Unitäre Gruppen

Anika Nehnes und Jan Hackfeld

10.07.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung bezeichne $\mathbb{F}$ stets einen Körper, V einen endlich dimensionalen $\mathbb{F}$-Vektorraum der Dimension n und $\mathcal{P}(V)$ den zugehörigen projektiven Raum. Weiter sei β eine nicht-ausgeartete σ-hermitsche Sesquilinearform, wobei $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ ein Automorphismus der Ordnung 2 ist, insbesondere also ungleich der Identität. Dann heißt (V, β) ein **unitärer Vektorraum**. Ist weiter $\pi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ die durch β induzierte Korrelation der Ordnung 2, dann nennt man $(\mathcal{P}(V), \pi)$ eine **unitäre Geometrie**.

Notation: Sei $a \in \mathbb{F}$. Benutze die abkürzende Schreibweise $\overline{a} := \sigma(a)$. Weiter ist λ_a die Skalarmatrix mit a auf der Diagonalen.

Definition 1.1. Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$U(V) := \{f \in GL(V) \,|\, \beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v) \ \forall \ u, v \in V\}$$

und die **spezielle unitäre Gruppe** als

$$SU(V) := \{f \in U(V) \,|\, det(f) = 1\}\,.$$

Bemerkung 1.2. Die Notation $U(V)$ beziehungsweise $SU(V)$ ist nicht eindeutig, da die unitäre Gruppe stets auch von der Sesquilinearform β abhängt.

Betrachten wir zunächst ein paar einfache Eigenschaften der unitären Gruppe.

Lemma 1.3. *Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f \in GL(V)$ mit Abbildungsmatrix A bezüglich dieser Basis. Weiter sei $J := (\beta(v_i, v_j))$ die Grammatrix von β. Dann gilt:*

1. *$f \in U(V) \Leftrightarrow A^t J\sigma(A) = J$, wobei $\sigma(A)$ eintragsweise zu verstehen ist,*
2. *$det(A)det(\sigma(A)) = det(A)\sigma(det(A)) = 1$,*
3. *$det : U(V) \to \{a \in \mathbb{F}^\times \,|\, a\sigma(a) = 1\}$ ist surjektiv.*

Beweis. Mit den Eigenschaften der σ-hermitschen Sesquilinearform β folgt

$$\begin{aligned}
&f \in U(V)\\
\Leftrightarrow&\beta(f(v_k), f(v_l)) = \beta(v_k, v_l) \quad \text{für alle } k, l\\
\Leftrightarrow&\beta(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}v_i, \sum_{j=1}^{n} a_{j,l}v_j) = J_{k,l} \quad \text{für alle } k, l\\
\Leftrightarrow&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}\beta(v_i, v_j)\sigma(a_{j,l}) = J_{k,l} \quad \text{für alle } k, l\\
\Leftrightarrow&\left(A^t J\sigma(A)\right)_{k,l} = J_{k,l} \quad \text{für alle } k, l\\
\Leftrightarrow&A^t J\sigma(A) = J.
\end{aligned}$$

Da β nicht ausgeartet, gilt $det(J) \neq 0$ und damit folgt die zweite Behauptung aus der ersten mit der Multiplikativität der Determinanten und da σ ein Körperautomorphismus ist. Für die dritte Aussage sei $v \in V$ mit $\beta(v,v) \neq 0$. Weiter sei $w_2, \ldots, w_n$ eine Basis von $W := \langle v \rangle^{\perp}$ und $a \in \mathbb{F}$ mit $a\sigma(a) = 1$. Dann ist $V = \langle v \rangle \perp \langle w_2, \ldots, w_n \rangle$ und damit folgende lineare Abbildung wohldefiniert

$$g: \; V \to V, \; v \mapsto av \quad \text{und} \quad g\Big|_W = id.$$

Diese Abbildung hat gerade Determinante a. Außerdem gilt

$$\beta(g(v), g(v)) = \beta(av, av) = a\sigma(a)\beta(v,v) = \beta(v,v)$$

sowie

$$\beta(g(v), w_i) = \beta(av, w_i) = 0 = \beta(v, w_i)$$

und für die anderen Kombinationen der Erzeuger von V ist dies klar. Damit gilt $g \in U(V)$ und $det: \; U(V) \to \{a \in \mathbb{F}^{\times} \mid a\sigma(a) = 1\}$ ist surjektiv. $\square$

Direkt aus obigem Lemma erhalten wir.

Korollar 1.4. *Für die* ***projektive unitäre Gruppe*** *$PU(V)$ und die* ***spezielle projektive Gruppe*** *$PSU(V)$ gelten folgende Isomorphien*

1. $PU(V) \cong U(V)/\{\lambda_a \mid a\sigma(a) = 1\}$
2. $PSU(V) \cong SU(V)/\{\lambda_a \mid a\sigma(a) = 1 \text{ und } a^n = 1\}$

2 Der Körper $\mathbb{F}$

Definition 2.1. Sei $\mathbb{F}_0 := \{a \in \mathbb{F} | a = \overline{a}\}$, dann heißt

$$Tr: \; \mathbb{F} \to \mathbb{F}_0, \; a \mapsto a + \overline{a}$$

die **Spurabbildung** und

$$N: \; \mathbb{F}^{\times} \to \mathbb{F}_0^{\times}, \; a \mapsto a\overline{a}$$

die **Normabbildung**.

Bemerkung 2.2. Die Wohldefiniertheit obiger Abbildungen ist leicht nachzurechnen. Weiter sei bemerkt, dass die Menge $\mathbb{F}_0 := \{a \in \mathbb{F} | a = \overline{a}\}$ ein Körper ist, der sogenannte Fixkörper unter σ. Es gilt also, dass $\mathbb{F}_0$ ein Teilkörper von $\mathbb{F}$ ist. Nach dem Lemma von Artin gilt für den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{F}$ über $\mathbb{F}_0$, dass $[\mathbb{F} : \mathbb{F}_0] = |\sigma| = 2$.

Lemma 2.3. *Die Spur- und Normabbildung haben folgende Eigenschaften:*

1. *Tr ist eine $\mathbb{F}_0$-lineare, surjektive Abbildung.*
2. *$Tr(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b - \overline{b}$ für ein $b \in \mathbb{F}$.*
3. *N ist ein Homomorphismus.*

4. *$N(a) = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{b}{\overline{b}}$ für ein $b \in \mathbb{F}^\times$.*

5. *Falls $\mathbb{F}$ endlich ist, ist N surjektiv.*

Beweis. Für die erste Behauptung seien $x, y \in \mathbb{F}$ und $\lambda \in \mathbb{F}_0$. Dann gilt

$$Tr(\lambda x + y) = \lambda x + y + \overline{\lambda x + y} = \lambda x + y + \lambda\overline{x} + \overline{y} = \lambda(x + \overline{x}) + (y + \overline{y}) = \lambda Tr(x) + Tr(y).$$

Damit ist Tr $\mathbb{F}_0$-linear. Es gilt: $dim_{\mathbb{F}_0}(im(Tr)) \leq 1$. Aber Tr nicht die Nullabbildung ist. Für $char(\mathbb{F}) \neq 2$ ist dies klar, da $Tr(1) = 1 + 1$. Ist $char(\mathbb{F}) = 2$ und $Tr(v) = 0$ für alle $v \in V$, so folgt $v = -\overline{v} = \overline{v}$ für alle $v \in V$, also $\sigma = id$ als Widerspruch. Somit gilt $dim_{\mathbb{F}_0} im(Tr) = 1$ und daher $im(Tr) = \mathbb{F}_0$, das heißt Tr ist surjektiv.

Nun zur 2. Aussage. Falls $a = b - \overline{b}$ für ein $b \in \mathbb{F}$, dann gilt $Tr(a) = 0$. Also ist $im(id - \sigma) \subseteq ker(id + \sigma)$. Da nach dem ersten Teil $ker(id - \sigma) = \mathbb{F}_0 = im(id + \sigma)$ gilt, haben beide Vektorräume Dimension 1 und somit gilt die Gleichheit.

Die 3. Behauptung ist klar.

