Die generelle und spezielle linearen Gruppen

von David Dursthoff

Dieser Text beruht mehrheitlich auf dem 4. Kapitel („The General and Special Linear Groups“) aus dem Buch „The Geometry of the Classical Groups“ von Donald E. Taylor.

1 Allgemeines

1.1 Bezeichnungen:

Es seien $\mathbb{F}$ ein Körper und V ein endl. erzeugter $\mathbb{F}$-VR mit m:=Dim(V)$\geq$ 2.
Dann ist $V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{F},\ \varphi\ linear\}$ der Dualraum von V.
P(V) bezeichne den projektiven Raum über V.
$\Gamma L(V)$ sei die Gruppe aller semilinearen bij. Abbildungen von V nach V, d.h.
$\Gamma L(V) := \{f : V \to V \mid\ f\ bij.,\ \exists\ \sigma \in Aut(\mathbb{F})$ mit $f(av + w) = \sigma(a)f(v) + f(w)\ \forall a \in \mathbb{F},\ v, w \in V\}$

1.2 Definition:

Die **generelle lineare Gruppe** ist die Gruppe aller linearen, bij. Abbildungen von V nach V:

$$GL(V) := \{f : V \to V|\ f\ linear\ und\ bij.\}$$

Damit lässt sich die Determinante Det: GL(V) $\to \mathbb{F}^*$ definieren. Die **spezielle lineare Gruppe** ist dann der Kern der Determinante:

$$SL(V) := \{f \in\ Gl(V)|\ Det(f) = 1\}$$

1.3 Bemerkung:

- GL(V) $\leq \Gamma L(V)$
- SL(V) $\leq$ GL(V)
- GL(V) operiert auf V^* via $f(\varphi) := \varphi f^{-1}$

Eine (semi-)lineare bij. Abb. induziert eine proj. Abbildung. Also operieren GL(V) und SL(V) auf P(V). Die Gruppen der induzierten proj. Abbildungen bezeichnet man als **projektive generelle lineare Gruppe** (PGL(V)) bzw. **projektive spezielle lineare Gruppe** (PSL(V)).

1.4 Bemerkung:

Die proj. Abbildungen, die alle proj. Punkte auf sich selbst abbilden, werden durch die lin. Abb. der Gruppe Z(V):=$\{f : V\ \to\ V|\ v\ \mapsto av,\ a \in \mathbb{F}^*\}$ induziert (Kern der Operation von GL(V) auf P(V). Der Kern der Operation von SL(V) auf P(V) ist $Z(V) \cap SL(V) = \{f \in$ Z(V), $a^m = 1\}$
Daraus ergibt sich direkt:

$$PGL(V) \cong GL(V)/Z(V)$$

$$PSL(V) \cong SL(V)/(Z(V) \cap SL(V))$$

1.5 Definition:

Für $V = \mathbb{F}^m$ definiere $GL(m,\mathbb{F}) := GL(V)$, $SL(m,\mathbb{F}) := SL(V)$, $PGL(m,\mathbb{F}) := PGL(V)$, $PSL(m,\mathbb{F}) := PSL(V)$. Für einen $\mathbb{F}$-VR W mit Dim. m ist dann $GL(W) \cong GL(m,\mathbb{F})$, usw.
Falls außerdem $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen ist, so schreibt man auch GL(m,q),... für $GL(m,\mathbb{F}_q), usw.$

1.6 Lemma:

- $|GL(m,q)| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m}(q^i - 1)$
- $|SL(m,q)| = |PGL(m,q)| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$
- $|PSL(m,q)| = d^{-1} q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$, d:=ggT(m,q-1)

Beweis: Sei $B = (B_1, ..., B_m) \in V^m$ eine Basis von V. Dann lassen sich alle Elemente aus GL(m,q) durch die Bilder der Basisvektoren C_1, wobei diese mit $C := (C_1, ..., C_m)$ wieder eine Basis von V bilden. Für das Bild C_1 von B_1 gibt es dabei $|\mathbb{F}_q^m - \{0\}| = q^m - 1$ Möglichkeiten. Für C_2 gibt es dann noch $|\mathbb{F}_q^m - < C_1 > | = q^m - q$ Möglichkeiten, usw. .

