Symplektische Gruppen

Andrés Goens und Ansgar Wigger

Mai 2010

1 Wiederholung

Bemerkung 1.1. *Seien V, W Vektorräume. Für eine σ-semilineare Abbildung $f : V \to W$ heißt $f^* : W^* \to V^* : \phi \mapsto \sigma^{-1}\phi f$ die zu f transponierte Abbildung und $\overline{f} := f^{-*}$, falls f bijektiv ist.*
Es sei $\Gamma L(V) := \{f : V \to V$ semilinear und bijektiv $\}$ und $\Gamma L^*(V) := \Gamma L(V) \cup \{f : V \to V^*$semilinear und bijektiv $\}$. Dann wird $\Gamma L^*(V)$ durch die Abbildung

$$\circ\ \Gamma L^*(V) \times \Gamma L^*(V) \to \Gamma L^*(V) : (f, g) \mapsto \begin{cases} fg, g : V \to V \\ \overline{f}g, g : V \to V^* \end{cases}$$

zu einer Gruppe.

Bemerkung 1.2. *Sei β eine n.a. σ-Sesquilinearform und $p : V \to V^* : v \mapsto \beta(-, v)$. Für jedes $f \in \Gamma L(V)$ τ-semilinear ist $f^\perp := p \circ f \circ p^{-1}$ die eindeutige Abbildung in $\Gamma L(V)$ mit*

$$\beta(f^\perp(u), f(v)) = \sigma\tau\sigma^{-1}\beta(u, v)\ \ \forall u, v \in V.$$

2 Die symplektische Gruppe

Definition 2.1. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und β eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf V, d.h. $\beta(v, v) = 0\ \ \forall v \in V$. Dann heißt (V, β)* symplektischer Raum*. Die durch β induzierte Korrelation $\pi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)\ \ X \mapsto X^{\perp,\beta}$ bildet zusammen mit V eine* symplektische Geometrie *(V, π).*
Sei $p : V \to V^*\ \ v \mapsto \beta(-, v)$. Dann ist die symplektische Gruppe *auf V folgendermaßen definiert $Sp(V) := \{f \in GL(V) | f \circ p = p \circ f\}$. Falls $V = K^n$ schreiben wir auch $Sp(n, K)$ anstelle von $Sp(V)$. Falls zusätzlich noch $K = \mathbb{F}_q$ gilt, schreiben wir auch $Sp(n, q)$.*

Bemerkung 2.2. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt*
$0 = \beta(u + v, u + v) = \beta(u + v, u) + \beta(u + v, v) = \beta(v, u) + \beta(u, v)$ *und damit*
$\beta(u, v) = -\beta(v, u)\ \ \forall u, v \in V$.

Lemma 2.3. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt für $f \in GL(V)$*

$$f \in Sp(V) \Longleftrightarrow \beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Beweis. Mit Bemerkung 1.2 erhält man:

$$\beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v) \ \forall u, v \in V \Leftrightarrow f = f^{\perp} \Leftrightarrow f = p \circ f \circ p^{-1}.$$

□

Bemerkung 2.4. *Sei $B = (e_1, .., e_n)$ Basis des symplektischen Raums (V, β) und J die Gram-Matrix von β bzgl. B. Sei f in $GL(V)$ und A die zu f bzgl. B gehörende Matrix. Dann gilt f ist in $Sp(V)$ genau dann, wenn $A^t JA = J$.*

Beweis. $f \in Sp(v) \Leftrightarrow \beta(f(v), f(u)) = \beta(v, u) \ \forall u, v \in V \Leftrightarrow (Av)^t JAu = v^t Ju \ \forall u, v \in V \Leftrightarrow A^t JA = J$ □

Lemma 2.5. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $(u, v) \in V \times V$ ein hyperbolisches Paar. Dann ist $V = \langle u, v\rangle \perp \langle u, v\rangle^{\perp}$.*

Beweis. Sei $r \in V$. Dann setze $\widetilde{r} = r + \beta(r, u)v - \beta(r, v)u$.
Dann ist $\beta(\widetilde{r}, u) = \beta(r, u) - \beta(r, u)\beta(u, v) - \beta(r, v)\beta(u, u) = 0$. Analog folgt $\beta(\widetilde{r}, v) = 0$ und damit $\widetilde{r} \in \langle u, v\rangle^{\perp}$. Sei $w \in \langle u, v\rangle \cap \langle u, v\rangle^{\perp}$. Dann ist $w = \alpha u + \gamma v$ mit $\alpha, \gamma \in K$. Außerdem ist $\beta(w, u) = 0$ und $\beta(w, v) = 0$. Damit folgt aber $\alpha = \gamma = 0$ und damit $w = 0$. □

Lemma 2.6. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum. Dann hat V die Dimension $2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und es existiert eine Basis $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ von V mit $\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0$ und $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \underline{n}$. Die Basis $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ heißt* symplektische Basis *von V und $\{\langle e_1\rangle, \langle f_1\rangle, ..., \langle e_n\rangle, \langle f_n\rangle\}$ heißt* symplektischer Rahmen.

