Orthogonale Gruppen

Vortrag zum Seminar „Klassische Gruppen und ihre Geometrie“, 30.06.2010

Dörthe Heuer, Andrea Wilke, Julia Sprungmann, Jenna Kosalla

§1 Die orthogonale Gruppe

(1.1) Definition
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$, Q: $V \to \mathbb{F}$ die quadratische Form, d.h. Q(av) = a$^2Q(v)\forall a \in \mathbb{F}, v \in V$, und die zugehörige Polarform $\beta : VxV \to \mathbb{F}$ definiert durch $\beta(u,v) := Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\forall u,v \in V$ ist eine symmetrische $\mathbb{F}$-Bilinearform. Dann ist die orthogonale Gruppe von (V,Q) definiert durch

$$\mathrm{O}(V,\mathrm{Q}) := \{f \in \mathrm{Gl}(V) \mid \mathrm{Q}(f(v)) = \mathrm{Q}(v)\ \forall\ v \in V\}.$$

Q heißt nicht ausgeartet, falls $\forall v \in V^\perp := \{x \in V | \beta(x,y) = 0 \forall y \in V\}$ mit $v \neq 0$ gilt Q(v) $\neq 0$. Wir setzen immer voraus, dass Q nicht ausgeartet ist. ◇

(1.2) Bemerkung
Es ist $\beta(v,v)$ = 2·Q(v).
Ist also char($\mathbb{F}$) $\neq 2$, so ist O(V,Q) = O(V,β) und mit Q ist auch β nicht ausgeartet.◇

(1.3) Bemerkung
Wir werden im zweiten Vortrag sehen, dass O(V,Q) = $\langle\, \sigma_a | a \in V, Q(a) \neq 0 \,\rangle$ von Spiegelungen $\sigma_a : V \to V, \sigma_a(x) = x - \frac{\beta(x,a)}{Q(a)} \cdot a$ erzeugt wird (bis auf eine Ausnahme).
Def.: SO(V,Q)= $\langle\, \sigma_a\sigma_b | a,b \in V, Q(a)Q(b) \neq 0 \,\rangle$
und SO(V,Q) = $\{g \in \mathrm{O}(V) \mid \det(g) = 1\}$, falls char($\mathbb{F}$) $\neq 2$.
(SO(V,Q) $\trianglelefteq$ O(V) mit Index 2) Setze die Kommutatorgruppe von O(V) wie folgt: O′(V,Q) =: Ω(V,Q). ◇

(1.4) Definition (Matrizen)
Angenommen char($\mathbb{F}$)$\neq$ 2. Sei $B = (e_1, ..., e_n)$ Basis von V und $J := (\beta(e_i, e_j))$ die Grammatrix von β bzgl. B. Sei $f \in \mathrm{GL}(V)$ und A die zu f bzgl. B gehörende Matrix. Dann gilt $f \in$ O(V) genau dann, wenn $A^{tr}JA = J$. ◇

(1.5) Folgerung
Sei $f \in O(V)$. Dann ist det(f) $\in \{\pm 1\}$. ◇

(1.6) Folgerung
Projektive orthogonale Gruppe PO(V) $\cong$ O(V)/$\{\pm 1\}$. ◇

(1.7) Lemma
Wenn $\mathbb{F}$ endlich und und a,b $\in \mathbb{F}^*$, dann existiert für alle c $\in \mathbb{F}$ ein x,y $\in \mathbb{F}$, sodass $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 = c$. ◇

(1.8) Satz
Wenn $\mathbb{F}$ endlich und dim $V \geq 3$, dann enthält V einen singulären Vektor. ◇

(1.9) Definition
Sei V eine orthogonale Geometrie über $\mathbb{F}_q$ und Q: $V \to \mathbb{F}_q$ die nicht ausgeartete quadratische Form. Wenn V einen singulären Vektor u enthält, dann enthält V eine hyperbolische Gerade $L_1, L_1 := \langle\, u, v \,\rangle$, und man hat eine Zerlegung von V, wie folgt $V = L_1 \perp L_1^{\perp}$. Weiter ergibt sich eine Zerlegung von $V = L_1 \perp L_2 \perp ... \perp L_m \perp W$, wobei L_i die hyperbolischen Geraden sind (mit i=1,...,m) und m der Witt-Index von V ist. Jedes L_i enthält einen singulären Vektor. W enthält keinen singulären Vektor und es gilt dim W = 0,1,2. ◇