$$\Rightarrow \ |GL(m,q)| = \prod_{i=0}^{m-1}(q^m - q^i) = \prod_{i=0}^{m-1} q^i \prod_{i=0}^{m-1}(q^{m-i} - 1) = q^{(\sum_{i=0}^{m-1} i)} \prod_{i=1}^{m}(q^m - 1) = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m}(q^m - 1)$$

Die Gruppe Z(m,q) aller skalaren Transformationen aus GL(m,q) hat natürlich $|\mathbb{F}_q^*| = q - 1$ Elemente.

$$\Rightarrow |PGL(m,q)| = |GL(m,q)/Z(m,q)| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m}(q^i - 1)/(q-1) = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$$

$$Weiterhin\,ist\ |SL(m,q)| = |Kern(Det)| = |GL(m,q)|/|Bild(Det)| = |GL(m,q)|/|\mathbb{F}_q^*| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$$

Es ist $|SL(m,q) \cap Z(m,q)| = |\{a \in \mathbb{F}^* \mid \ a^m = 1\}|$. $\mathbb{F}^*$ ist zyklisch mit der Ordnung q-1 von einem beliebigen Element $b \in \mathbb{F}^*$ erzeugt:
$\mathbb{F}^* =< b >= \{b^x | \ x \in \{0, ..., q-2\}$
$(b^x)^m = 1 \ \Leftrightarrow (q-1)|x * m \ \Leftrightarrow \ \frac{(q-1)*m}{d}|x * m \ \Leftrightarrow \ \frac{(q-1)}{d}|x$
$\Rightarrow \ SL(m,q) \cap Z(m,q) = \{b^{a*\frac{(q-1)}{d}} I_m | \ a = 0, ..., d\}$
$\Rightarrow \ |SL(m,q) \cap Z(m,q)| = d \Rightarrow |PSL(m,q)| = |SL(m,q)|/d = d^{-1} q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es zu zeigen, dass PSL(V) eine einfache Gruppe ist (mit zwei Ausnahmen). Dies tue ich mit Hilfe von Iwasawas Einfachheitskriterium, dass in Kapitel 1 (Satz 1.2, S. 3) von Taylors Buch „The Geometry of the Classical Groups"vorgestellt wird. Danach wird PSL(V) für Dim(V)=m=2 genauer betrachtet.

2 Transvektionen

Um die Voraussetzungen von Iwasawas Einfachheitskriterium zu überprüfen, hilft es sogenannte Transvektionen zu betrachten.

2.1 Definition:

Sein $\varphi \in V^*$ und $u \in V$, sodass $\varphi(u) \neq -1$.
Dann ist $t_{\varphi,u} : V \to\ V,\ v \mapsto v + \varphi(v)u$ lin. und bij., also $t_{\varphi,u} \in GL(V)$
Ist $\varphi(u) = 0$, so heißt $t_{\varphi,u}$ **Transvektion**, ansonsten **Dilatation**.

2.2 Beispiel:

- Falls φ=0 oder u=0, so ist $t_{\varphi,u} = Id_V$
- Sei $B = (u, B_2, ..., B_m) \in V^m$ eine Basis von V.

$$\Rightarrow\ {}^{B}{t_{\varphi,u}}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(B_2) & \dots & \varphi(B_m) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

  Wählt man eine Basis $C = (u, C_2, ..., C_m) \in V^m$ mit $C_3, ...C_m \in Kern(\varphi)$ und $\varphi(C_2) = 1$, so ist ${}^{C}{t_{\varphi,u}}^{C} = Diag(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1)$ die transponierte Jordan-Normalform.

- Sei $B = (B_1, ..., B_m) \in V^m$ eine Basis von V und $B^* \in (V^*)^m$ die zugehörige Dualbasis.
  Für $i, j \in \{1, ..., m\},\ i \neq j,\ a \in \mathbb{F}$ ist dann $t_{B_j^*, aB_i}$ eine Transvektion. Die Matrix ${}^{B}{t_{B_j^*,aB_i}}^{B}$ ist dann die elementare Umformungsmatrix des Zeilen-Gaußalgorithmus, die die j-te Zeile a-mal auf die i-te addiert.

