Symplektische Gruppen

Andrés Goens und Ansgar Wigger

2. Juni 2010

1 Wiederholung

Bemerkung 1.1. *Seien V, W Vektorräume. Für eine σ-semilineare Abbildung $f : V \to W$ heißt $f^* : W^* \to V^* : \phi \mapsto \sigma^{-1}\phi f$ die zu f transponierte Abbildung und $\overline{f} := f^{-*}$, falls f bijektiv ist.*
Es sei $\Gamma L(V) := \{f : V \to V$ semilinear und bijektiv $\}$ und $\Gamma L^*(V) := \Gamma L(V) \cup \{f : V \to V^*$semilinear und bijektiv $\}$. Dann wird $\Gamma L^*(V)$ durch die Abbildung

$$\circ \ \Gamma L^*(V) \times \Gamma L^*(V) \to \Gamma L^*(V) : (f,g) \mapsto \begin{cases} fg, g : V \to V \\ \overline{f}g, g : V \to V^* \end{cases}$$

zu einer Gruppe.

Bemerkung 1.2. *Sei β eine n.a. σ-Sesquilinearform und $p : V \to V^* : v \mapsto \beta(-, v)$. Für jedes $f \in \Gamma L(V)$ τ-semilinear ist $f^\perp := p \circ f \circ p^{-1}$ die eindeutige Abbildung in $\Gamma L(V)$ mit*

$$\beta(f^\perp(u), f(v)) = \sigma\tau\sigma^{-1}\beta(u, v) \ \ \forall u, v \in V.$$

2 Die symplektische Gruppe

Definition 2.1. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und β eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf V, d.h. $\beta(v, v) = 0 \ \ \forall v \in V$. Dann heißt (V, β)* symplektischer Raum*. Die durch β induzierte Korrelation $\pi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) \ \ X \mapsto X^{\perp,\beta}$ bildet zusammen mit V eine* symplektische Geometrie *(V, π).*
Sei $p : V \to V^* \ \ v \mapsto \beta(-, v)$. Dann ist die symplektische Gruppe *auf V folgendermaßen definiert $Sp(V) := \{f \in GL(V) | f \circ p = p \circ f\}$. Falls $V = K^n$ schreiben wir auch $Sp(n, K)$ anstelle von $Sp(V)$. Falls zusätzlich noch $K = \mathbb{F}_q$ gilt, schreiben wir auch $Sp(n, q)$.*

Bemerkung 2.2. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt*
$0 = \beta(u+v, u+v) = \beta(u+v, u) + \beta(u+v, v) = \beta(v, u) + \beta(u, v)$ und damit
$\beta(u, v) = -\beta(v, u) \ \ \forall u, v \in V$.

Lemma 2.3. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt für $f \in GL(V)$*

$$f \in Sp(V) \iff \beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Bemerkung 2.4. *Sei $B = (e_1, .., e_n)$ Basis des symplektischen Raums (V, β) und J die Gram-Matrix von β bzgl. B. Sei f in $GL(V)$ und A die zu f bzgl. B gehörende Matrix. Dann gilt f ist in $Sp(V)$ genau dann, wenn $A^t JA = J$.*

Lemma 2.5. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $(u, v) \in V \times V$ ein hyperbolisches Paar. Dann ist $V = \langle u, v\rangle \perp \langle u, v\rangle^{\perp}$.*

Lemma 2.6. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum. Dann hat V die Dimension $2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und es existiert eine Basis $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ von V mit $\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0$ und $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \underline{n}$. Die Basis $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ heißt* symplektische Basis *von V und $\{\langle e_1\rangle, \langle f_1\rangle, ..., \langle e_n\rangle, \langle f_n\rangle\}$ heißt* symplektischer Rahmen.

Bemerkung 2.7. *Falls $(e_1, f_1, .., e_n, f_n)$ eine symplektische Basis von V bildet, so hat die zu β gehörende Matrix J in der Basis $(e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n)$ die Form*

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

und der Unterraum $M := \langle e_1, .., e_n\rangle$ ist total isotrop und der Witt Index von β ist n.

Satz 2.8. *Die Gruppen $Sp(2, K)$ und $SL(2, K)$ sind isomorph.*

Lemma 2.9. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|Sp(2m, q)| = q^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (q^{2i} - 1).$$

Definition 2.10. *Sei V ein Vektorraum und $\varphi \in V^*$, $u \in V$ mit $\varphi(u) = 0$. Dann ist die Transvektion $t_{\varphi,u}$ definiert durch*

$$t_{\varphi,u}(v) := v + \varphi(v)u.$$

Lemma 2.11. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann haben alle Transvektionen in $Sp(V)$ die Form*

$$t(v) = v + a\beta(v, u)u \qquad a \in K, u \in V.$$

Diese Transvektionen heißen symplektische Transvektionen.

Satz 2.12. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann erzeugen die symplektischen Transvektionen die symplektische Gruppe $Sp(V)$.*

Korollar 2.13. *Sei (V, β) symplektischer Raum. Dann gilt $Sp(V) \subseteq SL(V)$.*

3 Die projektive symplektische Gruppe

Satz 3.1. *(Iwasawa Kriterium) Sei G eine Gruppe die primitiv auf einer Menge M operiert. Weiter sei $G = \langle gAg^{-1} | g \in G \rangle$, wobei A ein abelscher Normalteiler von $Stab_G(a)$ für ein $a \in M$ ist. Dann gilt:*

a) Falls N ein Normalteiler von G ist gilt entweder $N \leq G(M)$ oder $G' \leq N$,

b) Falls $G = G'$ ist gilt $G/G(M)$ ist einfach,

wobei $G(M)$ das Herz der Operation ist.