Beweis. Wähle $e_1 \neq 0$ aus V und dann $\widetilde{f_1}$ aus V mit $\beta(e_1, \widetilde{f_1}) \neq 0$. Dies ist möglich, da falls $\beta(e_1, v) = 0$ für alle $v \in V$ wäre β entartet. Setze $f_1 := (\beta(e_1, \widetilde{f_1}))^{-1} \cdot \widetilde{f_1}$. Dann ist (e_1, f_1) hyperbolisches Paar. Mit Lemma 2.5 erhält man dann $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp \langle e_1, f_1\rangle^{\perp}$. Fahre mit $\langle e_1, f_1\rangle^{\perp}$ fort und induktiv ergibt sich dann: $V = \langle e_1, f_1\rangle \perp ... \perp \langle e_n, f_n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $(e_i, f_i) \in V \times V$ hyperbolisches Paar und damit die obigen Behauptungen. □

Bemerkung 2.7. *Falls $(e_1, f_1, .., e_n, f_n)$ eine symplektische Basis von V bildet, so hat die zu β gehörende Matrix J in der Basis $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n)$ die Form*

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

und der Unterraum $M := \langle e_1, .., e_n\rangle$ ist total isotrop und der Witt Index von β ist n.

Beweis. Klar, da $dim(M) = \frac{1}{2} dim(V)$. □

Satz 2.8. *Die Gruppen $Sp(2,K)$ und $SL(2,K)$ sind isomorph.*

Beweis.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2,K) \Longleftrightarrow A^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} ac-ca & ad-bc \\ bc-da & bd-db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow det(A) = 1$$

□

Lemma 2.9. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|Sp(2m,q)| = q^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (q^{2i}-1).$$

Beweis. $Sp(V)$ operiert transitiv auf der Menge der geordneten symplektischen Basen von V. Denn die Abbildung, die ein hyperbolisches Paar der Basis B auf ein hyperbolisches Paar der Basis B' schickt, erhält β und damit ist die Operation auch regulär. Deshalb reicht es aus die Anzahl der symplektischen Basen von V zu zählen. Wählt man den ersten Vektor $0 \neq u \in V$ beliebig hat man $(q^{2m}-1)$ Möglichkeiten. Sei v ein Vektor mit $\beta(u,v) \neq 0$ so gibt es $(q^{2m}-q^{2m-1})$ Möglichkeiten für v. Da aber $\beta(u,v) = 1$ gelten soll, ist die Anzahl der hyperbolischen Paare

$$(q^{2m}-1)(q^{2m}-q^{2m-1})/(q-1) = (q^{2m}-1)q^{2m-1}.$$

Da $V = \langle u,v \rangle \perp \langle u,v \rangle^{\perp}$ gilt, ist die Anzahl der geordneten symplektischen Basen von V

$$\prod_{i=1}^{m} (q^{2i}-1)q^{2i-1}.$$

Mit $\prod_{i=1}^{m} q^{2i-1} = q^{m^2}$ erhält man

$$|Sp(2m,q)| = q^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (q^{2i}-1)$$

□

Definition 2.10. *Sei V ein Vektorraum und $\varphi \in V^*$, $u \in V$ mit $\varphi(u) = 0$. Dann ist die Transvektion $t_{\varphi,u}$ definiert durch*

$$t_{\varphi,u}(v) := v + \varphi(v)u.$$

Lemma 2.11. *Sei (V,β) symplektischer Raum. Dann haben alle Transvektionen in $Sp(V)$ die*

Form

$$t(v) = v + a\beta(v,u)u \qquad a \in K, u \in V.$$

Diese Transvektionen heißen symplektische Transvektionen.

Beweis. Es gilt $t_{\varphi,u} \in Sp(V)$ genau dann, wenn $\beta(t_{\varphi,u}(v), t_{\varphi,u}(w)) = \beta(v,w)\ \forall v,w \in V$.
$\beta(t_{\varphi,u}(v), t_{\varphi,u}(w)) = \beta(v+\varphi(v)u, w+\varphi(w)u) = \beta(v,w)+\varphi(v)\beta(u,w)+\varphi(w)\beta(v,u)+\varphi(w)\varphi(v)\beta(u,u)$
$= \beta(v,w) + \varphi(v)\beta(u,w) + \varphi(w)\beta(v,u)$.
Daraus folgt, dass $t_{\varphi,u} \in Sp(V)$ genau dann, wenn $\varphi(v)\beta(u,w) + \varphi(w)\beta(v,u) = 0 \iff \varphi(w)\beta(u,v) = \varphi(v)\beta(u,w)\ \forall v,w \in V$.
Falls $\beta(u,v) = \beta(u,w) = 0$ ist die Gleichung erfüllt. Also sei o.B.d.A $\beta(u,v) = 1$.
Dann muss gelten $\varphi(w) = \varphi(v)\beta(u,w)$. Sei $\varphi \neq 0$.
Dann gilt $\varphi(v) \neq 0$ und damit folgt $Kern(\varphi) = \langle u\rangle^{\perp}$. Daraus ergibt sich $\varphi = a\beta(-,u)$ mit $a \in K$. Für den Fall $\varphi = 0$ ist $a = 0$. Andererseits erfüllen alle $t_{\varphi,u}$ mit $\varphi = a\beta(-,u)$ und $u \in V$ die obige Gleichung. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 2.12. *Sei (V,β) symplektischer Raum. Dann erzeugen die symplektischen Transvektionen die symplektische Gruppe $Sp(V)$.*