Für die 4. Behauptung betrachte 2 Fälle. Falls $a \neq -1$ und $N(a) = 1$, setze $b := 1 + a$. Dann ist $b = 1 + a = a\overline{a} + a = a(\overline{a} + 1) = a\overline{b}$, also $a = \frac{b}{\overline{b}}$. Falls $a = -1$, wähle $b \in ker(Tr)$. Dann gilt $b = -\overline{b}$, also $\frac{b}{\overline{b}} = -1 = a$. Die andere Richtung ist klar.

Für die 5. Aussage sei $|\mathbb{F}_0| = q$. Dann ist $|\mathbb{F}| = q^2$ und $\sigma(a) = a^q$ für alle $a \in \mathbb{F}$. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}^\times$ ist nämlich zyklisch von Ordnung $q^2 - 1$. Sei $b \in F^\times$ ein Erzeuger und $\sigma(b) = b^k$ für ein $1 \leq k \leq q^2 - 1$. Da $\mathbb{F}_0^\times$ ein Element der Ordnung $q - 1$ enthält, dass von σ festgehalten wird, muss $k \in \{1, q\}$ gelten. Wegen $\sigma \neq id$, folgt $k = q$ und hierdurch ist σ eindeutig bestimmt, das heißt $\sigma(a) = a^q$ für alle $a \in \mathbb{F}$. Dann ist

$$ker(N) = \left\{a \in \mathbb{F}^\times \mid a^{q+1} = 1\right\}.$$

Da $q + 1 \big| q^2 - 1 = |\mathbb{F}^\times|$, ist $kern(N)$ gerade die eindeutige zyklische Untergruppe von $\mathbb{F}^\times$, die alle Elemente enthält, deren Ordnung $q + 1$ teilt. Daher gilt $|ker(N)| = q + 1$. Mit dem Homomorphiesatz erhält man

$$\mathbb{F}^\times / ker(N) \cong im(N)$$

und damit $|im(N)| = \frac{|\mathbb{F}^\times|}{|ker(N)|} = \frac{q^2-1}{q+1} = q - 1$. Also gilt $im(N) = \mathbb{F}_0^\times$ und N ist surjektiv. □

3 Hyperbolische Paare

Lemma 3.1. *Ist $dim(V) \geq 2$ und die Normabbildung surjektiv, dann enthält V isotrope Vektoren.*

Beweis. Sei $0 \neq v \in V$ und $\beta(v, v) =: b$. Ist $b = 0$, dann sind wir fertig. Sei also $b \neq 0$. Für $a \in \mathbb{F}$ und $0 \neq u \in \langle v \rangle^\perp$ erhält man

$$\beta(u + av, u + av) = \beta(u, u) + \overline{a}\beta(u, v) + a\beta(u, v) + a\overline{a}\beta(v, v) = \beta(u, u) + a\overline{a}b.$$

Es gilt $b \in F_0$ sowie $\beta(u, u) \in \mathbb{F}_0$. Da die Normabbildung surjektiv ist, kann $a \in \mathbb{F}$ so gewählt werden, dass $a\overline{a} = -\frac{\beta(u,u)}{b}$. Mit obiger Gleichung folgt dann $\beta(u + av, u + av) = 0$. Da u, v linear unabhängig sind, ist $u + av \neq 0$ und V enthält einen isotropen Vektor. □

Korollar 3.2. *Ist $dim(V) \geq 2$ und $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper, dann enthält V isotrope Vektoren.*

Beweis. Nach Lemma 2.3 ist die Normabbildung für endliches $\mathbb{F}$ surjektiv und damit folgt die Aussage direkt aus obigem Lemma. □

Lemma 3.3. *Falls $L = \langle e, f \rangle < V$ eine hyperbolische Gerade ist, so gilt*

$$V = \langle e, f \rangle \perp \langle e, f \rangle^{\perp}.$$

Beweis. Sei $w = ke + lf \in L \cap L^{\perp}$ mit $k, l \in \mathbb{F}$. Dann folgt $0 = \beta(w, e) = \beta(ke + lf, e) = l\beta(e, f) = l$ und analog $k = \beta(w, f) = 0$. Damit ist $w = 0$ und $L \cap L^{\perp} = \{0\}$. Die Behauptung folgt durch Betrachtung der Dimensionen, denn $dim(L) + dim(L^{\perp}) = dim(V)$. □

Lemma 3.4. *Es existiert eine Zerlegung*

$$V = L_1 \perp L_2 \perp \ldots \perp L_m \perp W$$

von V, wobei m der Wittindex von V ist, W ein anisotroper Unterraum und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ hyperbolische Geraden sind. Falls $\mathbb{F}$ endlich ist, gilt entweder $dim(W) = 1$, falls $dim(V)$ ungerade, oder $dim(W) = 0$, falls $dim(V)$ gerade.

Beweis. Aus dem Vortrag über polare Geometrie wissen wir, dass ein isotroper Vektor $e_1 \in V$ stets zu einem hyperbolisches Paar (e_1, f_1) ergänzt werden kann. Dann ist $L_1 = \langle e_1, f_1 \rangle$ eine hyperbolische Gerade in V und V kann nach Lemma 3.3 aufgespalten werden in $V = L_1 \perp L_1^{\perp}$. Falls $L_1^{\perp}$ wieder einen isotropen Vektor enthält kann dieser Prozess fortgesetzt werden bis

$$V = L_1 \perp L_2 \perp \ldots \perp L_m \perp W,$$

wobei W keine isotropen Vektor enthält und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ hyperbolische Geraden sind.

Sei $U := \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$. Dann gilt $U \subseteq U^{\perp}$, das heißt U ist ein total isotroper Teilraum. Zeige nun, dass U maximal isotrop ist, dann folgt, dass der Wittindex gerade m ist. Angenommen es existiert ein $u \in V$ mit $u \notin U$, so dass $U' := \langle e_1, \ldots, e_m, u \rangle$ total isotrop ist. Dann gilt $u \in U' \subseteq U'^{\perp} \subseteq U^{\perp} = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle + W$. Also gilt $u = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i + w$ für ein $0 \neq w \in W$ und $k_i \in \mathbb{F}$. Betrachte nun

$$0 = \beta(u, u) = \beta(\sum_{i=1}^{m} k_i e_i + w, \sum_{i=1}^{m} k_i e_i + w) = \beta(w, w).$$

Dies ist ein Widerspruch, da W keine isotropen Vektoren enthält. Falls $\mathbb{F}$ endlich gibt es in einem Vektorraum der Dimension ≥ 2 nach Korollar 3.2 immer isotrope Vektoren. Daher gilt dann $dim(W) = 1$ oder $dim(W) = 0$. □

Definition 3.5. Sei $\mathbb{F}$ endlich, $V = L_1 \perp L_2 \perp \ldots \perp L_m \perp W$ und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ wie oben. Falls $dim(W) = 0$ nennt man $(e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m)$ eine **unitäre Basis**. Falls $dim(W) = 1$ sei $W = \langle w \rangle$ mit $\beta(w, w) = 1$. Dann ist $(e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m, w)$ eine **unitäre Basis**.

Bemerkung 3.6. Die unitäre Gruppe $U(V)$ operiert regulär auf Basen dieser Art. Betrachte hierfür den Fall $dim(W) = 1$. Der Fall $dim(W) = 0$ ist völlig analog. Seien also $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, w)$ und $(e'_1, f'_1, \dots, e'_m, f'_m, w')$ zwei unitäre Basen. Dann ist die Abbildung g mit $g(e_i) = e'_i$, $g(f_i) = f'_i$ und $g(w) = w'$ offenbar unitär, das heißt, die Operation ist transitiv. Außerdem ist eine Abbildung, die eine Basis festhält, klarerweise die Identität.

Lemma 3.7. *Sei $\mathbb{F}$ endlich und $dim(V)$ ungerade. Weiter seien $e_1, f_1, \dots, e_m, f_m \in V$ fest gewählt, sodass*

$$V = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m \perp W,$$

wobei W ein anisotroper Unterraum und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ hyperbolische Geraden sind. Dann existieren genau $q + 1$ verschiedene $w \in W$ mit $W = \langle w \rangle$ und $\beta(w, w) = 1$.