Definition 3.2. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $Sp(V)$ die zugehörige symplektische Gruppe. Dann ist die projektive symplektische Gruppe $PSp(V)$ von V folgendermaßen definiert*

$$PSp(V) := Sp(V)/Z,$$

wobei $Z := \{a \cdot Id | a \in K, a \cdot Id \in Sp(V)\}$.

Bemerkung 3.3. *Es gilt, $PSp(V) = Sp(V)/\{-Id, Id\}$.*

Satz 3.4. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum mit $dim(V) \geq 4$. Dann operiert $PSp(V)$ wie eine Permutationsgruppe von Rang(3) auf $\mathfrak{P}(V)$.*

Satz 3.5. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum, dann operiert $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitiv.*

Definition 3.6. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $P \in \mathfrak{P}(V)$. Dann definieren wir die* Wurzeluntergruppe *X_P als die Menge aller Transvektionen $v \mapsto v + a\beta(v, u)u$ in $Sp(V)$ mit $\langle u \rangle = P$ und $a \in K$.*

Lemma 3.7. *Sei (V, β) ein symplektischer Raum und $P \in \mathfrak{P}(V)$. Dann ist $X_P \trianglelefteq Stab_{Sp(V)}(P)$ und es gilt $\langle fX_Pf^{-1} | f \in Sp(V) \rangle = Sp(V)$. Außerdem ist X_P abelsch.*

Satz 3.8. *Es gilt $Sp(2m, K)' = Sp(2m, K)$ mit $m \in \mathbb{N}$, außer für $Sp(2, \mathbb{F}_2)$, $Sp(2, \mathbb{F}_3)$ und $Sp(4, \mathbb{F}_2)$.*

Bemerkung 3.9. *Sei α die kanonische Abbildung, die ein Element aus $Sp(V)$ auf seine Restklasse in der $PSp(V)$=$Sp(V)/\{\pm\mathbf{1}\}$ abbildet. Die Operation von $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ kann dann auch als Operation von $Sp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ verstanden werden, indem man (f, P) auf $(\alpha(f), P)$ abbildet. Da α surjektiv ist und $PSp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitiv operiert, ist auch die Operation von $Sp(V)$ auf $\mathfrak{P}(V)$ primitv. Das Herz dieser Operation ist $\{\pm\mathbf{1}\}$.*

Satz 3.10. *Für $n \in \mathbb{N}$ und K Körper ist die Gruppe $PSp(2n, K)$ einfach, bis auf $Sp(2, \mathbb{F}_2)$, $Sp(2, \mathbb{F}_3)$ und $Sp(4, \mathbb{F}_2)$.*

Satz 3.11. *Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Dann gibt es eine Einbettung der symmetrischen Gruppe S_{2m+2} in die $Sp(2m, 2)$.*

Korollar 3.12. *Es gilt $Sp(4, 2) \cong S_6$.*

4 Symplektische BN-Paare

Definition 4.1. *Sei G eine Gruppe. Dann heißt (B, N) mit $B, N \leq G$ ein BN-Paar, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

a) $G = \langle B, N \rangle$

b) $H := B \cap N \trianglelefteq N$

c) $W := N/H$ *wird von Elementen* $\{w_i | i \in I\}$ *mit der Eigenschafft* $w_i^2 = 1$ *für alle* $i \in I$ *erzeugt.*

d) Falls $w_i = n_i H$ *und* $n \in N$*, dann gilt*

   (a) $n_i B n_i \neq B$ *und*

   (b) $n_i B n \subseteq (B n_i n B) \cup (B n B)$.

Sei (V, β) ein symplektischer Raum. Wir wählen die Basis $(e_1, .., e_n, f_1, ..., f_n)$ von V, wobei $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ eine symplektische Basis von V ist. Weiter sei $B \leq Sp(2n, K)$ der Stabilisator der Fahne

$$V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n \subset V_{n-1}^{\perp} \subset ... \subset V_1^{\perp}$$

mit $V_i = \langle e_1, ..., e_i \rangle \quad i \in \underline{m}$ und $N \leq Sp(2n, K)$ sei der Stabilisator des symplektischen Rahmens der oben gewählten Basis. Damit definieren wir $H := N \cap B$.

Bemerkung 4.2. *H stabilisiert sowohl die Fahne als auch den symplektischen Rahmen. Deshalb besteht H aus den Diagonalmatrizen der $Sp(V)$.*

Lemma 4.3. *Alle Matrizen $M \in B$ haben die Gestallt*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}$$

mit $A \in SL(n, K), X \in K^{n \times n}$, $A^{-1}X$ sym. und A obere Dreiecksmatrix.

Lemma 4.4. *Alle $A \in N_\pi$ sind bezüglich der Basis $S = (e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n)$ Monomialmatrizen und werden von folgenden Matrizen erzeugt:*

- $h_a := diag(a_1, ..., a_n, a_1^{-1}, ..., a_n^{-1})$ *mit* $a \in (K^*)^n$
- $w_i :=^S (e_i, e_{i+1})(f_i, f_{i+1})^S$ *für* $i \in \underline{n-1}$
- $w_0 :=^S (e_1 \mapsto f_1, f_1 \mapsto -e_1)^S$.

Lemma 4.5. *H ist Normalteiler von N und $W := N/H$ wird von Elementen $\{w_i | i \in I,\ w_i^2 = 1\}$ erzeugt.*

Satz 4.6. *Die Gruppen B, N bilden ein BN-Paar für $Sp(V)$ mit Weyl Gruppe W.*