Beweis. Es sei T die von den symplektischen Transvektionen erzeugte Untergruppe von $Sp(V)$.
Der Beweis erfolgt in drei Schritten:
Zunächst zeigen wir, dass T transitiv auf $V\backslash\{0\}$ operiert. Sei $u_1, u_2 \in V$.
<u>1. Fall:</u> Sei $\beta(u_1,u_2) \neq 0$. Dann definiere

$$t(v) := v - \underbrace{\beta(u_1,u_2)^{-1}}_{\in K}\beta(u_1 - u_2, v)(u_1 - u_2)$$

Es ist $t \in T$ und

$$t(u_1) = u_1 - \beta(u_1,u_2)^{-1}\beta(u_1 - u_2, u_1)(u_1 - u_2) = u_1 - \beta(u_1,u_2)^{-1}\beta(u_1,u_2)(u_1 - u_2) = u_2.$$

<u>2. Fall:</u> Sei $\beta(u_1,u_2) = 0$. Dann existiert $w_1, w_2 \in V$ mit $\beta(u_1,w_1) \neq 0$ und $\beta(u_2,w_2) \neq 0$, da sonst β entartet ist. Falls $\beta(u_2,w_1) \neq 0$ bzw. $\beta(u_1,w_2) \neq 0$ setze $w = w_1$ bzw. $w = w_2$. Ansonsten wähle $w = w_1 + w_2$ und w erfüllt $\beta(u_1,w) \neq 0$ und $\beta(u_2,w) \neq 0$. Mit Fall 1 existieren $t_1, t_2 \in T$ mit $t_1(u_1) = w$, $t_2(w) = u_2$ und $t_2t_1(u_1) = u_2$.
Damit ist der erste Teil bewiesen.

Nun zeigen wir, dass T transitiv auf hyperbolischen Paaren operiert. Seien $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in V \times V$ hyperbolische Paare. Sei o.B.d.A. $u_1 = u_2$, da T transitiv auf $V\backslash\{0\}$ operiert.
<u>1. Fall:</u> Sei $\beta(v_1,v_2) \neq 0$. Dann bildet die Transvektion $t \in T$ mit

$$t(v) := v - \beta(v_1,v_2)^{-1}\beta(v_1 - v_2, v)(v_1 - v_2)$$

wie oben v_1 auf v_2 ab. Gleichzeitig gilt:

$$t(u) = u - \beta(v_1, v_2)^{-1} \underbrace{(\beta(u, v_2) - \beta(u, v_1))}_{=1-1=0}(v_1 - v_2) = u.$$

<u>2. Fall:</u> Sei $\beta(v_1, v_2) = 0$. Dann ist $(u, u + v_1)$ ein hyperbolisches Paar und es gilt sowohl $\beta(v_1, u + v_1) \neq 0$ als auch $\beta(u + v_1, v_2) \neq 0$. Mit Fall 1 folgt es existieren $t_1, t_2 \in T$, so dass (u, v_1) von t_1 auf $(u, u + v_1)$ abgebildet wird und $(u, u + v_1)$ von t_2 auf (u, v_2) abgebildet wird. Also bildet $t_2 t_1$ (u, v_1) auf (u, v_2) ab.
Damit ist der zweite Teil bewiesen.