Beweis. Nach Lemma 3.4 gilt $dim(W) = 1$. Sei also $W = \langle \tilde{w} \rangle$ für ein $\tilde{w} \in W$. Nun gilt nach Lemma 2.3, dass die Normabbildung surjektiv ist, das heißt, es existiert ein $a \in \mathbb{F}^\times$ mit $N(a) = a\overline{a} = b^{-1}$, wobei $b := \beta(\tilde{w}, \tilde{w})$. Setzte $w := a\tilde{w}$, dann gilt

$$\beta(w, w) = \beta(a\tilde{w}, a\tilde{w}) = a\overline{a}\beta(\tilde{w}, \tilde{w}) = b^{-1}b = 1$$

und $W = \langle w \rangle$. Für jedes $c \in \mathbb{F}^\times$ mit $\beta(cw, cw) = c\overline{c} = 1$ gilt $c \in ker(N)$. Da $|ker(N)| = q + 1$ nach dem Beweis von Lemma 2.3, gibt es $q + 1$ Möglichkeiten für die Wahl des Erzeugers. □

Lemma 3.8. *Sei (V, β) ein unitärer $\mathbb{F}$-Vektorraum, dann existiert eine Orthogonalbasis von V bezüglich β. Falls die Normabbildung surjektiv ist, gibt es eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Zeige zunächst die Existenz einer Orthogonalbasis durch Induktion über $dim(V) = n$. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar, denn es muss einen Erzeuger v geben mit $\beta(v, v) \neq 0$, da β nicht ausgeartet. Sei also $n > 1$ und $\tilde{v} \in V$ beliebig. Falls $\beta(\tilde{v}, \tilde{v}) \neq 0$ setze $v_1 := \tilde{v}$. Ansonsten wähle $w \in V$, so dass $(\tilde{v}, w)$ ein hyperbolisches Paar ist. Dann gilt

$$\beta(\tilde{v} + aw, \tilde{v} + aw) = a + \overline{a}$$

für alle $a \in \mathbb{F}$. Da die Spurabbildung surjektiv ist, wähle a so, dass $a + \overline{a} \neq 0$ und setze $v_1 := \tilde{v} + aw$. Dann gilt in beiden Fällen

$$V = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_1 \rangle^\perp$$

Nun bleibt zu zeigen, dass β auf $\langle v_1 \rangle^\perp < V$ nicht ausgeartet ist. Angenommen, β ist ausgeartet, das heißt, es existiert ein $0 \neq w \in \langle v_1 \rangle^\perp$ mit $\beta(w, u) = 0$ für alle $u \in \langle v_1 \rangle^\perp$. Sei nun $u = u_1 + u_2 \in V$ beliebig mit $u_1 \in \langle v_1 \rangle$ und $u_2 \in \langle v_1 \rangle^\perp$. Dann ist $\beta(u, w) = \beta(u_1, w) + \beta(u_2, w) = 0$. Damit gilt $\beta(u, w) = 0$ für alle $u \in V$, also $0 \neq w \in V^\perp$. Dies ist ein Widerspruch, da β nicht ausgeartet auf V.

Nach der Induktionsvoraussetzung existieren dann $v_2, \dots, v_n$, so dass

$$V = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_2 \rangle \perp \dots \perp \langle v_n \rangle$$

eine Orthogonalbasis ist.

Falls die Normabbildung surjektiv ist, setze $\tilde{v_i} := av_i$ mit $a\overline{a} = \beta(v_i, v_i)^{-1}$. Dann ist $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$ nach Konstruktion und somit $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ eine Orthonormalbasis. □

Lemma 3.9. *Enthält V mindestens einen isotropen Vektor, so existiert eine Basis von V, die nur aus isotropen Vektoren besteht.*

Beweis. Sei zunächst
$$V = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m \perp W,$$
eine Zerlegung wie in Lemma 3.4, das heißt, W ist ein anisotroper Unterraum von V und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ sind hyperbolische Geraden. Ist $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von W, so existieren $a_i \in F$, sodass
$$\beta(w_i + e_1 + a_i f_1, w_i + e_1 + a_i f_1) = \beta(w_i, w_i) + a_i + \overline{a}_i = 0,$$
da die Spurabbildung surjektiv. Setze $\tilde{w}_i := w_i + e_1 + a_i f_1$ für $1 \leq i \leq k$, dann ist $e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k$ eine Basis aus isotropen Vektoren.

□

4 Ordnungen

Falls $|\mathbb{F}_0| = q$ und V ein Vektorraum der Dimension n ist, schreibt man auch $U(n, q)$, $SU(n, q)$, usw.

Das nächste Ziel ist, die Ordnung dieser endlichen Gruppen zu bestimmen. Im ersten Schritt werden die Anzahlen von isotropen Vektoren und hyperbolischen Paaren bestimmt.

Lemma 4.1. *Eine hyperbolische Gerade $L := \langle e, f \rangle$ enthält genau $q+1$ isotrope Punkte.*

Beweis. Die isotropen Punkte von L sind genau $\langle f \rangle$ und $\langle e + bf \rangle$, wobei $b + \overline{b} = 0$. Für $\langle f \rangle$ ist dies klar. Für $\langle e + bf \rangle$ sieht man dies durch
$$\beta(e + bf, e + bf) = \beta(e, e) + \overline{b}\beta(e, f) + b\beta(e, f) + b\overline{b}\beta(f, f) = \overline{b} + b = 0$$
Da die Spurabbildung surjektiv ist, muss der Kern ein eindimensionaler Teilraum von $\mathbb{F}$ sein. Es gibt also q Möglichkeiten ein b zu wählen, so dass $\langle e + bf \rangle$ ein isotroper Punkt ist. Zusammen mit $\langle ef \rangle$ gibt es also $q + 1$ isotrope Punkte. □

Lemma 4.2. *V enthält $(q^{n-1} - (-1)^{n-1})(q^n - (-1)^n)$ isotrope Vektoren.*

Beweis. Sei ι_n die Anzahl der isotropen Punkte in $\mathcal{P}(V)$. Dann ist $(q^2 - 1)\iota_n$ die Anzahl der isotropen Vektoren in V (alle Vielfachen außer dem Nullvektor). Nun soll eine Rekursionsgleichung für ι_n aufgestellt werden. Es gilt $\iota_1 = 0$, denn wäre $\iota_1 = 1$, dann wäre die Form β ausgeartet. Nach Lemma 4.1 gilt $\iota_2 = q + 1$.

Sei nun $n > 2$. Sei $P = \langle p \rangle$ ein isotroper Punkt. Wir wollen zuerst die isotropen Punkte in $\langle p \rangle^\perp$ und danach die isotropen Punkte nicht in $\langle p \rangle^\perp$ zählen.

Sei $s \in V$ so, dass (p,s) hyperbolisches Paar ist. Zeige nun

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle x \rangle \text{ total isotrop } \mid \langle x \rangle \subseteq \langle p \rangle^\perp, \langle x \rangle \neq \langle p \rangle \right\} \\ = & \left\{ \langle x \rangle \text{ total isotrop} \mid \langle x \rangle \subseteq \langle p, r \rangle, \langle r \rangle \subseteq \langle p, s \rangle^\perp \text{ total isotrop }, \langle x \rangle \neq \langle p \rangle \right\} := A \end{aligned}$$

"$\subseteq$" Sei $\langle x \rangle \subseteq \langle p \rangle^\perp$ total isotrop mit $\langle x \rangle \neq \langle p \rangle$. Definiere $r := x - \beta(x,s)p$. Dann ist $0 = \beta(r,r) = \beta(r,p) = \beta(r,s)$. Also gilt $\langle x \rangle \subseteq \langle p, r \rangle, \langle r \rangle \subseteq \langle p, s \rangle^\perp$ total isotrop.

"$\supseteq$ " Sei $\langle x \rangle \subseteq \langle p, r \rangle$ mit $\langle r \rangle \subseteq \langle p, s \rangle^\perp$ total isotrop und $\langle x \rangle \neq \langle p \rangle$. Dann ist $x = kp + lr$ und $\beta(x,p) = \beta(kp + lr, p) = 0$. Also folgt $\langle x \rangle \subseteq \langle p \rangle^\perp$.

