7}. Setze $y = p^{-a+1}x$. Durch ausprobieren erhält man sofort $y = id \Rightarrow x = yp^{a-1} = p^{a-1}$ und damit $x(8)$=8. D.h. $C_{A_8}(p) = \langle p\rangle \underbrace{\Rightarrow}_{pistErzeuger} C_{A_8}(\langle p\rangle) = \langle p\rangle$

**Lemma 2:** Sei G Gruppe. Gilt $g^2 = 1 \ \forall \ g \in G$, so folgt G ist abelsch.

Beweis: Sei $a, b \in G$, dann $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$.
Damit $ab \underbrace{=}_{(ab)^2=1} (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \underbrace{=}_{a^2=b^2=1} ba$.

**Lemma 3:** Ist G,H Gruppe, G einfach und $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus mit Bild( $\phi$ )$\neq$ {1}. Dann ist $\phi$ injektiv und damit G $\cong \phi$(G).

Beweis: $\phi : G \to \phi$(G) ist surjektiv, ist dann noch $\phi$ injektiv, so ist G $\cong \phi$(G).
Zeige also: $\phi$ ist injektiv. Wir wissen Kern($\phi$) $\lhd G$. Angenommen Kern($\phi$)=G $\Rightarrow$ Bild($\phi$) = {1}. Widerspruch zur Voraussetzung. Also folgt, da G einfach, Kern($\phi$) = {1} $\Rightarrow \phi$ injektiv.

**Lemma 4:** Sind $X$ und $Y$ normale Untergruppen einer p-Sylowgruppe $P$ von $G$ und $\exists \ g \in G$ mit $gXg^{-1} = Y$, dann $\exists \ n \in N_G(P)$ mit $nXn^{-1} = Y$.

Beweis: $X, Y \trianglelefteq P \Rightarrow P \subseteq N_G(X)$. Es ist aber auch $P \subseteq N_G(Y)$.
Damit folgt $gPg^{-1} \subseteq N_G(Y) = gN_G(X)g^{-1}$. Da sowohl $P$ als auch $gPg^{-1}$

in $Syl_p(N_G(Y))$ $\exists\ h \in N_G(Y)$ mit $h(gPg^{-1})h^{-1} = P \Rightarrow n := hg \in N_G(P)$. Also $nXn^{-1} = h\underbrace{gXg^{-1}}_{=Y}h^{-1} = Y$.

**Lemma 5:** Alle 2-Sylowgruppen der $A_7$ sind selbstnormalisierend.

Beweis: $|A_7| = 3^2 * 5 * 7 * 8$. Sei also $S \in Syl_2(A_7) \Rightarrow S \cong D_8$. Wir betrachten die Bahnen von S auf $\{1, ..7\}$: Es gibt 3 Bahnen $B_i$ mit $|B_i| \mid |S| = 8$, nämlich $|B_1| = 4, |B_2| = 2, |B_3| = 1$. Nun gilt $N_{A_7}$ operiert auf $\{B_1, B_2, B_3\}$. Für $n \in N_{A_7}$ ist $|n(B_i)| = |B_i|\ \forall\ i \Rightarrow n(B_i) = B_i\ \forall\ i$. D.h. $n$ kommt aus der $S_{B_1} \times S_{B_2} \times S_{B_4} \cap A_7 = S_4 \times S_2 \times S_1 \cap A_7 = \{(\sigma, \tau, 1) \in S_4 \times S_2 \times S_1 \mid sgn(\sigma) = sgn(\tau)\} \underbrace{\cong}_{*} S_4$.
Beweis von $*$: Betrachten wir $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma$, dann ist der Kern: $\{(1, \tau) \in S_4 \times S_2 \mid 1 = sgn(1) = sgn(\tau)\} = \{(1, 1)\}$. Also folgt bijektivität. Ende des Nebenbeweises.
Mit $S \cong D_8 \in Syl_2(S_4)$ haben wir also $N_{A_7}(S) \cong N_{S_4}(D_8) = D_8$. Damit ist sofort $N_{A_7}(S) = S$.