Sei $f \in Sp(V)$. Wir zeigen nun, dass f in T liegt. Beweis durch Induktion über $dim(V)$. Der Induktionsanfang für $dim(V) = 2$ ist oben abgearbeitet. Sei also $dim(V) = 2n > 2$. Sei $(u, v) \in V \times V$ ein hyperbolisches Paar. Dann ist auch $(f(u), f(v))$ ein hyperbolisches Paar. Wir wissen, dass ein $t \in T$ existiert mit $tf(u) = u$ und $tf(v) = v$. Sei $L := \langle u, v \rangle$. Dann gilt $tf_{|L} = Id$ und $tf(L^\perp) = L^\perp$. Da $dim(L^\perp) < 2n$ erhält man mit der Induktionsvorraussetzung, dass $tf_{|L^\perp} = t'_1 t'_2 ... t'_k$ mit $t'_i \in T'$, wobei T' die durch die Transvektionen von $Sp(L^\perp)$ erzeugte Gruppe ist. Da $V = L \perp L^\perp$ lässt sich t'_i für alle $i \in \underline{k}$ zu einer Transvektion $t_i \in T$ auf V fortsetzen mit $t_i = 1_L + t'_i$. Damit erhält man $f = t^{-1} t_1 ... t_k \in T$. □

Korollar 2.13. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt $Sp(V) \subseteq SL(V)$.*

Beweis. Alle Transvektionen haben Determinante 1 und $Sp(V)$ wird von ihren Transvektionen erzeugt. □

3 Die projektive symplektische Gruppe

In diesem Abschnitt wird die projektive symplektische Gruppe $PSp(V)$ eingeführt. Ziel wird es sein die Einfachheit der projektive symplektische Gruppe für $V = K^n$ bis auf 3 echte Ausnahmen zu zeigen. Dieses soll mit Hilfe des Kriteriums von Iwasawa geschehen. Deshalb sei dieses hier noch einmal wiederholt.

Satz 3.1. *(Iwasawa Kriterium) Sei G eine Gruppe die primitiv auf einer Menge M operiert. Weiter sei $G = \langle gAg^{-1} | g \in G \rangle$, wobei A ein abelscher Normalteiler von $Stab_G(a)$ für ein $a \in M$ ist. Dann gilt:*

a) Falls N ein Normalteiler von G ist gilt entweder $N \leq G(M)$ oder $G' \leq N$,

b) Falls $G = G'$ ist gilt $G/G(M)$ ist einfach,

wobei $G(M)$ das Herz der Operation ist.

Definition 3.2. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $Sp(V)$ die zugehörige symplektische Gruppe. Dann ist die projektive symplektische Gruppe $PSp(V)$ von V folgendermaßen definiert*

$$PSp(V) := Sp(V)/Z,$$

wobei $Z := \{a \cdot Id | a \in K, a \cdot Id \in Sp(V)\}$.

Bemerkung 3.3. *Es gilt, $PSp(V) = Sp(V)/\{-Id, Id\}$.*

Beweis. Seien $u, v \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$. Sei $aId \in Sp(V) \Rightarrow \beta(au, av) = a^2\beta(u, v) = \beta(u, v)$. Also folgt $a^2 = 1$. □

Nach diesen Definitionen können wir damit beginnen die Voraussetzungen für das Kriterium von Iwasawa zu zeigen.

Satz 3.4. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum mit $dim(V) \geq 4$. Dann operiert $PSp(V)$ wie eine Permutationsgruppe von Rang(3) auf $\mathfrak{P}(V)$.*

Beweis. Offensichtlich operiert $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ transitiv. Sei $P \in \mathfrak{P}(V)$. Dann sind die Bahnen von $Stab_{PSp(V)}(P)$

$$\{P\}, \;\; A := \{Q | Q \in P^{\perp}, Q \neq P\} \text{ und } B := \{Q | Q \notin P^{\perp}\}$$

$\{P\}$ bildet eine Bahn der Operation, da $Stab(P)$ P fixiert.
Sei $\langle e_1 \rangle = P$. A ist nicht leer, da $dim(V) \geq 4$. Seien $Q, Q' \in A$ und $Q = \langle e_2 \rangle$, $Q' = \langle e_2' \rangle$ mit $e_1, e_2', e_2 \in V$. Dann existieren symplektische Basen $B' = (e_1, f_1, e_2', f_2', ..., e_n', f_n')$ $B = (e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ von V. Die Abbildung, die B auf B' schickt, induziert eine Projektivität, die P fixiert und Q auf Q' abbildet.
Für $Q_1, Q_2 \in B$ findet man $e_1, f_1, f_2 \in V$ mit $P = \langle e_1 \rangle, Q_i = \langle f_i \rangle$ und (e_1, f_i) hyperbolisches Paar für $i \in \{1, 2\}$. Analog wie oben, kann man eine Projektivität finden, die Q_1 auf Q_2 abbildet und P fixiert. □

Satz 3.5. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum, dann operiert $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitiv.*