2.3 Satz (Eigenschaften von Transvektionen):

Seien $\varphi, \psi \in V^*,\ u, w \in V$ mit $\varphi(u) = \varphi(w) = \psi(u) = \psi(w) = 0$ und $a \in \mathbb{F}, f \in GL(V)$.
Dann gilt:

1. $t_{\varphi,au} \ =\ t_{a\varphi,u}$
2. $t_{\varphi+\psi,u} \ =\ t_{\varphi,u}\ t_{\psi,u}$, insb. ${t_{\varphi,u}}^{-1} \ =\ t_{-\varphi,u}$
3. $t_{\varphi,u+w} \ =\ t_{\varphi,u}\ t_{\varphi,w}$
4. $ft_{\varphi,u}f^{-1} \ =\ t_{f(\varphi),f(u)} \ =\ t_{\varphi f^{-1},f(u)}$
5. $Det(t_{\varphi,u}) = 1$, also $t_{\varphi,u} \in SL(V)$

Beweis: Sei $v \in V$
Zu 1.: $t_{\varphi,au}(v){=}v + \varphi(v)au{=}v + (a\varphi)(v)u{=}t_{a\varphi,u}(v)$
Zu 2.: $t_{\varphi+\psi,u}(v){=}v + (\varphi + \psi)(v)u{=}v + \varphi(v)u + \psi(v)u$ und
$t_{\varphi,u}(t_{\psi,u}(v)){=}t_{\varphi,u}(v + \psi(v)u){=}v + \psi(v)u + \varphi(v + \psi(v)u)u{=}v + \psi(v)u + \varphi(v)u + \psi(v)\underbrace{\varphi(u)}_{=0}u$, also
$t_{\varphi+\psi,u} = t_{\varphi,u}\ t_{\psi,u}$. Es ist $t_{\varphi,u}\ t_{-\varphi,u}{=}t_{\varphi-\varphi,u}{=}Id_V$, also ${t_{\varphi,u}}^{-1} = t_{-\varphi,u}$.
Zu 3.: $t_{\varphi,u+w}(v){=}v + \varphi(v)(u + w){=}v + \varphi(v)u + \varphi(v)w$ und
$t_{\varphi,u}(t_{\varphi,w}(v)){=}t_{\varphi,u}(v + \varphi(v)w){=}v + \varphi(v)w + \varphi(v + \varphi(v)w)u{=}\ v + \varphi(v)w + \varphi(v)u + \varphi(v)\underbrace{\varphi(w)}_{=0}u$, also
$t_{\varphi,u+w} = t_{\varphi,u}\ t_{\varphi,w}$.
Zu 4.: $ft_{\varphi,u}f^{-1}(v){=}(ft_{\varphi,u})(f^{-1}(v)){=}f(f^{-1}(v) + \varphi(f^{-1}(v))u){=}\ v + \varphi(f^{-1}(v))f(u) = t_{\underbrace{\varphi f^{-1}}_{=f(\varphi)},f(u)}(v)$

Zu 5.: Sei $B = (B_1, ..., B_m) \in V^m$ eine Basis von V und $B^* \in (V^*)^m$ die zugehörige Dualbasis. Dann kann $f \in GL(V)$ so gewählt werden, dass $f(\varphi) = B_2^*$ und $f(u) = B_1$.

$$\Rightarrow^B ft_{\varphi,u}f^{-1B} =^B t_{f(\varphi),f(u)}{}^B =^B t_{B_2^*,B_1}{}^B \overset{s.Bsp.2.2(2)}{=} Diag(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1)$$

$\overset{Det\ inv.\ bzgl.\ Konjugationsop.}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Det}(\mathrm{t}_{\varphi,u}) = Det(ft_{\varphi,u}f^{-1}) = 1.$

Zusatz: Ist $m = Dim(V) \geq 3$, so kann das $f \in GL(V)$ aus dem letztem Beweis auch mit $Det(f) = 1$, also $f \in SL(V)$ gewählt werden. Also gibt es dann eine Konjugationsklasse, die alle Transvektionen enthält.
Beweis: Sein $B \in V^m$ eine Basis, $t_{\varphi,u}$ eine Transvektion und $f \in GL(V)$ mit ${}^Bft_{\varphi,u}f{-}1^B = Diag(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1)$.
Definiere $a := Det(f)$ und $g \in GL(V)$ durch ${}^Bg^B := Diag(1, 1, a^{-1}, 1, ..., 1)$.
$\Rightarrow^B gft_{\varphi,u}f{-}1g^{-1B} = gDiag(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1)g^{-1} = Diag(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1)$ und $gf \in SL(V)$.

3 Die Einfachheit von PSL(V)

Zunächst muss noch gezeigt werden, dass PSL(V) bzw.SL(V) primitiv auf P(V) operiert:

3.1 Satz:

PSL(V) operiert 2-fach transitiv auf den Punkten von P(V), d.h. 2 verschiedene Punkte können auf 2 beliebige (unterschiedliche) Punkte abgebildet werden. Damit ist dann natürlich auch SL(V) 2-fach transitiv.
Die doppelte Transitivität impliziert, dass SL(V) primitiv auf P(V) operiert.
Bew.:
Seien $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ mit $< v_1 > \neq < v_2 > und < w_1 > \neq < w_2 >$
Erweitere (v_1, v_2), (w_1, w_2) zu Basen $(v_1, v_2, ..., v_m), (w_1, w_2, ..., w_m) \in V^m$ und definiere $f \in GL(V)$ über $f(v_1) = aw_1$ und $f(v_i) = w_i$, i=2,...m, mit $a \in \mathbb{F}$ so gewählt, dass Det(f)=1. Dann ist die induzierte proj. Abb. P(f) in PSL(V) und sie bildet $< v_1 >$ und $< v_2 >$ auf $< w_1 >$ bzw. $< w_2 >$ ab.

3.2 Satz:

Sei $u \in V\backslash\{0\}$ und definiere $P :=< u >,\ X_P := \{t_{\varphi,u} |\ \varphi \in V^*$ und $\varphi(u) = 0\}$. Dann gilt:

1. X_P ist abelsche, normale Untergruppe von $SL(V)_P = Stab_{SL(V)}(P)$
2. $SL(V) =< fX_Pf^{-1} |\ f \in SL(V) >$

Beweis: Untergruppe ist klar. Wegen Satz 2.3 (2.) $(t_{\varphi+\psi,u} = t_{\varphi,u}t_{\psi,u})$ ist X_P abelsch. Es ist $f(P) = P\ \forall f \in Stab_{SL(V)}(P)$ und damit ist X_P wegen Satz 2.3 (4.) $(ft_{\varphi,u}f^{-1} = t_{f(\varphi),f(u)})$ auch normal.
G:=$< fX_Pf^{-1} |\ f \in SL(V) >$. $G \leq SL(V)$ klar. Sei $B \in V^m$ eine Basis von V. Aus Satz 2.3 und dem Zusatz danach folgt, dass alle Transvektionen in G liegen. Bleibt noch zu zeigen, dass alle $f \in SL(V)$ ein Produkt von Transvektionen sind. Aus Bsp. 2.2 wissen wir, dass die Additionsmatrizen Matrizen bzgl. Transvektionen sind. Also lässt sich ${}^Bf^B$ durch Linksmultiplikation

mit Transvektionsmatrizen auf Diag(1,...1,Det(f)) bringen. Wegen Det(f)=1 ist f ein Produkt von Transvektionen.

3.3 Satz:

Für $m \geq 3$ *oder* $|\mathbb{F}| \geq 4$ ist $SL(m, \mathbb{F})' = SL(m, \mathbb{F})$.

Beweis: Sei zunächst $m \geq 3$. Seien $t_{\varphi,u}, t_{\psi,u}$ Transvektionen mit φ, ψ lin. unabhängig.
Dann existiert $f \in SL(V)$ mit $t_{\varphi,u} = ft_{\psi,u}f^{-1}$.

$$\Rightarrow \; t_{\varphi-\psi,u} = t_{\varphi,u}(t_{\psi,u})^{-1} = ft_{\psi,u}f^{-1}t_{\psi,u}{}^{-1} \in SL(m,(F))'$$