Wir zählen also die Menge A ab.

Wähle dazu ein $r \in V$ fest, so dass $\langle r \rangle \subseteq \langle p, s \rangle^\perp$und $\langle r \rangle$ isotrop. Sei weiter $T := \langle kp + lr \rangle \subseteq \langle p, r \rangle$ ein isotroper Punkt mit $T \neq P$. Dann ist aber $l \neq 0$, also $T = \langle \tilde{k}p + r \rangle$. Dann gilt

$$\beta(\tilde{k}p + r, \tilde{k}p + r) = 0$$

denn $\beta(p,p) = \beta(r,r) = \beta(p,r) = 0$. Also gibt es $q^2 = |\mathbb{F}|$ Möglichkeiten für die Wahl von $\tilde{k}$ um einen isotropen Punkt zu erhalten. Für die Wahl von $\langle r \rangle$ gibt es ι_{n-2} Möglichkeiten, da $dim(\langle p, s \rangle^\perp) = n-2$ und für $\langle r \rangle \neq \langle r' \rangle$ gilt $\langle p, r \rangle \cap \langle p, r' \rangle = \langle p \rangle$, denn wäre $dim(\langle p, r \rangle \cap \langle p, r' \rangle) = 2$, würde $r' = kp + lr$ mit $k \neq 0$ gelten. Dann wäre $kp = r' - lr \in \langle p, s \rangle^\perp$. Dies ist ein Widerspruch zu $\beta(p,s) = 1$. Also ist die Mächtigkeit der Menge A genau $q^2\iota_{n-2}$. Damit ist $1 + q^2\iota_{n-2}$ die Anzahl der isotropen Punkte in $\langle p \rangle^\perp$.

Nun wollen wir die isotropen Punkte zählen, die nicht in $\langle p \rangle^\perp$ liegen. Zunächst sei bemerkt, dass jeder isotrope Punkt $\langle r \rangle \not\subseteq \langle p \rangle^\perp$ auf der Geraden $\langle p, r \rangle$ liegt. Zudem enthält jede hyperbolische Gerade genau $\iota_2 = q + 1$ isotrope Punkte. Wir bestimmen nun also die Mächtigkeit der Menge

$$\mathcal{L} := \left\{ L \leq V \mid dim(L) = 2, \langle p \rangle \leq L, L \not\leq \langle p \rangle^\perp \right\}$$

Dann gilt $|\mathcal{L}| = |\left\{ L \leq V/P \mid dim(L) = 1, L \not\leq P^\perp/P \right\}$. Wir können also die Erzeuger zählen. Dabei gilt $dim(V/P) = n - 1$ und $dim(P^\perp/P) = n - 2$. Also gibt es $(q^2)^{n-1} - (q^2)^{n-2}$ mögliche Erzeuger. Damit ist

$$|\mathcal{L}| = \frac{\left(q^2\right)^{n-1} - \left(q^2\right)^{n-2}}{q^2 - 1} = \frac{\left(q^2\right)^{n-2}\left(q^2 - 1\right)}{q^2 - 1} = q^{2n-4}$$

Da auf jeder Geraden q isotrope Punkte ungleich $\langle p \rangle$ liegen, ist $qq^{2n-4} = q^{2n-3}$ die Anzahl der isotropen Punkte, die nicht in $\langle p \rangle^\perp$ liegen.

Also gilt

$$\iota_n = q^2\iota_{n-2} + q^{2n-3} + 1$$

Die Lösung dieser Rekursionsgleichung ist

$$\iota_n = \frac{(q^{n-1} - (-1)^{n-1})(q^n - (-1)^n)}{q^2 - 1}$$

Damit ist die Anzahl der isotropen Vektoren in V genau $(q^{n-1} - (-1)^{n-1})(q^n - (-1)^n)$. $\square$

Lemma 4.3. *V enthält $q^{2n-3}(q^{n-1}-(-1)^{n-1})(q^n-(-1)^n)$ hyperbolische Paare.*

Beweis. Sei (u,v) ein hyperbolisches Paar. Für die Wahl von $u \in V$ gibt es nach obigem Beweis $(q^2-1)\iota_n$ Möglichkeiten. Der zweite isotrope Vektor v darf nicht in $\langle u\rangle^\perp$ liegen. Wieder nach obigem Beweis gibt es q^{2n-3} Möglichkeiten für die Wahl eines isotropen Punktes $\langle s\rangle = S \notin \langle u\rangle^\perp$. Nun gilt

$$\beta(u,as) = \beta(u,s)\sigma(a) \overset{!}{=} 1$$

Da $\beta(u,s) \neq 0$ und σ ein Körperautomorphismus ist, gibt es genau eine Wahl für a. Also gibt es genau ein $v \in S$ mit $\beta(u,v) = 1$. Damit ist die Anzahl der hyperbolischen Paare in V genau $(q^2-1)\iota_n q^{2n-3} = q^{2n-3}(q^{n-1}-(-1)^{n-1})(q^n-(-1)^n)$. □

Satz 4.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|U(n,q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{k=1}^n(q^k-(-1)^k)$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann hat V eine unitäre Basis der Form $(e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m, w)$. Dann gibt es genau

$$q^{2n-3}(q^2-1)\iota_n q^{2n-7}(q^2-1)\iota_{n-2}\cdots q^3(q^2-1)\iota_3(q+1)$$

Möglichkeiten für die Wahl dieser Basis. Da $U(n,q)$ regulär auf den Basen dieser Form operiert, gilt auch

$$\begin{aligned}
&|U(n,q)| \\
=\ & q^{2n-3}(q^2-1)\iota_n q^{2n-7}(q^2-1)\iota_{n-2}\cdots q^3(q^2-1)\iota_3(q+1) \\
=\ & (q+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\iota_{1+2k}(q^2-1)q^{4k-1} \\
=\ & (q+1)q^{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}4k-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(q^{2k}-(-1)^{2k})(q^{2k+1}-(-1)^{2k+1}) \\
=\ & (q+1)q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{k=2}^n(q^k-(-1)^k) \\
=\ & q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{k=1}^n(q^k-(-1)^k)
\end{aligned}$$

da $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}4k-1 = 4(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k) - \frac{n-1}{2} = 4\left(\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}\right) - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)-(n-1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann hat V eine Basis der Form $(e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m)$. Dann gibt es genau

$$q^{2n-3}(q^2-1)\iota_n q^{2n-7}(q^2-1)\iota_{n-2}\cdots q(q^2-1)\iota_2$$

Möglichkeiten für die Wahl dieser Basis. Da $U(n,q)$ regulär auf den Basen dieser Form operiert, gilt auch

$$\begin{aligned}
&|U(n,q)| \\
=\ & q^{2n-3}(q^2-1)\iota_n q^{2n-7}(q^2-1)\iota_{n-2}\cdots q(q^2-1)\iota_2 \\
=\ & \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}\iota_{2k}(q^2-1)q^{4k-3} \\
=\ & q^{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}4k-3}\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}(q^{2k-1}-(-1)^{2k-1})(q^{2k}-(-1)^{2k}) \\
=\ & q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{k=1}^n(q^k-(-1)^k)
\end{aligned}$$

da $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 4k - 3 = 4(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k) - \frac{3n}{2} = 4\left(\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2}\right) - \frac{3n}{2} = \frac{n(n+2)-3n}{2} = \frac{n^2+2n-3n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. □

Korollar 4.5. $|PU(n,q)| = |SU(n,q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=2}^{n}(q^k - (-1)^k)$

Beweis. Die spezielle unitäre Gruppe ist eine Untergruppe vom Index $q+1$ in $U(n,q)$, denn mit dem Homomorphiesatz angewandt auf die Determinantenabbildung gilt

$$U(n,q)/SU(n,q) \cong \left\{a \in \mathbb{F}^{\times} | a\overline{a} = 1\right\} = ker(N)$$

Somit folgt die Behauptung für $SU(n,q)$ mit Lemma 2.3 und dem obigen Satz. Außerdem gilt

$$PU(n,q) \cong U(n,q)/\left\{\lambda_a | a\overline{a} = 1\right\}$$

und $|\left\{\lambda_a | a\overline{a} = 1\right\}| = |ker(N)|$. Damit folgt die Behauptung auch für $PU(n,q)$. □

Korollar 4.6. $|PSU(n,q)| = d^{-1} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=2}^{n}(q^k - (-1)^k)$*, wobei* $d := ggT(n, q+1)$.