Beweis. Falls $dim(V) = 2$ folgt mit Satz 2.8, dass $PSp(V) = PSL(V)$ und damit ist $PSp(V)$ einfach. Sei also $dim(V) \geq 4$.
Sei $\mathfrak{P}$ eine $PSp(V)$-invariante Partition von $\mathfrak{P}(V)$ und $B \in \mathfrak{P}$ mit $1 < |B|$. Sei $P \in B$ fest.
<u>1. Fall:</u> Sei $B \cap P^{\perp} \neq \{P\}$. Dann existiert ein $S \neq P$ im Schnitt. Dann folgt mit dem Beweis von Satz 3.4, dass sich S auf alle $T \in P^{\perp} \backslash \{P\}$ abbilden lässt, während P fixiert wird. Deshalb ist $P^{\perp} \subseteq B$. Sei $R \notin P^{\perp}$ beliebig. Wähle $Q \in (P + R)^{\perp} = P^{\perp} \cap R^{\perp}$. $(P + R)^{\perp}$ ist nicht leer, da $dim(V) > 2$. Dann ist $Q \in P^{\perp} \subseteq B$ und mit $Q \in R^{\perp}$ folgt $R \in Q^{\perp}$. Also gilt wieder $Q^{\perp} \cap B \neq Q$ und analog $Q^{\perp} \subseteq B$ und damit $R \in B$. Deshalb gilt $B = \mathfrak{P}(V)$.
<u>2. Fall:</u> Sei $B \cap P^{\perp} = \{P\}$. Also enthält B einen Punkt, der nicht in $P^{\perp}$ liegt. Mit dem Beweis

von Satz 3.4 liegen analog alle Punkte, die nicht in $P^\perp$ liegen, in B. Sei $R \in P^\perp$ beliebig, aber $P \neq R$. $P^\perp \cup R^\perp$ ist nicht V. Denn sei o.B.d.A. $P = \langle e_1 \rangle, R = \langle e_2 \rangle$. Und $(e_1, f_1, e_2, f_2, ..., e_n, f_n)$ eine symplektische Basis von V. Dann ist $\langle f_1 + f_2 \rangle \notin P^\perp \cup R^\perp$. Wähle $Q \notin P^\perp \cup R^\perp$. Dann ist $Q \in B$. Weil $R \notin Q^\perp$ gilt, folgt analog, dass $R \in B$ und damit wieder $B = \mathfrak{P}(V)$. Das ist ein Widerspruch zu $B \cap P^\perp = \{P\}$.
Somit gilt $B = \mathfrak{P}(V)$, falls es ein $B \in \mathfrak{P}$ gibt mit $|B| > 1$ und deshalb ist $\mathfrak{P}$ stets trivial. □

Definition 3.6. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $P \in \mathfrak{P}(V)$. Dann definieren wir die* Wurzeluntergruppe *X_P als die Menge aller Transvektionen $v \mapsto v + a\beta(v, u)u$ in $Sp(V)$ mit $\langle u \rangle = P$ und $a \in K$.*

Lemma 3.7. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $P \in \mathfrak{P}(V)$. Dann ist $X_P \trianglelefteq Stab_{Sp(V)}(P)$ und es gilt $\langle fX_Pf^{-1} | f \in Sp(V) \rangle = Sp(V)$. Außerdem ist X_P abelsch.*

Beweis. Für $f \in Sp(V), t_{\varphi,u} \in X_P$ ist $ft_{\varphi,u}f^{-1} = t_{\varphi f^{-1}, f(u)} = t_{\varphi, f(u)}$, da f symplektisch. Damit folgt sofort X_P ist Normalteiler von $Stab_{Sp(V)}(P)$. Weiterhin ist jede symplektische Transvektion Element einer der Konjugiertenklassen von X_P, und so folgt $Sp(V) = \langle fX_Pf^{-1} | f \in Sp(V) \rangle$. Aus einen vorherigen Vortrag ist für $t_{\varphi,u}, t_{a\varphi,w} \in X_P, a \in K$: $t_{\varphi,u}t_{a\varphi,w} = t_{\varphi,u+aw} = t_{\varphi,aw+u}$
$= t_{\varphi,u}t_{a\varphi,w}$. □

Satz 3.8. *Es gilt $Sp(2m, K)' = Sp(2m, K)$ mit $m \in \mathbb{N}$, außer für $Sp(2, \mathbb{F}_2)$, $Sp(2, \mathbb{F}_3)$ und $Sp(4, \mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Beweis mit Induktion über die Dimension. Wir beginnen mit dem Induktionsschluss. Sei also für festes $n \in \mathbb{N}$