Da $SL(m,(F))$ von der Konjugationsklasse der Transvektionen erzeugt wird, ist $SL(m,(F)) = SL(m,(F))'$.
Nehme nun m=2 und $|\mathbb{F}| \geq 4$ an. Sein $B = (B_1, B_2) \in \mathbb{F}^2$ eine Basis und $B^* \in (\mathbb{F}^*)^2$ die zugehörige Dualbasis.
Definiere $f \in SL(V)$ durch $f(B_1) := aB_1$ und $f(B_2) := a^{-1}B_2$ mit $a \in \mathbb{F}^*$, sodass $a^2 \neq 1$.
$\Rightarrow \; ft_{B_2^*,bB_1}f^{-1} = t_{B_2,a^2bB_1}$
$\Rightarrow \; ft_{B_2^*,bB_1}f^{-1}(t_{B_2^*,bB_1})^{-1} = t_{B_2,(a^2-1)bB_1} \in SL(m,\mathbb{F})'$
Dabei kann b beliebig in $\mathbb{F}$ gewählt werden, sodass $SL(2,\mathbb{F})'$ alle Transvektionen mit zugehörigen Matrizen (bzgl. einer entsprechend gewählten Basis) der Form $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{F}$ beliebig, enthält.
Damit enthält $SL(2,\mathbb{F})'$ alle Transvektionen und es folgt $SL(2,\mathbb{F}) = SL(2,\mathbb{F})'$

Damit sind alle Voraussetzungen vom Iwasawas Kriterium erfüllt.

3.4 Satz:

Mit Ausnahme von $PSL(2,\mathbb{F}_2)$ *und* $PSL(2,\mathbb{F}_3)$ sind die Gruppen $PSL(m,\mathbb{F}),\; m \geq 2$, einfach.

Beweis: Mit Iwasawas Kriterium folgt, dass $SL(m,\mathbb{F})/[SL(m,\mathbb{F})(P(m,\mathbb{F}))]$ für $m \geq 3$ oder $|\mathbb{F}| \geq 4$ einfach ist. $SL(m,\mathbb{F})(P(m,\mathbb{F}))= \{f \in SL(m,\mathbb{F}),\; f(P) = P \;\forall P \in P(V)\;\}=SL(m,\mathbb{F}) \cap Z(m,\mathbb{F})$. Also ist $SL((m,\mathbb{F}))/[SL(m,\mathbb{F}) \cap Z(m,\mathbb{F})] \cong PSL(m,\mathbb{F})$ einfach.

4 Die Gruppen PSL(2,q)

Im letzten Abschnitt werden die Gruppen PSL(2,q) genauer betrachtet. Ich zeige außerdem, dass PSL(2,2) und PSL(2,3) tatsächlich nicht einfach sind, die Einfachheit der Alternierenden Gruppen mit Ordnung ≥ 5 und einige Isomorphien zwischen verschiedenen Gruppen.

Für $< e_1, e_2 >= \mathbb{F}_q^2$ sind die Punkte der projektiven Gerade $P(2,\mathbb{F}_q)$ dann $< e_1 >$ und $< ae_1 + e_2 >,\; a \in \mathbb{F}_q$.
Identifiziert man $\infty :=< e_1 >$ und $a :=< ae_1 + e_2 >$, so kann man $P(2,\mathbb{F}_q)$ als $P := \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ auffassen. $PSL(2,q) = \{f : P \to P|\; z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, ad-bc ist Quadrat in $\mathbb{F}_q^*\} =$
$\{g \in PSL(2,q)|^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $D := ad - bc$ ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_q^*\}$

4.1 Bemerkung:

- $PSL(2,q)_\infty = Stab_{PSL(2,q)}(\{\infty\}) = \{f : P \to P,\ z \mapsto a^2 z + b,\ a \in \mathbb{F}_q^* \ und\ b \in \mathbb{F}_q\} =$ $\{g \in PSL(2,q) | ^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\ mit\ a \in \mathbb{F}_q^*\ und\ b \in \mathbb{F}_q\}$
- $PSL(2,q)_{\infty,0} = Stab_{PSL(2,q)}(\{\infty, 0\}) = \{f : P \to P,\ z \mapsto a^2 z,\ a \in \mathbb{F}_q^*\}=$ $\{g \in PSL(2,q) | ^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\ mit\ a \in \mathbb{F}_q^*\}$ ist zyklische Gruppe von der Ordnung q-1, falls q gerade und (q-1)/2, falls q ungerade.
- $X_\infty = \{f : P \to P,\ z \mapsto z+b,\ b \in \mathbb{F}_q\}$=$\{g \in PSL(2,q) | ^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ mit\ b \in \mathbb{F}_q\}$ ist Normalteiler von PSL(2,q) und isomorph zur additiven Gruppe $(\mathbb{F}, +)$
- $PSL(2,q)_\infty$ ist semidirektes Produkt von X_∞ und $PSL(2,q)_{\infty,0}$.

