Polare Geometrie

Handout zum Vortrag von Jan Knappmann und Johannes Anschütz

1 Sesquilinearformen

Im gesamten Vortrag bezeichne K einen Körper, V einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum mit $n := dim\ V \geq 3$ und $\mathbb{P}(V) := \{X \leq V\}$ die Menge der Teilräume von V. Außerdem sei $\mathbb{P}(V)$ auf natürliche Weise mit der partiellen Ordnung " $\leq$ " versehen.

Definition 1.1. *Für einen Körperautomorphismus $\sigma : K \to K$ ist eine **σ-Sesquilinearform** β auf V eine Abbildung $\beta : V \times V \to K$, die linear in erster und σ-semilinear in zweiter Komponente ist, d.h. $\forall\ v, w \in V, a \in K$ gilt: $\beta(v, aw) = \beta(v, w)\sigma(a)$.*

Definition 1.2. *1. Eine Sesquilinearform β heißt **nicht ausgeartet**, falls*

$$\beta(u, v) = 0,\ \forall\ u \in V \Rightarrow v = 0 \text{ gilt.}$$

*2. Ein Paar $(u, v) \in V^2$ heißt **orthogonal** bzgl. β, falls $\beta(u, v) = 0$.*

*3. Der **Orthogonalraum** $X^\perp$ eines Unterraums $X \leq V$ bzgl. β ist definiert als $X^\perp := \{u \in V | \beta(u, v) = 0\ \forall\ v \in X\}$.*

*4. Ist $S \leq V^*$, so heißt $S^o := \{v \in V | \varphi(v) = 0\ \forall\ \varphi \in S\} \leq V$ der **Annihiliator** von S.*

Bemerkung 1.3. *1. Eine Sesquilinearform β induziert semilineare Abbildungen von V nach V^*, nämlich $f : V \to V^* : v \to \beta(-, v)$ und $g : V \to V^* : v \to \sigma^{-1}\beta(v, -)$. Ebenso induziert eine semilineare Abbildung $f : V \to V^*$ eine Sesquilinearform $V \times V \to K : (v, u) \to f(u)(v)$.*

2. $\pi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) : X \to \{u \in V | \beta(u, x) = 0\ \forall\ x \in X\} = (f(X))^o = X^\perp$ und $\tau : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) : X \to \{v \in V | \sigma^{-1}\beta(x, v) = 0\ \forall\ x \in X\}$ definieren inverse ordnungsumkehrende Bijektionen (Korrelationen) von $\mathbb{P}(V)$.

Definition 1.4. *Eine Sesquilinarform β heißt **reflexiv**, falls*

$$\beta(u, v) = 0 \Rightarrow \beta(v, u) = 0\ \forall\ u, v \in V.$$

Bemerkung 1.5. *Ist β reflexiv, so sind die Abbildungen π und τ aus Bemerkung 1.3.2. gleich und es gilt $X = X^{\perp\perp}\ \forall\ X \leq V$.*

Satz 1.6. *(Hauptsatz der projektiven Geometrie) 1) Sind V_1, V_2 K-Vektorräume mit dim $V_i \geq 3$ und $\varphi : \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ eine Kollineation, so existiert ein $\sigma \in Aut(K)$ und eine σ-semilineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$, sodass $\varphi = \mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V_1) \to P(V_2) : X \to f(X)$ ist.*
2) Ist $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(f')$ für eine weitere τ-semilinare Abbildung f', so ist $\sigma = \tau$ und es existiert ein $a \in K$ mit $af = f'$.

Satz 1.7. *(Birkhoff - von Neumann) Sei V ein K-VR mit $dimV \geq 3$ und π eine Korrelation der Ordnung 2. Dann wird π von einer nicht-ausgearteten σ-Sesquilinearform β der folgenden Typen induziert:*

1. ***alternierend**, d.h. $\sigma = Id_K$ und $\beta(v,v) = 0 \; \forall \; v \in V$.*
2. ***symmetrisch**, d.h. $\sigma = Id_K$ und $\beta(u,v) = \beta(v,u) \; \forall \; u,v \in V$.*
3. ***hermitesch**, d.h. $|\sigma| = 2$ und $\beta(u,v) = \sigma(\beta(v,u)) \; \forall \; u,v \in V$.*

Definition 1.8. *Eine **quadratische Form** Q auf V ist eine Abbildung $Q : V \to K$ mit*

$$Q(av) = a^2 Q(v), \; \forall \; a \in K \text{und Bilinearform } \beta(u,v) := Q(u+v) - Q(u) - Q(v).$$

*β heißt auch **Polarform** zu Q. Eine quadratische Form Q heißt **nicht ausgeartet**, falls*

$$\beta(u,v) = Q(u) = 0 \; \forall \; v \in V \Rightarrow u = 0.$$

(Q nicht-ausgeartet $\not\Rightarrow$ β nicht-ausgeartet !).

