Orthogonale Gruppen
2 Spiegelungen und Siegel Transformationen

2.1 Spiegelungen

Sei V eine orthogonale Geometrie über $\mathbb{F}$ definiert durch die quadratische Form Q mit der nicht entarteten Bilinearform β.

2.1.1 Lemma: Sei $f \in O(V)$. Dann gilt für $k \geq 1$:

$$ker(Id - f)^k = (im(Id - f)^k)^\perp.$$

2.1.2 Satz: Wenn $t \in O(V)$ jeden Vektor einer Hyperebene von V fixiert, dann gilt $t = Id$, oder es existiert ein nicht-singulärer Vektor $v \in V$, sodass für alle $w \in V$ gilt:

$$t(w) = w - Q(v)^{-1}\beta(w, v)v.$$

2.1.3 Definition (*Spiegelungen*): $t_P := t$ aus vorigem Satz ist die Spiegelung an der Hyperebene $P^\perp$, wobei $P := \langle v \rangle$, und hängt somit nur von P ab, nicht von der speziellen Wahl von v. Es gilt $det(t_P) = -1$ und $t_P^2 = Id$.

2.1.4 Lemma: Für $f \in O(V)$ ist $ft_P f^{-1} = t_{f(P)}$.

2.1.5 Bemerkung: Die orthogonalen Gruppen enthalten für $char(\mathbb{F}) \neq 2$ keine Transvektionen.

2.1.6 Lemma: Wenn t die Spiegelung an $\langle v \rangle^\perp$ ist und $f \in O(V)$, dann gilt:
$v \in im(Id - f)$ impliziert $im(Id - tf) = im(1 - f) \cap \langle u \rangle^\perp$ für jedes $u \in V$ mit $v = (Id - f)u$.

2.1.7 Korollar: (i) $dim(im(Id - tf)) = dim(im(Id - f)) \pm 1$.
(ii) Ist f ein Produkt von k Spiegelungen, so gilt: $dim(im(Id - f)) \equiv k \ (mod\, 2)$.

2.1.8 Satz: Sei (V, Q) nicht ausgeartet, $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Dann gilt: $O(V)$ ist von Spiegelungen erzeugt. Das heißt, jedes $f \in O(V)$ lässt sich als Produkt von Spiegelungen darstellen.

2.2 Siegel Transformationen

2.2.1 Definition: Für u singulär und $v \in \langle u \rangle^{\perp}$ sei

$$\rho_{u,v}(x) := x + \beta(x,v)u - \beta(x,u)v - Q(v)\beta(x,u)u.$$

Dies ist für Körper jeder Charakteristik ein wohldefiniertes Element von $SO(V)$. Falls v singulär ist, gilt $\rho_{u,v}(x) = x + \beta(x,v)u - \beta(x,u)v$. $\rho_{u,v}$ heißt Siegel Transformation.

2.2.2 Satz: Für u singulär und $v \in \langle u \rangle^{\perp}$ ist $\rho_{u,v}$ das einzige Element aus $O(V)$, dessen Einschränkung auf $\langle u \rangle^{\perp}$ von der Form $x \mapsto x + \beta(x,v)u$ ist.

2.2.3 Folgerung: Wenn u singulär ist, v, v_1 und $v_2 \in \langle u \rangle^{\perp}$ und $f \in O(V)$, dann gilt analog zu den entsprechenden Regeln für Transvektionen:
(i) $\rho_{au,v} = \rho_{u,av}$.
(ii) $\rho_{u,v_1+v_2} = \rho_{u,v_1}\rho_{u,v_2}$.
(iii) $f\rho_{u,v}f^{-1} = \rho_{f(u),f(v)}$.

Sei $P := \langle u \rangle$ ein singulärer Punkt von $\mathcal{P}(V)$. Für v nicht-singulär setze

$$X_P := \left\{ \rho_{u,v} \mid v \in \langle u \rangle^{\perp} \right\}.$$

2.2.4 Satz: Für $P := \langle u \rangle$ singulär ist X_P ein abelscher Normalteiler von $O(V)_P$ und isomorph zur additiven Gruppe von $P^{\perp} / P$.

2.2.5 Lemma: Die orthogonale Geometrie V wird von ihren nicht-singulären Vektoren aufgespannt, außer im Fall der hyperbolischen Gerade über $\mathbb{F}_2$.

2.2.6 Korollar: Für alle singulären Punkte $P := \langle u \rangle$ ist die Gruppe X_P erzeugt von den Siegel Transformationen $\rho_{u,v}$, wobei v nicht-singulär ist, außer wenn V die orthogonale Geometrie mit Dimension 4 und Witt-Index 2 über $\mathbb{F}_2$ ist.

2.2.7 Satz: Wenn u singulär ist und $v \in \langle u \rangle^{\perp}$ nicht-singulär, dann gilt

$$\rho_{u,v} = t_{\langle v \rangle}\, t_{\langle Q(v)u - v \rangle}.$$

2.2.8 Satz: Außer für $\Omega^{+}(4,2)$ gehören alle Siegel Transformationen zu $\Omega(V)$.