Da $|PSL(2,q)| = |PSL(2,q)_\infty| * |PSL(2,q)\infty|$ ist, kann man auch so die Ordnung von PSL(2,q) bestimmen: $|PSL(2,q)|$= q(q-1)(q+1) falls q gerade und $|PSL(2,q)| = \frac{q(q-1)(q+1)}{2}$ falls q ungerade.

Da $|P| = q+1$ ist, gilt $PSL(2,q) \leq Sym_P = S_{q+1}$. Mit dieser Idee kann man einige interessante Isomorphismn finden:

4.2 Satz:

- $PSL(2,2) \cong S_3$ Da S_3 nicht einfach ist, ist PSL(2,2) auch nicht einfach.
- $PSL(2,3) \cong A_4$ (Alternierende Gruppe der Ordnung 4) Da A_4 nicht einfach ist, ist PSL(2,3) auch nicht einfach.
- $PSL(2,4) \cong A_5$ Da PSL(2,4) einfach ist, ist damit auch A_5 einfach.

Beweis: $PSL(2,2) \leq S_3$ und $|PSL(2,2)| = 2 * 1 * 3 = 6 = |S_3|$, also $PSL(2,2) \cong S_3$.
$PSL(2,3) \leq S_4$ und $|PSL(2,3)| = \frac{3*2*4}{2} = 12 = \frac{|S_4|}{2}$, also hat PSL(2,3) als Untergruppe den Index 2, ist also Normalteiler in S_4. Da A_4 der einzige nicht triviale Normalteiler von S_4 ist, ist $PSL(2,3) \cong A_4$.
Für die dritte Behauptung kann man das gleiche Argument verwenden oder aber auch einen Isomorphismus angeben: Definiere $\kappa : PSL(2,4) \to S_5 = Sym_{P(2,4)}$. $g \mapsto (< v > \mapsto < g(v) >)$.
$\Rightarrow Kern(\kappa) = \{z \mapsto z\} \Rightarrow \kappa$ inj.
$\Rightarrow PSL(2,4) \cong Bild(\kappa)$
Aus $PSL(2,4)' = PSL(2,4)$ folgt $Bild(\kappa)' = Bild(\kappa)$.
$\Rightarrow Bild(\kappa) \leq A_5$
Da $|PSL(2,4)| = 4 * 3 * 5 = 60 = |S_5|/2 = |A_5|$ ist, gilt die Behauptung $PSL(2,4) \cong A_5$.

4.3 Satz:

In der letzten Bem. wurde gezeigt, dass A_5 einfach ist. Damit kann man per vollständiger Induktion zeigen, dass die alternierenden Gruppen A_n für $n \geq 5$ einfach sind.

Beweis: Der Induktionsanfang wurde bereits gezeigt.

I.V.: A_n sei einfach für ein $n \geq 5$
I.S.: z.z.: A_{n+1} ist einfach
Def. für $i \in \{1, ..., n+1\}$ $G_i := Stab_{A_{n+1}}(i) \cong A_n$, also sind die G_i einfach.
Sei $A \trianglelefteq A_{n+1}$. Dann ist $A \cap G_i$ ein Normalteiler von G_i
$\Rightarrow \forall_{i \in \{1,...,n+1\}} A \cap G_i = \{1\} \ \vee \ A \cap G_i = G_i$
Für $\sigma \in A_{n+1}$ mit $\sigma(i) = j,\ i \neq j$ ist $\sigma G_i \sigma^{-1} = G_j$.
Falls $A \cap G_i = G_i$ für ein $i \in \{1, ..., n+1\}$, so ist $G_j = \sigma G_i \sigma^{-1} = \sigma A \cap G_i \sigma^{-1} \leq A$, da A Normalteiler (invariant bzgl. der Konjugationsoperation). $\Rightarrow A \cap G_j = G_j$