$$Sp(2n, K)' = Sp(2n, K).$$

Sei $P \in \mathfrak{P}(K^{2n+2})$ und $t \in X_P \subseteq Sp(2n + 2, K)$. Weiterhin sei L eine hyperbolische Gerade in $P^\perp$. Außerdem sei $s := t_{|L^\perp} \in Sp(L^\perp)$ und nach Induktionsannahme gilt $Sp(L^\perp)' = Sp(L^\perp)$. Da $t \in X_P$ und $L \subseteq P^\perp$ gilt $t_{|L} = Id$ und damit erhält man $t = 1_L + s$. Folglich ist $t \in Sp(2n+2, K)'$ und da P und $t \in X_P$ beliebig gewählt wurden gilt $Sp(2n + 2)' = Sp(2n + 2)$. Es fehlt noch der Induktionsanfang.
Aus Satz 2.8 wissen wir, dass $Sp(2, K) = SL(2, K)$ und aus einem vorherigen Vortrag folgt, dass $Sp(2, K)' = Sp(2, K)$ gilt; Es sei denn es ist $K = \mathbb{F}_2$ oder $K = \mathbb{F}_3$. Also fehlt nur noch die Induktionsverankerung für $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$. Also zeigen wir: $Sp(4, \mathbb{F}_3)' = Sp(4, \mathbb{F}_3)$ und $Sp(6, \mathbb{F}_2)' = Sp(6, \mathbb{F}_2)$.
Sei $e_1, f_1, ..., e_n, f_n$ eine symplektische Basis von K^{2n}. Ordnet man die Basis um zu $e_1, ..., e_n, f_1, ...f_n$ so erhält man mit Bemerkung 2.4, dass für $M \in K^{2n \times 2n}$ gilt $M \in Sp(2n, K) \iff M^tJM = J$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $A \in GL(n,K)$ und $B \in K^{n\times n}$ mit $B = B^t$. Dann gehören folgende Matrizen zu Sp(2n,K)

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \quad und \quad \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Dies kann man durch einfaches Nachrechnen verifizieren. Nach der Definition der Kommutatorgruppe enthält $Sp(2n,K)'$

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

was sich durch einfaches Ausrechnen zu

$$\begin{pmatrix} I & B - ABA^t \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

vereinfachen lässt.

Betrachten wir jetzt $Sp(4,\mathbb{F}_3)$ und wählen $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ mit $b \in K$. So erhalten wir $B - ABA^t = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wähle $u = (1,0,0,0)^t \in \mathbb{F}_3^4$. Dann ist die Matrixschreibweise der Transvektion $t := v - b\beta(v,u)u$ folgende:

$$t(v) = Id \cdot v - b \left(v^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Id \cdot v + bv_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Da jedes $u \in V\backslash\{0\}$ zu einer symplektischen Basis von V ergänzt werden kann, enthält $Sp(4,3)'$ alle Transvektionen von $Sp(4,3)$, also $Sp(4,3)' = Sp(4,3)$.

Für $Sp(6,2)$ setzen wir für $b \in K$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

$$B - ABA^t = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} I & B - ABA^t \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung der Transvektion $t(v) = v - b\beta(v,u)u$ mit $u = e_1$. Analog zu $Sp(4,3)$ folgt $Sp(6,2) = Sp(6,2)'$. □

Bemerkung 3.9. *Sei α die kanonische Abbildung, die ein Element aus $Sp(V)$ auf seine Restklasse in der $PSp(V)$=$Sp(V)/\{\pm\mathbf{1}\}$ abbildet. Die Operation von $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ kann dann auch als Operation von $Sp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ verstanden werden, indem man (f,P) auf $(\alpha(f),P)$ abbildet. Da α surjektiv ist und $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitiv operiert, ist auch die Operation von $Sp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitv. Das Herz dieser Operation ist $\{\pm\mathbf{1}\}$.*

Satz 3.10. *Für $n \in \mathbb{N}$ und K Körper ist die Gruppe $PSp(2n,K)$ einfach, bis auf $Sp(2,\mathbb{F}_2)$, $Sp(2,\mathbb{F}_3)$ und $Sp(4,\mathbb{F}_2)$.*

Beweis. Wegen Lemma 3.7 und Bemerkung 3.9 ist das Kriterium von Iwasawa anwendbar und mit Satz 3.8 folgt die Behauptung. □

In Satz 2.8 hatten wir gezeigt, dass $Sp(2,K) = SL(2,K)$ für einen beliebigen Körper K gilt. Aus einem vorherigen Vortrag wissen wir bereits, dass $PSL(2,2) \cong S_3$ und $PSL(2,3) \cong A_4$. Damit sind $PSp(2,2)$ und $PSp(2,3)$ nicht einfach. Also müssen wir nur noch zeigen, dass $PSp(4,2)$ wirklich eine Ausnahme zu 3.10 darstellt. Wir werden das als Korollar des folgenden Satzes erhalten.