(1.10) Bemerkung
Die drei Fälle sehen wie folgt aus:
- Fall 1 dim (W) = 0, dim (V) = 2m
$Q(\sum_{i=1}^{m}(x_ie_i+y_if_i)) = \sum_{i=1}^{m} x_iy_i$.
Schreibweise: O^+(2m,q).
- Fall 2 dim (W) = 1, denn $W = \langle\, \omega \,\rangle$, dim ($V$) = 2m+1
$Q(\sum_{i=1}^{m}(x_ie_i+y_if_i) + z \cdot \omega) = \sum_{i=1}^{m} x_iy_i + z^2 \cdot Q(\omega)$
- Fall 3 dim (W) = 2, dim (V) = 2(m+1)
$Q(\sum_{i=1}^{m}(x_ie_i+y_if_i) + xe+yf) = \sum_{i=1}^{m} x_iy_i + x^2+xy+by^2$, wobei $x^2+x+b \in \mathbb{F}_q[x]$ irreduzibel.
Schreibweise: O^-(2m+2,q) und Ω^-(2m+2,q), etc.

(1.11) Satz
O^ϵ(2,q) , mit $\epsilon = \pm 1$ ist Diedergruppe, $D_{q-\epsilon}$, mit Ordnung 2(q - ϵ) ◇

(1.12) Definition
Sei dim(V)= n und Witt-Index m und setze ϵ := 2m - n + 1 $\in \{+1, 0, -1\}$ dann entspricht dies den drei Fällen O^+(2m,q), O(2m+1,q) und O^-(2m+2,q).
Weiter sei S(V) := $\{a \in V | a \neq 0, Q(a) = 0\}$ und s(V) := |S(V)| ◇

(1.13) Lemma
Sei |$\mathbb{F}$| =: q $\Rightarrow$ s(V) = $(q^{m-\epsilon} + 1)(q^m - 1)$ ◇

(1.14) Satz (Ordnung von O(V))
Sei weiter dim(V) = n. Die Ordnung der orthogonalen Gruppe:

- Fall 1: $|O^+(2m,q)| = 2q^{m(m-1)}(1 - q^{-m}) \cdot \prod_{i=1}^{m-1}(1-q^{-2i})$

- Fall 2: $|O(2m+1,q)| = \begin{cases} 2q^{m(m-1)}\prod_{i=1}^{m-1}(1-q^{-2i}), \text{ für q ungerade} \\ q^{m(m-1)}\prod_{m-1}^{i=1}(1-q^{-2i}), \text{ für q gerade} \end{cases}$

- Fall 3: $|O^-(2m+2,q)| = 2q^{(m+1)(2m+1)}(1 + q^{-m}) \cdot \prod_{i=1}^{m}(1-q^{-2i})$ ◇

— *ausgeartete Polarformen und die Gruppe O(2m+1,2^k)* —

(1.15) Definition
Sei q = 2^k gerade. Dann ist die Abbildung σ: x $\mapsto$ x^2 ein Automorphismus von $\mathbb{F}$. Sei V eine orthogonale Geometrie über $\mathbb{F}$, welche durch die quadratische Form Q definiert ist, deren Polarfom β ist. $V^\perp$ = {x $\in V|\beta$(x,y)=0 $\forall y \in V$ ist das Radikal von V. Für $u, v \in V^\perp$ und a $\in \mathbb{F}$ gilt $Q(u+v) = Q(u) + Q(v)$ und Q(au) = $a^2 Q(u)$.
Sei O(2m+1,2^k) orthogonale Gruppe mit dim(V) = 2m+1 und q gerade. ◇

(1.16) Bemerkung
Sei Q nicht ausgeartet.
i) Wenn die Polarform β alternierend ist, dann folgt, dass $V^\perp \neq \{0\}$, d.h. β ausgeartet ist.
ii) Aus Q nicht ausgeartet folgt, dass die Dimension von $V^\perp$ gleich 1 ist.
iii) Nun bildet man die Faktorgruppe $\overline{V} := V/V^\perp$. Daraus folgt, dass die zugehörige Polarform $\overline{\beta} : \overline{V} x \overline{V} \to \mathbb{F}$, die wie folgt definiert ist $\overline{\beta}(\overline{u}, \overline{v})$:= β(u,v), mit $\overline{u} := u + V^\perp$, für $u \in V$, wohldefiniert und nicht ausgeartet ist. ◇

(1.17) Bemerkung
Sei S die Menge aller singulären Vektoren von V einschließlich der Null,
d.h. S := S(V) $\cup \{0\} \Longrightarrow \exists$ eine Bijektion S $\mapsto \overline{V} : v \mapsto \overline{v}$. ◇

(1.18) Satz
O(V) $\cong$ Sp($\overline{V}$) und insbesondere: O(2m+1,2^k) $\cong$ Sp(2m,2^k). ◇