2 Isometrien und der Satz von Witt

Definition 2.1. *Seien β_1, β_2 reflexive σ_1- bzw. σ_2- Sesquilinearformen auf V_1 bzw. V_2. Eine injektive σ-semilineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ heißt **Isometrie**, falls gilt $\sigma_1\sigma = \sigma\sigma_2$ und $\beta_2(f(u), f(v)) = \sigma\beta_1(u,v) \; \forall \; u,v \in V_1$. Eine Isometrie heißt **linear**, falls $\sigma = Id$ gilt.*

Lemma 2.2. *Sei $V_1 = U \oplus W$ und $f : U \to V_2, g : W \to V_2$ Isometrien mit demselben Körperautomorphismus σ. Wenn $Bild(f) \cap Bild(g) = \{0\}$ und $\beta_2(f(u), g(w)) = \sigma\beta_1(u,w)$ sowie $\beta_2(g(w), f(u)) = \sigma\beta_1(w,u) \; \forall \; u \in U, w \in W$ gilt, dann ist $f + g : V_1 \to V_2 : u + w \to f(u) + g(w)$ ebenfalls eine Isometrie.*

Definition 2.3.

1. *Ein Vektor $u \neq 0$ heißt **isotrop** bzgl. β, falls $\beta(u,u) = 0$.*
   *Ein Teilraum $W \leq V$ heißt **total isotrop**, falls $W \subseteq W^{\perp}$.*
2. *Ein Vektor $u \neq 0$ heißt **singulär** bzgl. Q, falls $Q(u) = 0$.*
   *Ein Teilraum $W \leq V$ heißt **total singulär**, falls $Q(W) = \{0\}$.*
3. *Ein Paar isotroper Vektoren (u,v) heißt **hyperbolisches Paar**, falls $\beta(u,v) = 1$.*

Lemma 2.4. *Sei L ein nicht-ausgearteter 2-dim. Teilraum von V und $u \in V$ bzgl. β isotrop. Dann ist $L = \langle u,v \rangle$, wobei (u,v) ein hyperbolisches Paar ist. Ist Q eine quadratische Form auf V und u singulär, dann kann v so gewählt werden, dass $Q(v) = 0$ gilt.*

Satz 2.5. *(Satz von Witt) Sei $U \leq V$ und $f : U \to V$ eine lineare Isometrie bzgl. der nicht-ausgearteten Sesquilinarform β. Dann existiert eine lineare Isometrie $g : V \to V$, die f auf V fortsetzt, d.h. $g_{|U} = f$.*

Definition 2.6. *Der **Wittindex** m von V ist definiert als die Dimension eines maximalen total isotropen Teilraums von V. Falls β nicht ausgeartet ist, gilt: $m \leq \frac{1}{2} dimV$.*

3 Kollineation und Korrelationen

Definition 3.1. *1. Eine **Kollineation** von $\mathbb{P}(V)$ ist eine bijektive, ordnungserhaltende Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, d.h. $\forall\ X, Y \in \mathbb{P}(V)$ gilt: $X \leq Y \Rightarrow \varphi(X) \leq \varphi(Y)$.*

*2. Eine **Korrelation** von $\mathbb{P}(V)$ ist eine bijektive, ordnungsumkehrende Abbildung $\pi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, d.h. $\forall\ X, Y \in \mathbb{P}(V)$ gilt: $X \leq Y \Rightarrow \pi(X) \geq \pi(Y)$.*

*3. Eine Korrelation π heißt **Polarität**, wenn π Ordnung 2 hat. $(\mathbb{P}(V), \pi)$ heißt dann **polare Geometrie**.*

Bemerkung 3.2. *Über die Annihilatorkorrespondenz lassen sich Korrelationen von $\mathbb{P}(V)$ mit Kollineation $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ identifizieren, also werden Korrelationen (Polaritäten) von nicht-ausgearteten (reflexiven) Sesquilinearformen induziert. Nach dem Satz von Birkhoff-von Neumann existieren also genau drei verschiedene polare Geometrien:*

1. ***symplektisch*** *$\Leftrightarrow \beta$ alternierend*

2. ***orthogonal*** *$\Leftrightarrow \beta$ symmetrisch (betrachte $char(K) = 2$ gesondert).*

3. ***unitär*** *$\Leftrightarrow \beta$ hermitesch.*

Bemerkung 3.3. *Die Abbildung $V \to V^{**} : v \to (V^* \to K : \delta \to \delta(v))$ ist ein natürlicher Isomorphismus und identifiziert V mit seinem Bidualraum V^{**}*

Definition 3.4. *Sei $f : V \to W$ eine σ-semilineare Abbildung. Dann heißt:*

$$f^* : W^* \to V^* : \varphi \to \sigma^{-1}\varphi f$$

*die zu f **transponierte Abbildung**. Zu f bijektiv sei $\overline{f} := f^{-*}$.*

Bemerkung 3.5. *Es sei $\Gamma L(V) := \{f : V \to V \text{semilinear und bijektiv}\}$ und $\Gamma L^*(V) := \Gamma L(V) \cup \{f : V \to V^* \text{semilinear und bijektiv}\}$. Dann wird $\Gamma L^*(V)$ durch die Abbildung*

$$\circ : \Gamma L^*(V) \times \Gamma L^*(V) \to \Gamma L^*(V) : (f, g) \to \begin{cases} fg & , g : V \to V \\ \overline{f}g & , g : V \to V^* \end{cases}$$

zu einer Gruppe.