Satz 3.11. *Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Dann gibt es eine Einbettung der symmetrischen Gruppe S_{2m+2} in die $Sp(2m,2)$.*

Beweis. Sei $V = \mathbb{F}_2^{2m+2}$ mit $2 \leq m \in \mathbb{N}$. Weiter sei auf V folgende Bilinearform definiert:

$$\widetilde{\beta} : V \times V \to \mathbb{F}_2, (v,w) \mapsto \sum_{i=1}^{2m+2} v_i w_i$$

Dann operiert die S_{2m+2} auf V als eine Untergruppe von $O(V)$. Setze $\mathbf{1} = (1,...,1)^t \in V$. Dann ist $Stab_{S_{2m+2}}(\mathbf{1}) = S_{2m+2}$. Definiere $W := \mathbf{1}^\perp/\langle\mathbf{1}\rangle$. Dann gilt $dim(W) = dim(\mathbf{1}^\perp) - dim(\langle\mathbf{1}\rangle) = (2m+2-1) - 1 = 2m$, da

$$\mathbf{1}^\perp = \{v \in V | \sum_{i=1}^{2m+2} v_i = 0\}$$

und damit

$$V = \mathbf{1}^\perp \oplus_i \langle(1,0,...,0)\rangle.$$

Dann definieren wir auf W folgende Bilinearform

$$\beta : W \times W \to \mathbb{F}_2,\ (v + \langle\mathbf{1}\rangle, w + \langle\mathbf{1}\rangle) \mapsto \widetilde{\beta}(v,w).$$

Es folgt, dass β wohldefiniert ist, da $\widetilde{\beta}(v+\mathbf{1},w)=\widetilde{\beta}(v,w)+\widetilde{\beta}(\mathbf{1},w)=\widetilde{\beta}(v,w)$ und $\widetilde{\beta}(\mathbf{1},\mathbf{1})=0$. Außerdem folgt aus $\beta(v,v)=0$ für alle $v\in W$ und $W^\perp=\{w+\langle\mathbf{1}\rangle|\beta(w,v)=0\ \forall v\in\mathbf{1}^\perp\}=\{w+\langle\mathbf{1}\rangle|w\in(\mathbf{1}^\perp)^\perp=\langle\mathbf{1}\rangle\}=\{0\}$, dass$(V,\beta)$ ein symplektischer Raum ist. Da die Operation von $\S_{2m+2}$ auf W treu und mit β verträglich ist, lässt sich die S_{2m+2} in die $Sp(W)\cong Sp(2m,2)$ einbetten. $\square$

Korollar 3.12. *Es gilt* $Sp(4,2)\cong S_6$.

Beweis. Es gilt $|Sp(4,2)|=|S_6|=720$. Mit Satz 3.11 folgt die Behauptung. $\square$

4 Symplektische BN-Paare

In diesem Abschnitt soll ein BN-Paar für die $Sp(V)$ konstruiert werden. Deshalb seien zu Beginn nochmal die BN-Paar Axiome wiederholt.

Definition 4.1. *Sei G eine Gruppe. Dann heißt (B,N) mit $B,N\leq G$ ein BN-Paar, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

a) $G=\langle B,N\rangle$

b) $H:=B\cap N\trianglelefteq N$

c) $W:=N/H$ *wird von Elementen* $\{w_i|i\in I\}$ *mit der Eigenschafft* $w_i^2=1$ *für alle* $i\in I$ *erzeugt.*

d) Falls $w_i=n_iH$ *und* $n\in N$*, dann gilt*

  (a) $n_iBn_i\neq B$ *und*

  (b) $n_iBn\subseteq(Bn_inB)\cup(BnB)$.

Sei (V,β) ein symplektischer Raum. Wir wählen die Basis $(e_1,..,e_n,f_1,...,f_n)$ von V, wobei $(e_1,f_1,...,e_n,f_n)$ eine symplektische Basis von V ist. Dann wissen wir, dass β durch die Matrix J dargestellt wird mit

$$J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}.$$

Weiter sei $B\leq Sp(2n,K)$ der Stabilisator der Fahne

$$V_1\subset V_2\subset...\subset V_n\subset V_{n-1}^\perp\subset...\subset V_1^\perp$$

mit $V_i=\langle e_1,...,e_i\rangle\ \ i\in\underline{m}$ und $N\leq Sp(2n,K)$ sei der Stabilisator des symplektischen Rahmens der oben gewählten Basis. Damit definieren wir $H:=N\cap B$.

Bemerkung 4.2. *H stabilisiert sowohl die Fahne als auch den symplektischen Rahmen. Deshalb besteht H aus den Diagonalmatrizen der $Sp(V)$.*

Lemma 4.3. *Alle Matrizen $M \in B$ haben die Gestallt*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}$$

mit $A \in SL(n,K)$, $X \in K^{n\times n}$, $A^{-1}X$ sym. und A obere Dreiecksmatrix.