Beweis. Es gilt:

$$PSU(n,q) \cong SU(n,q)/\left\{\lambda_a | a\overline{a} = 1, a^n = 1\right\}$$

Die Skalarmatrizen bilden eine Untergruppe der Ordnung d in $SU(n,q)$, denn

$$|\left\{\lambda_a | a\overline{a} = 1, a^n = 1\right\}| = |\left\{a \in \mathbb{F}^{\times} | a\overline{a} = 1, a^n = 1\right\}|$$

und die rechte Seite ist eine Untergruppe der multiplikativen, zyklischen Gruppe von $\mathbb{F}$, wobei alle Elemente eine Ordnung haben, die n und $q+1$ teilt. Damit folgt die Behauptung. □

5 Unitäre Transvektionen

Lemma 5.1. *Falls* $f \in U(V)$*, dann gilt* $ker(id - f)^{\perp} = im(id - f)$.

Beweis. Sei $v \in ker(id - f)$. Dann ist $(id - f)(v) = 0$, also $f(v) = v$. Daher gilt für alle $u \in V$:

$$\beta(u - f(u), v) = \beta(u,v) - \beta(f(u), v) \overset{f(v)=v}{=} \beta(u,v) - \beta(f(u), f(v) \overset{f \in U(V)}{=} 0$$

Daher gilt also $im(id-f) \subseteq ker(id-f)^{\perp}$. Außerdem gilt $dim(im(id-f)) + dim(ker(id-f)) = n = dim(ker(id-f)^{\perp}) + dim(ker(id-f))$, also ist $dim(im(id-f)) = dim(ker(id-f)^{\perp})$. Damit folgt die Gleichheit. □

Betrachte nun Transvektionen: Sei dazu $\varphi \in V^*$, $u \in V$ mit $\varphi(u) = 0$. Dann ist

$$t_{\varphi,u}(v) = v + \varphi(v)u$$

eine lineare Transvektion.

Lemma 5.2. *Falls $t_{\varphi,u} \neq id$, dann gilt:*

1. $ker(id - t_{\varphi,u}) = ker(\varphi)$
2. $im(id - t_{\varphi,u}) = \langle u \rangle$
3. *Falls $t_{\varphi,u} \in U(V)$, dann ist u isotrop.*

Beweis. Da $t_{\varphi,u} \neq id$, ist $u \neq 0$ und $\varphi \neq 0$.
Sei nun

$$\begin{array}{cc} & x \in ker(id - t_{\varphi,u}) \\ \Leftrightarrow & (id - t_{\varphi,u})(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & x - x - \varphi(x)u = 0 \\ \Leftrightarrow & \varphi(x)u = 0 \\ \overset{u \neq 0}{\Leftrightarrow} & \varphi(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & x \in ker(\varphi) \end{array}$$

Dies zeigt die erste Bemerkung.
Für die zweite Bemerkung sei

$$\begin{array}{cl} & y \in im(id - t_{\varphi,u}) \\ \Leftrightarrow & \exists\, x \in V : \ (id - t_{\varphi,u})(x) = y \\ \Leftrightarrow & x - x - \varphi(x)u = y \\ \Leftrightarrow & -\varphi(x)u = y \\ \Rightarrow & y \in \langle u \rangle \end{array}$$

Daher gilt also $im(id - t_{\varphi,u}) \subseteq \langle u \rangle$. Da aber auch $t_{\varphi,u} \neq id$, ist $dim(im(id - t_{\varphi,u})) \neq 0$, also folgt die Gleichheit.
Falls $t_{\varphi,u} \in U(V)$ folgt dann mit Lemma 5.1 $ker(\varphi) = \langle u \rangle^{\perp}$. Da außerdem $\varphi(u) = 0$, folgt, dass u isotrop ist. □

Satz 5.3. *Sei t eine Transvektion. Dann gilt: $t \in U(V) \ \Leftrightarrow \ t(v) = v + a\beta(v,u)u$ mit $a \in \mathbb{F}$, wobei $a + \overline{a} = 0$, und u isotroper Vektor ist.*

Beweis. Nach obigem Lemma ist u isotrop. Des Weiteren gilt:

$$\begin{array}{cl} & t = t_{\varphi,u} \in U(V) \\ \Leftrightarrow & \beta(t(v), t(w)) = \beta(v,w) \text{ für alle } v,w \in V \\ \Leftrightarrow & \beta(v + \varphi(v)u, w + \varphi(w)u) = \beta(v,w) \text{ für alle } v,w \in V \\ \Leftrightarrow & \beta(v,w) + \overline{\varphi(w)}\beta(v,u) + \varphi(v)\beta(u,w) + \varphi(v)\overline{\varphi(w)}\beta(u,u) = \beta(v,w) \text{ für alle } v,w \in V \\ \Leftrightarrow & \overline{\varphi(w)}\beta(v,u) + \varphi(v)\beta(u,w) = 0 \text{ für alle } v,w \in V \end{array}$$

Da u isotrop ist, kann man einen Vektor $\tilde{w}$ finden, so dass $(u,\tilde{w})$ ein hyperbolisches Paar ist. Also ist $\beta(\tilde{w},\tilde{w}) = 0$, woraus folgt, dass $\overline{\varphi(\tilde{w})} + \varphi(\tilde{w}) = 0$. Dann gilt: $t(v) = v + \varphi(v)u = v - \overline{\varphi(\tilde{w})}\beta(v,u)u$. Setze $a := -\overline{\varphi(\tilde{w})}$ um gewünschte Darstellung zu erhalten.

Andersherum sei $t(v) = v + a\beta(v,u)u$ eine Transvektion mit u isotrop, $a \in \mathbb{F}$ und $a + \overline{a} = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta(t(v),t(w)) &= \beta(v + a\beta(v,u)u, w + a\beta(w,u)u) \\ &= \beta(v,w) + \overline{a}\beta(u,w)\beta(v,u) + a\beta(v,u)\beta(u,w) + a\overline{a}\beta(v,u)\beta(u,w)\beta(u,u) \\ &= \beta(v,w) + (a+\overline{a})\beta(u,w)\beta(v,u) \\ &= \beta(v,w) \end{aligned}$$

Damit ist $t \in U(V)$. □

Korollar 5.4. *V enthält isotrope Vektoren genau dann, wenn $SU(V)$ Transvektionen enthält.*

Beweis. Sei u isotroper Vektor in V. Da die Spurabbildung surjektiv ist, wähle $a \in Tr^{-1}(\{0\})$. Sei $\varphi := a\beta(-,u)$. Dann ist $t_{\varphi,u} \in U(V)$. Außerdem gilt $det(t_{\varphi,u}) = 1$, also $t_{\varphi,u} \in SU(V)$. Die andere Richtung ist mit obigem Lemma klar. □

Bemerkung 5.5. Falls V ein Vektorraum über einem endlichen Körper mit $dim\ V \geq 2$ ist, enthält er isotrope Vektoren. Bei Vektorräumen über unendlichen Körpern ist das im Allgemeinen nicht der Fall.

Die Wurzelgruppe $X_{P,P^\perp} = \left\{t_{\varphi,u} |\ u \in P,\ ker\ \varphi = P^\perp\right\}$mit $P := \langle u \rangle$ für einen isotropen Vektor u besteht genau aus den Transvektionen der Form aus Satz 5.3, also kann man die die Wurzelgruppe auf folgendermaßen darstellen:

$$X_{P,P^\perp} = \{v \mapsto v + a\beta(v,u)u \mid a + \overline{a} = 0\}$$

.