**Lemma 6:** Sind $U \leq G$ Gruppen mit Index von U in G gleich 2, so ist U Normalteiler von G.

Beweis: $[G : U] = 2 \Rightarrow G = U \uplus gU = U \uplus Ug\ \forall\ g \in G - U \Rightarrow gU = G - U = Ug \Rightarrow gUg^{-1} = U \Rightarrow U \lhd G$.

Sei ab jetzt G eine einfache Gruppe mit $|G| = 168 = 2^3 * 3 * 7$ und
$P \in Syl_7(G),\ Q \in Syl_3(G),\ S \in Syl_2(G)$.

**Lemma 7:** Es ist $C_G(P) = P,\ N_G(P) \cong C_7 \rtimes C_3$
und $|Syl_7(G)| = 8$.

Beweis: Aus den Sylowsätzen folgt $|Syl_7(G)| = |G : N_G(P)| \equiv 1\ mod\ 7$. Da G einfach ist und $P \neq G$, ist $P$ kein Normalteiler. $\Rightarrow |G : N_G(P)| \neq 1$. Da $|Syl_7(G)|$ die Gruppenordnung von $G$ teilen muss, folgt $|Syl_7(G)| = 8$. Aus der Beziehung von Lagrange $|G| = |N_G(P)| * |G : N_G(P)|$ erhalten wir $|N_G(P)| = 21$. Aus den Sylowsätzen folgt nun, dass G transitiv auf den 8 Restklassen von $G/N_G(P)$ operiert.

Betrachten wir nun den Homomorphismus $\phi : G \to Sym(Syl_7(G))(\cong S_8), g \mapsto (U \mapsto gUg^{-1})$. Da $G$ einfach und Bild$(\phi) \neq \{1\}$, folgt mit Lemma 3: $G \cong \phi(G)$. Nun gilt $\psi : sgn \circ \phi : G \to \{\pm 1\}$ ist nicht injektiv, also $\psi(G) = \{1\}$.
D.h. $G \leq$Kern$(\psi) \Rightarrow \phi(G) \leq$Kern$(sgn) = A_8$. Also $G \leq A_8$.
Mit Lemma 1 ist nun $C_G(P) = P$.
Wir machen nun weiter mit den Normlisator. Da $N_G(P) = 21 = 3 * 7$, gibt es Sylowgruppen von $N_G(P)$ der Ordnung 3 & 7. Weiter da $N_G(P) \leq G \Rightarrow N_G(P)$ hat dieselbe 7-Sylowgruppe wie G, zusätzlich aber auch dieselbe 3-Sylowgruppe. Es wird also o.B.d.A. $N_G(P) = PQ = \langle P, Q\rangle \cong C_7 \rtimes C_3$.

**Lemma 8:** Es ist $C_G(Q) = Q,\ N_G(Q) \cong S_3,\ t^2 = 1$ und $|Syl_3(G)| = 28$.

Beweis:

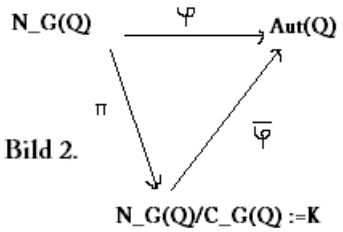

Bild 2.

Betrachten wir das obige Diagramm, wobei $\phi : n \mapsto (q \mapsto nqn^{-1})$: Wir erkennen Ker$(\phi) = C_G(Q)$, also ist nach dem Homomorphiesatz K isomorph zu einer Untergruppe von $Aut(Q)$. Da $|Q| = 3$, ist $|Aut(Q)| = 2$, denn jeder Automorphismus lässt die 1 fest. Also kann $|K| = 1$ oder 2 sein.
Betrachten wir nun $C_G(Q)$. Angenommen $p \in C_G(Q) = \langle q\rangle, q^3 = 1$, wobei $|\langle p\rangle| = 7 \Rightarrow pqp^{-1} = q \Leftrightarrow qpq^{-1} = p \Rightarrow q \in C_G(P) = \langle p\rangle$. Widerspruch, da $C_G(P)$ kein Element der Ordnung 3 hat. $\Rightarrow C_G(Q)$ hat kein Element der Ordnung 7. Mit $|N_G(Q)| = |C_G(Q)| * |N_G(Q) : C_G(Q)|$ folgt 7 teilt nicht $|N_G(Q)|$. Weiter folgt mit Lagrange 7 teilt $|G : N_G(Q)| \equiv 1\ mod\ 3$. Weil $|G : N_G(Q)|\ |G|$ teilen muss heißt es, $|G : N_G(Q)| = 7$ oder 28.
Wir zeigen $|G : N_G(Q)| = 28$ durch Widerspruch:

Angenommen $|G : N_G(Q)| = 7$, dann operiert G transitiv auf den 7 Restklassen von $N_G(Q)$. Wie eben schon vorgeführt erhalten wir über $\phi : G \to Sym(Syl_3(G)), n \mapsto (q \mapsto nqn^{-1})$ hier die Beziegung $G \leq A_7$.
Wir sagen $Q = \langle a\rangle$, wobei Ord$(a)$=3 und wollen nun wissen wie $\phi(a)$ in $A_7$ aussieht. Dazu schauen wir uns an wie $a$ auf $G/N_G(Q)$ operiert.
Es gilt: $a(gN_G(Q)) = gN_G(Q) \Leftrightarrow g^{-1}ag \in N_G(Q)$.

Da nun $\langle a \rangle$ 3-Sylowgruppe von $N_G(Q)$ ist, weil ja $N_G(Q) \leq G$ und $Q = \langle a \rangle$ 3-Sylowgruppe von G ist, ist auch $\langle g^{-1}ag \rangle = \langle a \rangle$ und damit $g \in N_G(Q) = N_G(\langle a \rangle)$. Das heißt $\phi(a)$ lässt genau einen Punkt fest, und a ist in $A_7$ konjugiert zu $(2,3,4)(5,6,7)$. Wir erhalten weiter $C_{A_7}(\phi(a)) = \langle \phi(a) \rangle \Rightarrow \underbrace{C_G(a) = \langle a \rangle}_{*}$ bzw. $C_G(Q) = Q$. Da nun auch wie oben $|Aut(\langle a \rangle)| = 2$ wird über Lagrange $|N_G(Q)| = |C_G(Q)| * |N_G(Q) : C_G(Q)| = 3*(1 \text{ oder } 2)=3$ oder 6. Auf der anderen Seite haben wir aber $|N_G(Q)| = \frac{|G|}{|G:N_G(Q)|} = 2^3 * 3 \neq 3$ und 6. Widerspruch. Damit erhalten wir $|G : N_G(Q)| = 28$.
Für $N_G(Q)$ gilt also $N_G(Q) = 6$, d.h. wir können annehmen $N_G(Q) = \langle Q, \langle t \rangle \rangle$, wobei $t^2 = 1$, also Ord(t)=2. Daraus folgt entweder $N_G(Q) = C_G(Q) = C_6$ oder $N_G(Q) = S_3$, da das die einzigen Gruppen der Ordnung 6 sind.

