Orthogonale Gruppe (Teil 4)

Jenna Kosalla

14.07.2010

1 Wiederholung/Voraussetzungen

Definition 4.1.1 Eine Isometriegruppe einer polaren Geometrie heißt stark transitiv, falls sie transitiv auf den Paaren (M', F') ist, wobei F' ein polarer Rahmen und M' eine Kammer im Apartment $\sum(F')$ ist.

Satz 4.1.2 Die Gruppe G aller linearen Isometrien einer polaren Geometrie ist stark transitiv.

Satz 4.1.3 Außer für orthogonale Geometrien mit Wittindex m und Dimension 2m, formen die Gruppen B und N ein BN-Paar für G=BNB.

Lemma 4.1.4 Für jeden singulären Punkt P operiert die Gruppe

$$Xp := \left\{\rho_{u,v} \mid v \in < u >^{\perp}\right\}$$

regulär auf der Menge der singulären Punkte, welche nicht orthogonal zu P sind.

Lemma 4.1.5 Für alle orthogonalen Geometrien V der Dimension $n \geq 3$ ist $\Omega(V)$ transitiv auf den singulären Punkten von $P(V)$.

Satz 4.1.6 Ist V eine orthogonale Geometrie über einen Körper mit Charakteristik $\neq 2$, so ist jedes Element $f \in O(V)$ Produkt von $dim\,[V,\ f]$ Spiegelungen.

Satz 4.1.7 Für $O(V) \neq O^{+}(4,2)$ gehört $f \in O(V)$ zu $SO(V)$ genau dann, wenn es Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Lemma 4.1.8 Wenn E und F total singuläre Unterräume von V sind, sodass $E^{\perp} \cap F = \{0\}$, dann existiert ein total singulärer Unterraum E', der F enthält, sodass $V = E^{\perp} \oplus E'$. Für jede Basis $e_1,\ \ldots,\ e_k$von E existiert eine einzige Basis $e'_1, \ldots, e'_k$ von E', sodass $(e_1, e'_1)\,,\ \ldots,\ (e_k, e'_k)$ gegenseitig orthogonale hyperbolische Paare sind.

2 Orthogonale BN-Paare

In diesem Abschnitt sei V eine orthogonale Geometrie mit Wittindex $m \gneq 0$, beschrieben durch eine quadratische Form Q mit nicht ausgearteter Polarform β. Satz 4.1.2 und Satz 4.1.3 zeigen, dass die Gruppe $O(V)$, außer für Dimension $V = 2m$, ein BN-Paar hat. Zudem gilt:

Lemma 4.2.1 Für Dim $V \gneq 2m$ ist $\Omega(V)$ stark transitiv.

Folgerung 4.2.2 Nach diesem Lemma und mit Satz 4.1.3 kann, für $\dim V \gneq 2m$, ein BN-Paar der $O(V)$ auf $\Omega(V)$ beschränkt werden. Wie im Fall der symplektischen und unitären Geometrien ist die Gruppe B Stabilisator einer maximalen Fahne total singulärer Unterräume und N Stabilisator eines polaren Rahmens. Die Weyl Gruppe $N/B \cap N$ ist $C_2 \wr S_m$. Da $\Omega(V) \trianglelefteq SO(V)$, ist auch $SO(V)$ stark transitiv und hat damit für $\dim V \gneq 2m$ ebenfalls ein BN-Paar, ebenso wie $O(V)$, d.h.: $B_{SO} = B_O \cap SO$ und $N_{SO} = N_O \cap SO$.

Lemma 4.2.3 Für Dim $V = 2m$ ist $\Omega(V)$ transitiv auf den polaren Rahmen von $P(V)$.

Lemma 4.2.4 Für Dim $V = 2m$ hat $\Omega(V)$ zwei Bahnen auf den Kammern eines polaren Gebäudes.

3 Maximal total singuläre Unterräume

Wie im vorherigen Abschnitt sei V ein orthogonale Geometrie der Dimension n und Wittindex $m \gneq 0$, beschrieben durch eine quadratische Form Q mit nicht ausgearteter Polarform β. Sei Φ die Menge aller maximal total singulären Unterräume von V. Fassen wir Φ als Graph auf, so gilt:

(1) E und F sind durch eine Kante verbunden genau dann, wenn $dim(E \cap F) = m - 1$

(2) Der Abstand $d(E, F)$ von E nach F ist die Länge des kürzesten Weges von E nach F

Lemma 4.3.1 (i) $\forall E, F \in \Phi$ und $d(E, F) = 1$ gilt: $t(E) = F$ für eine Spiegelung $t := t_{<u>}$ mit $Q(u) = 1$

(ii) Wenn $E \in \Phi$ und t eine Spiegelung ist, dann gilt: $t(E) = E$ oder $d(E, t(E)) = 1$.

Lemma 4.3.2 $\forall E, F \in \Phi$ ist $d(E, F) = m - dim(E \cap F)$.

Satz4.3.3 Die Gruppe $O(V)$ ist transitiv auf Φ und ihre Bahnen auf $\Phi \times \Phi$ sind die Menge

$$\triangle_k := \{(E, F) \in \Phi \times \Phi \mid d(E, F) = k\}\, (0 \leq k \leq m)$$

Bemerkung 4.3.4 Ein Graph heißt bipartit (zweiteilig), wenn er als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Untergraphen geschrieben werden kann, sodass die Kanten des Graphen nur Knoten in verschiedenen Untergraphen gemeinsam haben. Äquivalent dazu hat der Graph keine Kreise ungerader Länge.

Satz 4.3.5 für $n = 2m$ ist Φ bipartit.

Satz 4.3.6 Sei V eine orthogonale Geometrie mit Wittindex m und Dimension 2m, dann gilt: $SO(V)$ und $\Omega(V)$ haben zwei Bahnen auf der Menge Φ der maximal total singulären Unterräume: zwei Unterräume E und F liegen in derselben Bahn genau dann, wenn $d(E, F)$ gerade ist.