Lemma 5.6. *$U(V)$ operiert durch Konjugation transitiv auf der Menge der Wurzelgruppen $X_{P,P^\perp}$mit $P := \langle u \rangle$ für einen isotropen Vektor u.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $U(V)$ transitiv auf der Menge der isotropen Vektoren operiert. Seien dazu u und w isotrope Vektoren in V. Betrachte $f:\ \langle u \rangle \to V,\ u \mapsto w$. Dann ist f eine lineare Isometrie, denn seinen $u_1, u_2 \in \langle u \rangle$, also $u_1 = a_1 u$ und $u_2 = a_2 u$. Dann gilt $\beta(f(u_1), f(u_2)) = a_1\overline{a_2}\beta(w,w) = 0 = \beta(u_1,u_2)$. Da β nicht ausgeartet ist, ist die Voraussetzung vom Satz von Witt erfüllt, und f kann zu einer lineare Isometrie g auf V fortgesetzt werden. Außerdem ist g bijektiv, und daher gilt $g \in U(V)$ mit $g(u) = w$.

Nun zeige, dass $U(V)$ transitiv auf der Menge der Wurzelgruppe operiert. Seien $P = \langle u \rangle$ und $R = \langle w \rangle$ jeweils von einem isotropen Vektor erzeugt. Nach dem bereits gezeigtem existiert ein $f \in U(V)$ mit $f(u) = w$. Betrachte nun

$$\begin{aligned} & fX_{P,P^\perp}f^{-1} \\ = \; & f\{v \mapsto v + a\beta(v,u)u \mid a + \overline{a} = 0\}\, f^{-1} \\ = \; & \left\{v \mapsto v + a\beta(f^{-1}(v),u)f(u) \mid a + \overline{a} = 0\right\} \\ = \; & \{v \mapsto v + a\beta(v,f(u))f(u) \mid a + \overline{a} = 0\} \\ = \; & \{v \mapsto v + a\beta(v,w)w \mid a + \overline{a} = 0\} \\ = \; & X_{R,R^\perp} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 5.7. $T(V)$ ist die von Transvektionen erzeugte Untergruppe von $SU(V)$.

6 Hyperbolische Geraden

Satz 6.1. *Falls L eine hyperbolische Gerade ist, dann ist $SU(L) \cong SL(2, \mathbb{F}_0)$.*

Beweis. Sei $L = \langle e, f\rangle$, wobei (e, f) ein hyperbolisches Paar und J die Grammatrix von β bezüglich (e, f) ist, d.h. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Weiter sei $f \in GL(L)$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& f \in SU(L) \\
\iff & A^T J\sigma(A) = J \,\text{und}\, det(A) = ad - bc = 1 \\
\iff & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{c} + \overline{a}c & a\overline{d} + c\overline{d} \\ \overline{a}d + b\overline{c} & b\overline{d} + \overline{b}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}\, ad - bc = 1 \\
\iff & a\overline{c} + \overline{a}c = b\overline{d} + \overline{b}d = 0 \,\text{und}\, ad - bc = 1 = a\overline{d} + c\overline{b} \\
\iff & b + \overline{b} = c + \overline{c} = 0,\ ad - bc = 1 \,\text{und}\, a, d \in \mathbb{F}_0
\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz ergibt sich dabei folgendermaßen. Zeige zunächst die Rückrichtung. Es gilt $\overline{a}c + a\overline{c} = \overline{a}c - ac = c(\overline{a} - a) = 0$, da $a \in \mathbb{F}_0$. Analog für $\overline{b}d + b\overline{d}$. Da $d \in \mathbb{F}_0$ folgt weiter $a\overline{d} + \overline{b}c = ad + \overline{b}c = 1 + bc + \overline{b}c =1 + c(b + \overline{b}) = 1$. Nun zur anderen Richtung.

$$\begin{aligned}
c - bc\overline{c} = (1 - b\overline{c})c = d\overline{a}c = -da\overline{c} = -(1 + bc)\overline{c} = -\overline{c} - bc\overline{c} \Rightarrow c + \overline{c} = 0 \\
ad\overline{d} - \overline{d} = \overline{d}(ad - 1) = b\overline{d}c = -\overline{b}dc = -d(\overline{b}c) = -d(1 - a\overline{d}) = -d + ad\overline{d} \Rightarrow d = \overline{d}
\end{aligned}$$

Analog lässt sich $b + \overline{b} = 0$ und $\overline{a} = a$ zeigen. Sei nun $s \in \mathbb{F}^\times$ mit $s + \overline{s} = 0$. Dies ist möglich, da die Spurabbildung stets surjektiv ist. Definiere nun folgende Abbildung

$$\pi : SU(L) \to SL(2, \mathbb{F}_0), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & sb \\ s^{-1}c & d \end{pmatrix},$$

wobei hier die Abbildungen mit den Abbildungsmatrizen identifiziert werden. Die Abbildung ist wohldefiniert, da $det\begin{pmatrix} a & sb \\ s^{-1}c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1$ und weiter wie bereits gezeigt $a, d \in \mathbb{F}_0$ sowie $\overline{sb} = \overline{s}\overline{b} = (-s)(-b) = sb$ und $\overline{s^{-1}c} = \overline{s^{-1}}\overline{c} = (-s^{-1})(-c) = s^{-1}c$, das heißt $sb,\ s^{-1}c \in \mathbb{F}_0$. Außerdem ist π offenbar ein Homomorphismus und injektiv. Für die Surjektivität sei $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{F}_0)$ beliebig. Setze $a = a', d = d'$ sowie $b = b's^{-1}$und $c = c's$. Dann gilt $a, d \in \mathbb{F}_0, ad - bc = 1$ sowie $b + \overline{b} = b'(s^{-1} + \overline{s^{-1}}) = 0$ und $c + \overline{c} = c'(s + \overline{s}) = 0$. Das heißt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(L)$ mit $\pi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Damit ist π ein Isomorphismus und die Behauptung gezeigt. $\square$

Lemma 6.2. *$PSU(L)$ operiert zweifach-transitiv auf den isotropen Punkten von $\mathcal{P}(L)$.*

Beweis. Sei $V := \langle x, y\rangle_{\mathbb{F}_0}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{F}_0$-Vektorraum und sei $L = \langle e, f\rangle_{\mathbb{F}}$, wobei (e, f) ein hyperbolisches Paar ist. Es gilt

$$\{P \in \mathcal{P}(L) \mid P \text{ isotrop}\} = \{\langle f\rangle, \langle e + af\rangle \mid a + \overline{a} = 0\} =: M_1$$

und

$$\mathcal{P}(V) = \{\langle y\rangle, \langle x + by\rangle \mid b \in \mathbb{F}_0\} =: M_2$$

Sei π wie in obigem Beweis. Definiere eine Abbildung φ wie folgt:

$$\varphi : M_1 \to M_2,\ \langle f\rangle \mapsto \langle y\rangle \text{ und } \langle e + af\rangle \mapsto \langle x + s^{-1}ay\rangle$$

wobei s wie in der Definition von π in obigem Beweis. Dann ist φ wohldefiniert, denn $\overline{s^{-1}a} = \overline{s^{-1}}\overline{a} = (-s^{-1})(-a) = s^{-1}a$, also ist $s^{-1}a \in \mathbb{F}_0$. Außerdem gilt für ein $b \in \mathbb{F}_0$, dass $sb + \overline{sb} = sb + \overline{s}b = (s + \overline{s})b = 0$, also ist $\varphi(\langle e + sbf\rangle) = \langle x + by\rangle$. Damit ist φ surjektiv. Die Injektivität von φ ist klar. Also ist φ ein Bijektion. Dann gibt es eine Korrespondenz zwischen der Operation von $PSU(L)$ auf den isotropen Punkten von $\mathcal{P}(L)$ und der Operation von $PSL(V)$ auf $\mathcal{P}(V)$ im folgenden Sinne:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \stackrel{A}{\to} & M_1 \\ \varphi \updownarrow & & \updownarrow \varphi \\ M_2 & \stackrel{\pi(A)}{\to} & M_2 \end{array}$$

wobei $A \in PSU(L)$. Durch nachrechnen erhält man für alle $P \in M_1$: $\varphi(A(P)) = \pi(A)(\varphi(P))$, das Diagramm kommutiert also. Da nach Satz 4.1 (Taylor) die Gruppe $PSL(V)$ zweifach-transitiv auf M_2 operiert, operiert auch $PSU(L)$ zweifach-transitiv auf M_1. □