Beweis. Wir wissen, dass für $M \in SL(2n,K)$ gilt $M \in Sp(2n,K) \iff M^tJM = J$. Seien $A,B,C,D \in SL(n,K)$ und

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Da $M \in B$ gelten soll, folgt, dass $Me_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{i,k}e_k$ für $i \in \underline{n}$ und $\alpha_{i,k} \in K$ für $k \in \underline{i}$ gelten muss. Damit ergibt sich, dass A obere rechte Dreiecksmatrix ist und $C = 0$ sein muss. Außerdem soll gelten

$$\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ B^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ B^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & D \\ -A & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff D^tA = I \;\; und \;\; D^tB = B^tD \iff D = A^{-t} \;\; und \;\; D^tB = B^tD$$

Damit folgt die Behauptung für B. □

Lemma 4.4. *Alle $A \in N$ sind bezüglich der Basis $S = (e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n)$ Monomialmatrizen und werden von folgenden Matrizen erzeugt:*

- $h_a := diag(a_1, ..., a_n, a_1^{-1}, ..., a_n^{-1})$ *mit* $a \in (K^*)^n$
- $w_i :=^S (e_i, e_{i+1})(f_i, f_{i+1})^S$ *für* $i \in \underline{n-1}$
- $w_0 :=^S (e_1 \mapsto f_1, f_1 \mapsto -e_1)^S$.

Beweis. Klar, da hyperbolische Paare auf hyperbolische Paare abgebildet werden. □

Lemma 4.5. *H ist Normalteiler von N und $W := N/H$ wird von Elementen $\{w_i | i \in I,\, w_i^2 = 1\}$ erzeugt.*

Beweis. Mit der Menge $\widetilde{N}$ der Monomialmatrizen der $SL(V)$ und der Menge $\widetilde{H}$ der Diagonalmatrizen der $SL(V)$ folgt aus vorherigem Vortrag $\widetilde{H} \trianglelefteq \widetilde{N}$. Nun gilt damit $\{n\widetilde{H}n^{-1} | n \in N\} \subseteq \widetilde{H}$ und für $n \in N$ folgt $nHn^{-1} \subseteq (\widetilde{H} \cap Sp(V)) = H$ und damit die Behauptung. Mit Lemma 4.4 ließt man sofort einen Erzeuger von W ab: $W \cong \langle w_i | i \in \{0, ..., n\}\rangle$. Für die w_i mit $i \in \{0...n-1\}$ gilt $w_i^2 = 1$. □

Satz 4.6. *Die Gruppen B, N bilden ein BN-Paar für $Sp(V)$ mit Weyl Gruppe W.*

Beweis. Aus Lemma 4.5 folgt, dass die Axiome 2 und 3 erfüllt sind. Zeigen wir also zunächst $\langle B, N\rangle = Sp(V)$. Mit Satz 3.4 folgt, dass wir nur zeigen müssen, dass die in $Sp(V)$ gelegenen Transvektionen im Erzeugnis von B und N liegen. Wir wissen mit Lemma 4.3, dass für $a \in K^*$ und $k \in \underline{n}$ die durch die Matrix

$$T_{k,a} := \begin{pmatrix} I & S_{k,a} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (S_{k,a})_{k,k} = a \text{ und } (S_{k_a})_{i,j} = 0 \ \forall (k,k) \neq (i,j) \in \underline{n}^2$$

präsentierte Transvektion $l_{k,a}(v) = v - a\beta(v, e_k)e_k$ in B und damit in $\langle B, N\rangle$ liegt. Weiter liegt die durch die Matrix

$$\widetilde{T_{k,a}} := w_{k-1}...w_0...w_{k-1}T_{k,a} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S_{k,a} & I \end{pmatrix}$$

präsentierte Transvektion $\widetilde{l_k}(v) = v - a\beta(v, f_k)f_k$ in $\langle B, N\rangle$. Weiter definieren wir $\alpha : V \to V^*, v \mapsto \beta(-, v)$. Nun sei $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \eta_i f_i \in V$ beliebig mit $\lambda_i, \eta_i \in K$. Sei o.B.d.A $\lambda_i = \eta_i = 1 \ \forall i \in \underline{n}$ (Sonst alle Skalare dazuschreiben). Dann ist $t_{\alpha(u),u} = t_{\alpha(u),e_1}...t_{\alpha(u),e_n}t_{\alpha(u),f_1}...t_{\alpha(u),f_n}$ $= t_{\alpha(e_1),e_1}...t_{\alpha(e_n),e_1}t_{\alpha(f_1),e_1}...t_{\alpha(f_n),e_1}...t_{\alpha(e_1),f_n}...t_{\alpha(e_n),f_n}t_{\alpha(f_1),f_n}...t_{\alpha(f_n),f_n}$. Für $t_{\alpha(e_i),e_j}$ existiert eine Permutation κ aus N mit $\kappa(e_i) = e_j$ und $\kappa(e_j) = e_i$ und damit

$$t_{\alpha(e_i),e_j} = \kappa \, t_{\alpha(e_i),e_i} \, \kappa.$$

Analog zeigt man, dass $t_{\alpha(e_i),f_j}, t_{\alpha(f_i),e_j}$ und $t_{\alpha(f_i),f_j}$ in $\langle B, N\rangle$ liegen. Daraus folgt $t_{\alpha(u),u} \in \langle B, N\rangle$.

Axiom 4a lässt sich analog zu $SL(V)$ beweisen. Damit fehlt noch Axiom 4b. $\square$