Bemerkung 3.6. *Sei β eine n.a. σ-Sesquilinarform und $p : V \to V^* : v \to \beta(-, v)$. Für jedes $f \in \Gamma L(V)$ τ-semilinear ist $f^\perp := p \circ f \circ p^{-1} (= \overline{p}\overline{f}p^*)$ die eindeutige Abbildung in $\Gamma L(V)$ mit*

$$\beta(f^\perp(u), f(v)) = \sigma\tau\sigma^{-1}\beta(u, v) \quad \forall\ u, v \in V.$$

4 Das polare Gebäude

In diesem Kapitel sei π eine Polarität von $\mathbb{P}(V)$ und β eine nicht-ausgeartete reflexive σ-Sesquilinearform, sodass $p : V \to V^* : v \to \beta(-, v)$ die Polarität π induziert.

Definition 4.1. *1. Es sei $\Delta(V) := \{V_1 \subsetneq .. \subsetneq V_k\}$ die Menge aller echten Fahnen von V.*

2. Ist $\mathcal{F} := \{P_1, .., P_n\}$ ein Rahmen von $\mathbb{P}(V)$, dann sei $\Sigma(\mathcal{F}) := \{$Fahnen vom Rahmen $\mathcal{F}\}$

3. $(\Delta(V), \Sigma)$ ist ein Gebäude und $\Gamma L^*(V)$ operiert fahnenerhaltend auf $\Delta(V)$.

Bemerkung 4.2. *1. $N_{\Gamma L(V)}(\langle p \rangle) = C_{\Gamma L(V)}(p)$ operiert auf $Fix_p(\Delta(V))$.*

2. Die Fixpunkte von p auf $\Delta(V)$ entsprechen den Fahnen total isotroper Teilräume.

Definition 4.3. *Es sei $\Delta_\pi(V) := \{F = \{V_1 \subset .. \subset V_k\} | V_i$ total isotrop$\}$ die Menge aller echten Fahnen total isotroper Teilräume. Ist m der Wittindex von V und $M = \{V_1 \subset ... \subset V_m\} \in \Delta_\pi(V)$, so heißt M eine **Kammer** von Δ_π.*

Lemma 4.4. *Sind $U, W \leq V$ total isotrope Teilräume mit $U^\perp \cap W = \{0\}$, so existiert ein total isotroper Teilraum U' mit $V = U^\perp \oplus U'$ und ist $(b_1, .., b_k)$ eine Basis von U, so existiert eine eindeutige Basis $(b'_1, .., b'_k)$ von U', sodass $(b_1, b'_1), ..., (b_k, b'_k)$ orthogonale hyperbolische Paare sind.*

Definition 4.5. *Sei $(e_1, e^*_1, ..., e_m, e^*_m)$ eine Basis von V aus orthogonalen hyperbolischen Paaren. Der Rahmen $\mathcal{F} := \{P_1 := \langle e_1 \rangle, P^*_1 := \langle e^*_1 \rangle, ..., P_m := \langle e_m \rangle, P^*_m := \langle e^*_m \rangle\}$ heißt ein **polarer Rahmen** von $\mathbb{P}(V)$. Ist $\mathcal{F}$ ein polarer Rahmen, so heißt $\Sigma_\pi(\mathcal{F}) := \Sigma(\mathcal{F}) \cap \Delta_\pi(V)$ das **polare Apartment** von $\mathcal{F}$.*

Satz 4.6. *Sind $M_1, M_2 \in \Delta_\pi(V)$ zwei Kammern, so existiert ein polarer Rahmen $\mathcal{F}_\pi$ mit $M_1, M_2 \in \Sigma_\pi(\mathcal{F}_\pi)$.*

Lemma 4.7. *Sei $\mathcal{F} = \{P_1, P^*_1, ..., P_m, P^*_m\}$ ein polarer Rahmen und $g \in SL(V)$ mit $g^\perp(Q) = g(Q)$ für $Q \in \mathcal{F}$. Dann existiert eine lineare Isometrie $f : V \to V$, sodass $f(P) = g(P)\ \forall\ P \in \mathcal{F}$.*

Satz 4.8. *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ zwei polare Rahmen und $G, F \in \Sigma_\pi(\mathcal{F}) \cap \Sigma_\pi(\mathcal{F}')$. Dann existiert eine lineare Isometrie $f : V \to V$, sodass $f(F) = F$, $f(G) = G$ und $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.*

Definition 4.9. *Eine **Wand** in $\Delta_\pi(V)$ ist eine Fahne von exakt $m - 1$ total isotropen Unterräumen von V.*

Lemma 4.10. *Ist A eine Wand in $\Sigma_\pi(\mathcal{F})$, so existieren genau zwei Kammern $M_1, M_2 \in \Sigma_\pi(\mathcal{F})$ mit $A \subseteq M_1$ und $A \subseteq M_2$.*