Korollar 6.3. *Für eine hyperbolische Gerade L gilt:*

1. *$T(L) = SU(L)$; d.h. $SU(L)$wird von Transvektionen erzeugt.*
2. *$T(L) = SU(L)'$, außer für $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{F}_9$*

Beweis. Sei $V := \langle x, y\rangle$ ein zweidimensionaler $\mathbb{F}_0$-Vektorraum. Eine Transvektion aus $SU(L)$ hat die Form $t(v) = v + a\beta(v, e)e$, wobei e ein isotroper Vektor und $a + \overline{a} = 0$ ist. Wähle als Basis also das hyperbolische Paar (e, f). Dann hat die Matrix der Abbildung Dreiecksgestalt:

$$T := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wendet man nun den Isomorphismus π aus Satz 6.1 auf T an, so erhält man:

$$\pi(T) = \begin{pmatrix} 1 & sa \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setze nun $\varphi(x) = 0$ und $\varphi(y) = sa$, also $\varphi \in V^*$. Dann ist $\pi(T)$ die Matrix der Transvektion $t_{\varphi,x}: \ v \mapsto v + \varphi(v)x$. Man erkennt also, dass die Transvektionen von $SU(L)$ genau den Transvektionen von $SL(V)$ entsprechen. Da nach Satz 4.3 (Taylor) die Gruppe $SL(V)$ von Transvektionen erzeugt wird, wird mit der Isomorphie aus Satz 6.1 also auch $SU(L)$ von Transvektionen erzeugt. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Für die zweite Behauptung benutze Satz 4.4 (Taylor). Da $dim(V) = 2$ muss $|\mathbb{F}_0| \notin \{2,3\}$ gelten, damit die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Dann gilt $SL(2,\mathbb{F}_0) = SL(2,\mathbb{F}_0)'$. Mit der Isomorphie aus Satz 6.1 gilt also $SU(L) = SU(L)'$, und mit Teil 1 folgt dann $T(L) = SU(L)'$. □

Lemma 6.4. *Für alle $a \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$ ist die Operation von $SU(L)$ auf der Menge $\Omega := \{v \mid \beta(v,v) = a\}$ regulär.*

Beweis. Sei $v \in \Omega$ beliebig, das heißt $\beta(v,v) = a$. Ergänze v durch u zu einer Orthogonalbasis von L, also $L = \langle v\rangle \perp \langle u\rangle$. Sei nun $f \in Stab_{SU(L)}(v)$. Betrachte die Abbildungsmatrix A von f bezüglich der Basis (v,u). Dann gilt $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & l \end{pmatrix}$, wobei $f(u) = kv + lu$ für $k,l \in \mathbb{F}$. Dann folgt $1 = det(A) = l$. Weiter erhält man

$$0 = \beta(u,v) = \beta(f(u), f(v)) = \beta(kv + lu, v) = k\beta(v,v)$$

und da $\beta(v,v) \neq 0$ folgt somit $k = 0$ und $f = id_L$. Damit gilt $Stab_{SU(L)}(v) = \{id_L\}$ für alle $v \in \Omega$. Zeige noch, dass die Operation transitiv ist. Seien dazu $v, w \in \Omega$ beliebig und $\tilde{g} : \langle w\rangle \to L,\ w \mapsto v$. Dann kann die lineare Isometrie $\tilde{g}$ nach dem Satz von Witt auf L fortgesetzt werden. Sei diese Fortsetzung $g \in U(L)$ und $d := det(g)$ sowie $\langle v\rangle^\perp = \langle u\rangle$ wie oben. Definiere $f : L \to L$ durch $f(v) = v$ und $f(u) = d^{-1}u$. Einsetzen der Basisvektoren v,u zeigt, dass $\beta(f(v_1), f(v_1)) = \beta(v_1, v_2)$ für alle $v_i \in L$, das heißt $f \in U(L)$. Dann folgt $fg \in SU(L)$, denn $det(fg) = det(f)det(g) = d^{-1}d = 1$. Weiter gilt $fg(w) = f(v) = v$ und damit ist die Transitivität gezeigt. □

7 Die Operation der $PSU(V)$ auf den Isotropen Punkten

Lemma 7.1. *Sei $V = L \perp W$, wobei $L = \langle e,f\rangle$ für ein hyperbolisches Paar $(e,f) \in V \times V$, und $d \in \mathbb{F}$ mit $d\overline{d} = 1$. Dann existiert $g \in U(V)$ mit $g\big|_W = id_W$, $g(\langle e\rangle) = \langle e\rangle$, $g(\langle f\rangle) = \langle f\rangle$ und $det(g) = d^{-1}$.*

Beweis. Sei $w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von W, also $V = \langle e,f\rangle \perp \langle w_1, \ldots, w_k\rangle$. Nach Lemma 2.3 existiert ein $a \in F$ mit $d = a/\overline{a}$. Definiere

$$g : V \to V,\ e \mapsto \overline{a}e,\ f \mapsto a^{-1}f \quad \text{und } w_i \mapsto w_i.$$

Dann gilt

$$\beta(g(e), g(f)) = \beta(\overline{a}e, a^{-1}f) = \overline{a}\overline{a^{-1}} = 1 = \beta(e,f)$$

und

$$\beta(g(e), g(w_i)) = 0 = \beta(e, w_i) \quad \text{und} \quad \beta(g(w_i), g(w_j)) = \beta(w_i, w_j)$$

und für die anderen Kombinationen der Erzeuger analog. Es gilt also $g \in U(V)$ sowie $det(g) = \overline{a}a^{-1} = d^{-1}$ und die anderen geforderten Eigenschaften sind offenbar ebenfalls erfüllt. □

Satz 7.2. *Sei der Wittindex von V mindestens 1 und Ω die Menge der isotropen Punkte von $\mathcal{P}(V)$. Dann gilt:*

1. *Die Gruppe $PSU(V)$ operiert transitiv und treu auf Ω.*
2. *Falls der Wittindex von V gleich 1 ist, dann operiert $PSU(V)$ zweifach-transitiv auf Ω.*
3. *Falls der Wittindex von V mindestens 2 ist, dann ist die Operation von $PSU(V)$ auf Ω primitiv.*

Beweis. Zeige zunächst, dass die Operation der $PSU(V)$ auf Ω treu ist. Sei dazu $g \in SU(V)$ mit $g(P) = P$ für alle $P \in \Omega$. Für eine hyperbolische Gerade $L = \langle e, f\rangle$ gilt dann $g(e) = re$ und $g(f) = sf$ für geeignete $r, s \in \mathbb{F}^\times$, da $\langle e\rangle$ und $\langle f\rangle$ isotrope Punkte sind. Sei $0 \neq a \in \mathbb{F}$, sodass $a + \overline{a} = 0$. Dann ist $\langle e + af\rangle$ ein isotroper Punkt und damit $g(e + af) = t(e + af)$ für ein $t \in \mathbb{F}^\times$. Dann erhalten wir aber

$$re + asf = g(e) + ag(f) = g(e + af) = t(e + af) = te + atf.$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von e, f folgt dann $r = t = s$. Damit fixiert g jeden Punkt auf L. Sei nun $\langle w\rangle$ ein beliebiger anisotroper Punkt, $e \in V$ isotrop, $b := \beta(e, w)$ und $k \in \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\beta(w + ke, w + ke) &= k\beta(e, w) + \overline{k}\beta(w, e) + \beta(w, w)\\ &= kb + \overline{kb} + \beta(w, w).\end{aligned}$$

Da die Spurabbildung surjektiv ist, kann k so gewählt werden, dass $\beta(w+ke, w+ke) = 0$, insbesondere gilt dann $k \neq 0$. Dann ist $\langle w + ke, e\rangle$ eine hyperbolische Gerade mit $\langle w\rangle \subseteq \langle w + ke, e\rangle$ und nach dem bereits Gezeigtem wird $\langle w\rangle$ fixiert. Damit ist die Operation treu.