Also gilt $A \cap G_i = G_i \ \forall i \in \{1, ..., n+1\}$ oder $A \cap G_i = \{1\} \ \forall i \in \{1, ..., n+1\}$

Fall $A \cap G_i = G_i \ \forall i \in \{1, ..., n+1\}$: Dann enthält A alle 3-Zykel aus A_{n+1}. Diese erzeugen A_{n+1}, also ist $A = A_{n+1}$.

Fall $A \cap G_i = \{1\} \ \forall i \in \{1, ..., n+1\}$: Das heißt, dass jedes Element aus A (außer dem 1-Element) keine Zahl fixiert. $(\pi(j) \neq j \ \forall j \in \{1, ..., n+1\},\ \pi \in A \backslash \{1\})$
Seien nun $\pi, \varphi \in A$ mit $\pi(i) = \varphi(i)$ für ein $i \in \{1, ..., n+1\} \Rightarrow \varphi^{-1}\pi(i) = i$ und $\varphi^{-1}\pi \in A$ $\Rightarrow \varphi^{-1}\pi = 1 \Rightarrow \pi = \varphi$
Also bilden unterschiedliche Elemente aus A keine Zahl gleich ab. Es muss noch gezeigt werden, dass $A = \{1\}$ gilt:
Man nimmt zunächst an, dass A 3-Zykel oder größere enthält. Annahme (o.B.d.A.): $(1, 2, ..., r)\tau \in A$ mit $r \geq 3,\ \tau \in A_{n+1}$ und disjunkt zu (1,2,...,r).
Da A Normalteiler ist, ist $\pi := (3, 4, 5)(1, 2, ..., r)\tau(3, 4, 5)^{-1} \in A$. Da $((1, 2, ..., r)\tau)\ (1) = 2$, $((1, 2, ..., r)\tau)(2) = 3$, aber auch $\pi(1) = 2$ und $\pi(2) = 4$ gilt, ist dies ein Widerspruch zu den oben gewonnenen Erkenntnissen.
Damit kann A nur Produkte aus disjunkten 2-Zyklen enthalten. Diese Annahme führt aber auch zu einem Widerspruch: Annahme (o.B.d.A): $\pi := (1, 2)(3, 4)...(n, n+1) \in A$. Dann ist auch $\varphi := (1, 2, 3)\pi(1, 3, 2) = (1, 4)(2, 3)(5, 6)...(n, n+1) \in A$. π und φ bilden n gleich ($\pi(n) = \varphi(n) = n+1$), aber 1 unterschiedlich ab ($\pi(1) = 2$ und $\varphi(1) = 4$). Dies ist ein Widerspruch. Also ist $A = \{1\}$.
Damit ist gezeigt, dass A_{n+1} einfach ist.

Zum Ende gebe ich noch einige Isomorphismen an, unter anderem alle zwischen den alternierenden und proj. speziellen Gruppen. Ideen zu den Beweisen stehen im Buch in Kapitel 4 (S.24f). Einige Isomorphismen werden (evtl.) in späteren Vorträgen konstruiert.

4.4 Bemerkung:

- $PSL(2, 3) \cong A_4$
- $PSL(2, 4) \cong PSL(2, 5) \cong A_5$
- $PSL(2, 7) \cong PSL(3, 2)$ (da $|PSL(2, 7)| = |PSL(3, 2)| = 168$)
- $PSL(2, 9) \cong A_6$ ($|PSL(2, 9)| = |A_6| = 360$)
- $PSL(4, 2) \cong A_8$ (obwohl $|PSL(3, 4)| = |PSL(4, 2)| = |A_8| = 20160$, ist PSL(3,4) nicht isomorph zu PSL(4,2))

Quellen:

Donald E. Taylor, The geometry of the classical groups (1992), Heldermann-Verlag
B. Huppert, Endliche Gruppen I (1967), Springer-Verlag
http://sierra.nmsu.edu/morandi/OldWebPages/Math481Fall2004/SimplicityOfAn.pdf (Bew. von 4.2)