Nun wollen wir rausfinden was der Zentralisator ist. Uns bleiben zwei Möglichkeiten: Entweder $C_G(Q) = N_G(Q)$ oder $C_G(Q) = Q$, denn $C_G(Q)$hat kein Element der Ordnung 2 und $C_G(Q) \neq \{1\}$, da wenigstens $Q \subseteq C_G(Q)$. Durch Widerspruch zeigen wir, dass die zweite Möglickeit gilt.
Angenommen $C_G(Q) = N_G(Q)$. Sei $t \in C_G(Q) \Rightarrow tst^{-1} = s \ \forall \ s \in Q \Rightarrow sts^{-1} = t \ \forall \ s \in Q \Rightarrow Q \subseteq C_G(t)$. Klar ist $\langle t \rangle \subseteq C_G(t) \Rightarrow N_G(Q) = \langle Q, t \rangle \subset C_G(t) \leq G$. Da $Q$ 3-Sylowgruppe von $G$ und $Q \subset C_G(t)$ folgt $Q \in Syl_3(C_G(t))$. D.h. $|C_G(t) : N_G(Q)| \equiv 1 \ mod \ 3$.
Weiter ist t Element der Ordnung 2 in G und liegt damit in einer 2-Sylowgruppe S von G. $|S| = 8$, S ist 2-Gruppe. Nun ist S eine echte Obergruppe von $\langle t \rangle \Rightarrow N_S(t)$ ist echte Obergruppe von $\langle t \rangle$. D.h. $N_S(\langle t \rangle)$ hat 4 oder 8 Elemente, also 4 teilt $|N_S(\langle t \rangle)|$. Mit dem Homomorphiesatz folgt: 4 teilt $|C_G(t)|$. Nach Lagrange ist damit $|C_G(t)| = |N_G(Q)| * |C_G(t) : N_G(Q)| = 24$, da $Q$ 3-Sylowgruppe ist und $N_G(Q) = \langle Q, t \rangle$. Daraus folgt $|G : C_G(t)| = 7$ und wie oben schließen wir wieder $G \leq A_7$.
Jedoch haben in $A_7$ die Elemente der Ordnung 3 welche Elemente der Ordnung sieben normalisieren einen einzigen Fixpunkt. Denn Elemente der Ordnung sieben aus $A_7$ sind 7-Zykel und es ist $N_{A_7}(\langle (1,2,3,4,5,6,7) \rangle) = \langle (1,2,3,4,5,6,7) \rangle$ und Elemente der Ordnung drei sind Produkte von zwei 3-Zykeln und wie in $*$ gezeigt selbstzentralisierend. Sie können auch nicht mit einem Element der Ordnung zwei kommutieren, da die Zykel nicht disjunkt sind. Widerspruch. Das zeigt also $C_G(Q) = Q \Rightarrow N_G(Q) \cong S_3$.

**Lemma 9:** $N_G(S) = S$ und $S$ ist nicht abelsch.

Beweis: Angenommen S ist abelsch. Wir zeigen zuerst $S = N_G(S)$ durch Widerspruch.
Angenommen $S \neq N_G(S)$. Wir wissen $|S| = 8$. Wegen Lagrange und weil $S$ echte Untergruppe von $N_G(S)$, erhalten wir $|G : N_G(S)| = 7$. Das bedeutet wir erhalten wieder $G \leq A_7$. In $A_7$ wissen wir aber nach Lemma 6, dass die 2-Sylowgruppen selbstnormalisierend sind. Widerspruch. Also $S = N_G(S)$.
Wir zeigen nun, dass keine zwei Elemente aus S konjugiert werden können.
Angenommen $x \sim_S y, x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \exists\ g \in S$ mit $gxg^{-1} = y$
$\underbrace{\Rightarrow}_{S\ abelsch}\ x = y$. Widerspruch. $\Rightarrow x \nsim_S y$.
Sei weiter $X := Y := S\ X, Y \trianglelefteq S$, dann können die Elemente aus $X$ nicht mit denen aus $Y$ in $S = N_G(S)$ konjugiert werden. $\Rightarrow$ es gibt kein $n \in N_G(S)$ mit $nXn^{-1} = Y$ und mit Lemma 4 sind damit die Elemente aus $X$ nicht mit denen aus $Y$ in G nicht konjugiert. Also können Elemente aus $S$ nicht konjugiert werden
Sei nun $x \in S - \{1\}$, dann ergibt sich $|C_G(x)| = 8 * a$, wobei $a \mid 3 * 7$.
Angenommen $z \in C_G(x), |\langle z\rangle| = 3 \Rightarrow x \in C_G(\langle z\rangle)$ mit $\langle z\rangle$ ist 3-Sylowgruppe. Widerspruch zu $Q = C_G(Q)$ und $x \in S - \{1\}$. Ebenso komplett analoger Widerspruch für ein $p \in C_G(x)$ mit $|\langle p\rangle| = 7$. $\Rightarrow |^G\mathrm{x}| = \frac{|G|}{8} = 21$. x hat daher 21 konjugierte in G. Wir wissen von den Isomorphietypen, dass nur die zyklischen Gruppen abelsch sind. D.h. S muss isomorph zu einer von diese sein. Das bedeutet aber, dass S mindestens drei Elemente der Ordnung 2 hat. Ist $C_2 \times C_2 \times C_2 \cong S$, so sind 7*21 Elemente von der Ordnung 2. Nun zählen wir unsere gefundenen Elemente aus obigen Lemmata erstmal.
Wir haben $48 = \underbrace{(|P| - 1)}_{ohne\ die\ 1} * |Syl_7(G)|$ Elemente der Ordnung 7 in G,
$56 = \underbrace{(|Q| - 1)}_{ohne\ die\ 1} * |Syl_3(G)|$ Elemente der Ordnung 3 und unser 1 Element in G. Es ist $N_G(P) = \langle P, Q\rangle, C_G(P) = P, N_G(Q) = \langle Q, t\rangle\ und\ C_G(Q) = Q$.
Weiter kann kein Element der Ordnung zwei mit einem der Ordnung 3 oder 7 kommutieren und $A_8$ hat kein Element der Ordnung 8, da die Elemente der Ordnung 8 in $S_8$ die 8-Zykel mit Signum -1 sind. Mit $G \leq A_8$ folgt deshalb die restlichen 63 Elemente haben Ordnung 2 oder 4.
Ist nun $C_2 \times C_4 \cong S$, so sind 3*21 Elemente der Ordnung 2, aber mindestens noch ein weiteres mit Ordnung 4. In beiden Fällen sind es aber mehr als die 63 fehlenden Elemente in G. Widerspruch. Also müssen wir die Annahme S ist abelsch verwerfen.

**Fakt:** Die $S_4$ hat drei 2-Sylowgruppen.

# 4 Der Hauptsatz

Nun kommen wir zum Hauptergebnis in diesem Vortrag. Eine Folgerung des Hauptsatzes ist der Beweis für die Isomorphie PSL(2,7)≅PSL(3,2).

**Hauptsatz:** Wenn $G$ eine einfache Gruppe der Ordnung 168 ist, dann ist $G$ isomorph zur PSL(3,2).

Beweis: In diesem Beweis gehe ich wie folgt vor:
1) Ich Zerlege G in ihre Elemente, um Untergruppen A und B isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ zu erhalten.
2) Zur Geometrie: Über A und B erhalten wir $\Omega$ *und* $\mathbb{B}$ von G, die mit Punkten und Geraden der Fanoebene identifiziert werden können. Also gilt $|\Omega| = 7$ *und* $|\mathbb{B}| = 7$. Ich zeige auch, dass G auf diesen, wie die PSL(3,2) auf der Fanoebene, operiert. Damit folgt sofort die Isomorphie.

Zu 1): Wir betrachten nun den Aufbau unserer Gruppe $G$. $|G| = 7*3*2^3$. Wir untersuchen die Ordnungen der Elemente aus G: Zuerst betrachten wir 7-Sylowgruppen, dann 3-Sylowgruppen und dann 2-Sylowgruppen aus G.
Sei nun $P$ eine 7-Sylowgruppe von G. Mit Lemma 7 erhalten wir sofort $C_G(P) = P,\ N_G(P) = \langle P, Q\rangle \cong C_7 \rtimes C_3$.
Wir haben Aussagen über die 7-Sylowgruppen, nun nehmen wir die 3-Sylowgruppen ins Visier.

Nach Lemma 8 erhalten wir $C_G(Q) = Q,\ N_G(Q) = \langle Q, t\rangle \cong S_3,\ t^2 = 1$ und $|Syl_3(G)| = 28$.

Betrachten wir nun die 2-Sylowgruppen von G.
Sei $S$ eine 2-Sylowgruppe von $G$. $|S| = 8$. Eine Gruppe mit acht Elementen hat verschiedene Isomorphietypen nämlich $C_8, C_2 \times C_4, C_2 \times C_2 \times C_2, D_8$ und $Q_8$. $C_8$ schließen wir sofort aus, da S kein Element der Ordnung 8 hat, und betrachten die übrigen Fälle.
Mit Lemma 9 bekommen wir, dass S nicht abelsch ist und $N_G(S) = S$. Hätte nun S nur Elemente der Ordnung 2 so folgt mit Lemma 2. S ist abelsch. Also hat S mindestens ein Element der Ordnung 4. Wir wollen nun die Anzahl dieser Elemente rausfinden.

Sei nun $x \in S$ mit $|\langle x\rangle| = 4 \Rightarrow C_G(x) = \langle x\rangle$, da wir wie eben keine Elemente der Ordnung 3 oder 7 haben in $C_G(x)$. Weiter sei $s \in S - \langle x\rangle$. Wäre $s \in C_G(x) = \langle x\rangle$, folgt $sx = xs \Rightarrow S$ wäre abelsch. Also haben wir $S = \langle s, x\rangle$. Mit Lagrange erhalten wir $|S : \langle x\rangle| = 2$. D.h. wir haben $\langle x\rangle \trianglelefteq S$ nach Lemma 7. Damit ist aber $sxs^{-1} \in \langle x\rangle$. Weil $\langle x\rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$ haben nur $x$ und $x^3$ die Ordnung 4, d.h. nur sie können konjugiert werden. $\Rightarrow sxs^{-1} = x^3$. Somit gilt dann auch $sx^2s^{-1} = x^2$, woraus sofort $S = C_G(x^2)$ und $\langle x\rangle = C_G(x)$ folgt. Betrachten wir nun die Menge der Konjugierten so ist $|^G\mathrm{x}^2| = 21$, also unsere

Elemente der Ordnung 2 und $|^G\mathrm{x}| = 42$, also die der Ordnung 4. Zusammen sind das unsere restlichen 63 Elemente.

Nun bestimmen wir den Isomorphietyp.
Sei nun $y \in S$ mit $|\langle y\rangle| = 4$, dann ist ebenfalls analog zu oben $\langle y\rangle$ Normalteiler von S. Angenommen es ist $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, dann ist mit Lemma 4. $x \nsim_S y \Rightarrow x \nsim_G y$. Widerspruch, denn ${}^G\mathrm{x} \subseteq G$ enthält alle Elemente der Ordnung 4 und dort sind sie aber konjugiert. $\Rightarrow \langle x\rangle = \langle y\rangle \Rightarrow s \in S - \langle x\rangle$ erfüllt $s^2 = 1$. D.h. wir erhalten $S = \langle x, s \mid s^2 = x^4 = 1, {}^s\mathrm{x} = x^3\rangle \cong D_8 \in Syl_2(S_4)$.

Betrachten wir nun die möglichen Untergruppen von $D_8$, sehen wir , dass $D_8$ genau zwei Untergruppen A' und B' isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ hat und damit auch $S$. Wir bezeichnen diese Untergruppen von $S$ mit A und B. Wie bereits mehrmals geschlossen wissen wir, dass Elemente aus $C_G(A)$ nicht mit Elementen der Ordnung 3 oder 7 kommutieren. Also liegt $C_G$(A) in einer 2-Sylowgruppe. Da $S$ nich abelsch ist, hat es nach obigem ein Element der Ordnung 4 und damit ist $C_G$(A) =A. Analog gilt selbiges für $C_G$(B) =B.
Aus der $D_8$ wissen wir, dass in $D_8$ A' nicht konjugiert zu B' ist. Also gilt dasselbe für A und B in S. Zusätzlich sind A und B normal in S, also sind mit Lemma 4. A und B auch in G nicht konjugiert zueinander.

Definiere $\Omega := \{gAg^{-1} \mid g \in G\} = {}^G\mathrm{A}$ und zeige $N_G(A) \cong S_4$. Analog folgt selbiges für $N_G(B)$.
Zeige $|\Omega| = \frac{21}{3} = 7$, dann gilt $|N_G(A)| = \frac{|G|}{|\Omega|} = 24$.
$A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, also hat $A = \{x_1, x_2, x_3, 1\}, x_i^2 = 1$ zwei Elemente der Ordnung 3 und $|^G\mathrm{a}| = 21$. Ziel ist eine Abbildung ${}^G\mathrm{a} = M \to \Omega$ zu finden, die drei Elemente auf eines aus $\Omega$ abbildet bzw. umgekehrt, also eine $(3:1)$ Abbildung. Betrachte $g : \Omega \to Pot(M), A \mapsto \{x_1, x_2, x_3\} = A - \{1\}$. g ist injektiv, da $A - \{1\} = g(A) = g(B) = B - \{1\} \Rightarrow A = B$ durch einfügen der 1.
Wir wollen zeigen, dass $Bild(g)$ eine Partition von M ist. $\Rightarrow |Bild(g)|$=7. Klar erkennbar ist nun $\bigcup_{X \in Bild(g)} X = M$. Zeige nun: $X, Y \in Bild(g) X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$.
Beweis durch Kontraposition: Sei $A = \{x_1, x_2, x_3, 1\}, X = \{x_1, x_2, x_3\}, A' = \{y_1, y_2, y_3, 1\}$ und $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Angenommen $X \cap Y \neq \emptyset$ und $x_1 = y_1 \in X \cap Y$. Es ist $A \subseteq C_G(x_1)$ und $A' \subseteq C_G(y_1)$. Dann folgt, weil $C_G(x1) = C_G(y_1) = D_8, A \subseteq D_8$ und $A' \subseteq D_8$. D.h. $A$ und $A'$ sind konjugiert zueinander. Wir haben aber vorher gezeigt, dass A und B isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht konugiert in G sind. Also $A = A' \Rightarrow X = Y$. Als nächstes ist auch ersichtlich, dass kein $X \in Bild(g)$ leer ist. Also ist $Bild(g)$ Partition von M.

Wir haben damit unsere (3 : 1) Abbildung und mit Lemma 3 ist $\Omega \cong Bild(g)$ und damit $|\Omega| = \frac{|M|}{3} = \frac{|^G\mathrm{a}|}{3} = 7$. Mit Lagrange folgt $N_G(A) = \frac{|G|}{|\Omega|} = 24$ und damit $N_G(A) \cong S_4$. Analog $N_G(B)$.

Zu 2): Wir nehmen $\Omega$ wie oben und definieren $\mathbb{B} := {}^G\mathrm{B}$ und erhalten mit der Formel von Lagrange, dass $\Omega$ und $\mathbb{B}$ sieben Elemente haben. Wir sagen nun, dass $X \in \Omega$ *und* $Y \in \mathbb{B}$ inzidieren, falls $\langle X, Y\rangle$ eine 2-Sylowgruppe von G ist. Wir wissen außerdem, dass $S_4$ drei 2-Sylowgruppen hat. Daher inzidiert jedes Element aus $\mathbb{B}$ mit drei Elementen aus $\Omega$ und jedes Element aus $\Omega$ inzidiert mit drei Elementen aus $\mathbb{B}$. Weiter wissen wir auch, dass G durch konjugation auf $\Omega$ und $\mathbb{B}$ operiert und die Inzidenzrelation erhält.
Wir zeige nun, dass $\Omega$ *und* $\mathbb{B}$ die Punkte und Linien auf der Fanoebene repräsentieren. Dazu reicht es aus zu zeigen, dass es für jedes $g$, welches nicht in $N_G(B)$ liegt, genau ein Element aus $\Omega$ gibt, das mit B und $g\mathrm{B}g^{-1}$ inzidiert. Dass es also für zwei verschiedene Elemente $\mathbb{B}$ genau ein Element aus $\Omega$ gibt.
Aus $N_G(B) = S_4$ folgt, dass $N_G(B) \cap N_G(g\mathrm{B}g^{-1}) \leq S_4$ und $\mathrm{B} \triangleleft S_4$. Wir wissen auch, dass jedes Element der Ordnung 3 auf $\mathbb{B}$ als Produkt zwei disjunkter 3-Zykel operiert. D.h. über die Abbildung $q \mapsto (a, b, c)(d, e, f)$ erkennen wir, dass $N_G(B)$ treu auf $\mathbb{B} - \{\mathrm{B}\}$ operiert. Weiter operiert $S_4$ transitiv auf sechs Punkten, wegen obigen und da $S_4 \not\leq S_3 \times S_3$. $\Rightarrow |Stab_{S_4}(g\mathrm{B}g^{-1})| = \frac{24}{6} = 4$. Daraus folgt für $X := N_G(B) \cap N_G(g\mathrm{B}g^{-1})\, |X| = 4$.
Wir wollen nun ausschließen, dass $X \cong V_4$ *oder* $X \cong C_4$.
Es gilt $X \ncong V_4$, da $V_4$ normal ist, X hat aber 3 konjugierte. Sei nun $D := N_G(B) = S_4 \Rightarrow X \subseteq D \cap gDg^{-1} \Rightarrow X \subseteq D$ und $g^{-1}Xg \subseteq D$. Angenommen $X \cong C_4 \Rightarrow \ \exists\, h \in D$ mit $h^{-1}g^{-1}Xgh = X \Rightarrow gh \in N_G(X) \cong D_8 \leq D$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $g$ nicht in $D$ liegt. Wir wissen daraus $X \ncong C_4$ und $N_G(X) \leq D \Rightarrow X$ ist eine der 3 nicht normalen $C_2 \times C_2$ in $D \Rightarrow X \in \Omega$. Das bedeutet X ist diese gesuchte Element der Ordnung 4 aus $\Omega$, welches mit $B$ und $g\mathrm{B}g^{-1}$ inzidiert. Wir können also $\Omega$ *und* $\mathbb{B}$ mit den Punkten und Linien der Fanoebene identifizieren. Weiter wissen wir, dass $G$ auf diesen Punkten und Linien wie die PSL(3,2) auf der Fanoebene operiert. $\Rightarrow G \cong$PSL(3,2).

Ich bin also am Ziel dieses Vortrags angekommen, welches in ein Corollar zum obigen Satz gefasst wird:

**Corollar:** $PSL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$

Beweis: Aus der Ordnungsformel bekommen wir $|PSL(2,7)| = 168$, außerdem ist die $PSL(2,7)$ einfach. D.h. mit dem Hauptsatz folgt die Behauptung.

# 5 Schlusswort

Dieser Vortrag hat sich nach dem Buch von "Donald E. Taylor - The geometry of the classical groups" gerichtet und stellt eine Ergänzung zum Kapitel 6 dar.