Zeige nun die Transitivität der Operation. Seien dazu $P_1 = \langle p_1\rangle$, $P_2 = \langle p_2\rangle \in \Omega$ beliebig. Betrachte zunächst den Fall, dass $\beta(p_1, p_2) \neq 0$. Dann ist $L := \langle p_1, p_2\rangle$ eine hyperbolische Gerade. Nach Lemma 6.2 existiert $\tilde{g} \in SU(L)$ mit $\tilde{g}(P_1) = P_2$. Da $V = L \perp L^\perp$ gilt, kann man $\tilde{g}$ durch die Identität auf $L^\perp$ zu einer Abbildung $g \in SU(V)$ fortsetzen mit $g(P_1) = P_2$. Betrachte nun also den zweiten Fall, das heißt, $\beta(p_1, p_2) = 0$. Dann ist $E := \langle p_1, p_2\rangle$ ein total isotroper Unterraum von V. Sei $\tilde{g} \in SL(E)$ mit $\tilde{g}(P_1) = P_2$. Die lineare Isometrie kann nach dem Satz von Witt auf V fortgesetzt werden. Sei $g \in U(V)$ diese Fortsetzung und $d := det(g)$, also insbesondere $d\overline{d} = 1$. Weiter sei $f \in V$, sodass $L := \langle p_2, f\rangle$ eine hyperbolische Gerade. Dann ist

$$V = L \perp W,$$

wobei $W := L^{\perp}$. Nach Lemma 7.1 existiert $g' \in U(V)$ mit

$$g'\big|_W = id_W,\, g'(P_2) = P_2, g'(\langle f\rangle) = \langle f\rangle \quad \text{und} \quad det(g') = d^{-1}.$$

Also ist $h := g'g \in SU(V)$ mit $g(P_1) = P_2$.

Zeige als nächstes die zweite Aussage. Seien hierfür $P = \langle p\rangle$, $Q_1 = \langle q_1\rangle$, $Q_2 = \langle q_2\rangle \in \Omega$ mit $Q_i \neq P$. Dann gilt $\beta(p, q_i) \neq 0$, da sonst $\langle p, q_i\rangle$ ein total isotroper Untervektorraum von V der Dimension 2 wäre, im Widerspruch dazu, dass V Wittindex 1 hat. Nehme durch Skalierung ohne Einschränkung an, dass (p, q_1) und (p, q_2) hyperbolische Paare sind. Nach dem Satz von Witt kann die lineare Isometrie

$$\tilde{g} : \langle p, q_1\rangle \to V,\, p \mapsto p,\, q_1 \mapsto q_2$$

zu einem $g \in U(V)$ fortgesetzt werden. Sei $d := det(g)$ und $L := \langle p, q_2\rangle$, dann existiert nach Lemma 7.1 ein $g' \in U(V)$ mit

$$g'(P) = P,\, g'(Q_2) = Q_2 \quad \text{und} \quad det(g') = d^{-1}.$$

Dann ist wiederum $h := g'g \in SU(V)$ mit $h(P) = P$ und $h(Q_1) = Q_2$. Also operiert $Stab_{PSU(V)}(P)$ transitiv auf $\Omega\backslash\{P\}$ für ein beliebiges $P \in \Omega$ und damit $PSU(V)$ doppelt transitiv auf Ω.

Die dritte Aussage lässt sich analog zu Satz 8.3 (Taylor) zeigen. □

8 Dreidimensionale unitäre Geometrien

In diesem Abschnitt sei V eine unitäre Geometrie der Dimension 3 mit Wittindex 1.

Sei $(\tilde{e}, f)$ ein hyperbolisches Paar in V und sei $0 \neq w \in \langle e, f\rangle^{\perp}$ mit $\beta(w, w) = b \neq 0$. Setze $e := b\tilde{e}$ und $\tilde{\beta} := b^{-1}\beta$. Dann gilt weiterhin, dass (e, f) ein hyperbolisches Paar ist, denn $\tilde{\beta}(e, e) = b^{-1}b\bar{b}\beta(\tilde{e}, \tilde{e}) = 0 = b^{-1}\beta(f, f) = \tilde{\beta}(f, f)$ und $\tilde{\beta}(e, f) = b^{-1}b\beta(\tilde{e}, f) = 1$. Außerdem gilt nun auch $\tilde{\beta}(w, w) = 1$.

Wir können also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $e, w, f \in V$ so gewählt sind, dass $\beta(e, w) = \beta(f, w) = 0$ und $\beta(e, f) = \beta(w, w) = 1$ und (e, w, f) eine Basis von V ist. Die Grammatrix der Form β hat dann die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $g \in Stab_{U(V)}\langle e\rangle$. Ziel ist es nun, die Matrix dieser Abbildung aufzustellen. Damit $\langle e\rangle$ fixiert wird, muss die Matrix die folgende Form haben:

$$G' := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich muss sie die Relation $G'^t J\overline{G'} = J$ erfüllen. Daraus ergibt sich aber schon, dass $a_6 = 0$. Also ist

$$G := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Abbildung g. Nun erkennt man auch, dass $g(\langle e\rangle^{\perp}) = g(\langle e, w\rangle) = \langle e, w\rangle$ ist. Außerdem erhält man durch die obige Eigenschaft der Matrix G, dass die Einträge folgende Beziehungen erfüllen müssen:

1. $a_1\overline{a_6} = \overline{a_1}a_6 = 1$
2. $a_4\overline{a_4} = 1$
3. $a_2\overline{a_6} + a_4\overline{a_5} = 0$
4. $a_3\overline{a_6} + a_5\overline{a_5} + a_6\overline{a_3} = 0$

Nun kann man aus diesen Bedingungen die Matrix für $g \in Stab_{SU(V)}(e)$ konstruieren. Man erhält also eine weitere Bedingung.

5. $det(G) = a_1a_4a_6 = 1$

Außerdem folgt nun, dass $a_1 = 1$ ist, damit $g(e) = e$ gilt. Mit Bedingung 1 erhält man nun, dass auch $a_6 = 1$ gelten muss. Dann ist aufgrund von Bedingung 5 auch $a_4 = 1$. Setze nun $a_1 = a_6 = a_4 = 1$ in die Bedingungen 3 und 4 ein, dann erhält man, dass die Abbildungsmatrix von g die Gestalt

$$Q(a,b) := \begin{pmatrix} 1 & -\overline{a} & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a\overline{a} + b + \overline{b} = 0$ haben muss.

Korollar 8.1. *$Stab_{SU(V)}(e) = Q := \{Q(a,b) \mid a\overline{a} + b + \overline{b} = 0\}$ und es gelten die folgenden Formeln für die Multiplikation und die Bildung der inversen Matrix:*

$$Q(a_1,b_1)Q(a_2,b_2) = Q(a_1 + a_2, b_1 + b_2 - \overline{a_1}a_2)$$
$$Q(a,b)^{-1} = Q(-a, -b - a\overline{a})$$

.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus obiger Konstruktion. Für den Beweis der Formeln muss das Matrixprodukt nachgerechnet werden. □

Lemma 8.2. *Die Kommutatoruntergruppe Q' von Q ist die Wurzelgruppe $X_{\langle e\rangle,\langle e\rangle^{\perp}}$ und es gilt $T(V) \subseteq SU(V)'$*

Beweis. Mit den in Lemma 8.1 benutzten Formeln für die Multiplikation und das Invertieren von Elementen aus Q erhält man

$$[Q(a_1,b_1), Q(a_2,b_2)] = Q(0, a_1\overline{a_2} - \overline{a_1}a_2)$$

Für $b := a_1\overline{a_2} - \overline{a_1}a_2$ gilt nun, dass $b + \overline{b} = 0$. Also können wir schreiben

$$Q' = \{Q(0,b) \mid b + \overline{b} = 0\}$$

Betrachte nun die Wurzelgruppe $X_{\langle e\rangle,\langle e\rangle^\perp} = \{v \mapsto v + b\beta(v,e)e \mid b + \overline{b} = 0\}$. Bezüglich der Basis (e, w, f) hat die Matrix dieser Transvektion die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q(0,b)$$

mit $b + \overline{b} = 0$. Damit ist Q' die Wurzelgruppe $X_{\langle e\rangle,\langle e\rangle^\perp}$. