3. Die projektive orthogonale Gruppe

Ziel dieses Abschnitts wird es sein, zu zeigen, dass die $P\Omega(V)$ einfach ist. Zunächst wird die Operation dieser Gruppe auf der Menge der singulären Punkte von $\wp(V)$ betrachtet. Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass Q eine nicht ausgeartete quadratische Form ist, $dim(V) \geq 3$ gilt und dass der Witt Index mindestens 1 ist.

3.1. Die Operation der P$\Omega(V)$ auf der Menge der singulären Punkte

3.1.1.Lemma: Die Gruppe $PO(V)$ operiert treu auf der Menge $M := \{< u >| \, 0 \neq u \in V, \, Q(u) = 0\}$ der singulären Punkte von $\wp(V)$.

3.1.2.Lemma: Für jeden singulären Punkt P operiert die Gruppe $X_P := \left\{\rho_{u,v} \mid v \in < u >^{\perp}\right\}$ regulär auf der Menge der singulären Punkte $\notin P^{\perp}$.

3.1.3.Lemma: Falls $dimV \geq 3$ operiert die Untergruppe von $O(V)$, die von Siegel Transformationen erzeugt wird, transitiv auf den singulären Punkten von $\wp(V)$.

Nun betrachten wir die Operation der $P\Omega(V)$ auf der Menge M der singulären Punkte von $\wp(V)$.

3.1.4..Lemma: Angenommen $dim(V) \geq 5$ und Witt Index≥ 2. Dann existiert für alle singulären Punkte P, Q, R , sodass Q, $R \in P^{\perp} \setminus P$, ein Produkt von Siegeltransformationen, das P fest lässt und Q nach R schickt.

3.1.5.Lemma:

1. Witt Index ist 1 und $dim(V) \geq 3$. Dann operiert $P\Omega(V)$ zweifach transitiv auf den singulären Punkten $P(V)$.
2. Witt Index von $V \geq 2$ und $dimV \geq 5$, dann operiert $P\Omega(V)$ wie eine Permutationsgruppe mit Rang 3 auf den singulären Punkten von $P(V)$.

3.1.6.Satz: Die $P\Omega(V)$ operiert primitiv auf der Menge der singulären Punkte von $\wp(V)$.

3.2. Die Einfachheit der $P\Omega(V)$

Dicksons Invariante

Für ein $f \in O(V)$ ist die Dickson Invariante von f definiert als

$$D(f) := dim\,[V,f] \;\; (mod\,2)$$

wobei, $D(f) \in \mathbb{Z}_2$. Die Abbildung $D : O(V) \to \mathbb{Z}_2$ ist ein Homomorphismus.

3.2.1.Satz: Falls $O(V) \neq O^+(4,2)$ und $f \in O(V)$ ist ein Produkt von Spiegelungen gerader Anzahl, dann ist $f \in SO(V)$.

3.2.2.Satz: Falls die $dimV \geq 3$ und $O(V) \neq O^+(4,2)$, dann gilt $\Omega(V) = SO(V)$' und $\Omega(V)$ ist erzeugt von $[t_1, t_2]$,wobei t_1, t_2 Spiegelungen sind.

3.2.3.Satz Sei $\Omega(V) \neq \Omega^+(4,2)$. Wenn $dimV \geq 3$ und Witt Index ≥ 1, dann ist $\Omega(V)$ erzeugt von den Siegel Transformationen von V.

3.2.4.Satz: Wenn $dimV \geq 3$ und V enthält singuläre Vektoren, dann ist

$\Omega(V) = \Omega(V)'$. (bis auf $\Omega^+(4,2)$, $\Omega^+(4,3)$, $\Omega(3,3)$)

3.2.5.Satz: Die $P\Omega(V)$ ist bis auf $P\Omega(3,3)$ und den Fall $dim(V) = 4$ und Witt Index $(V) = 2$ einfach.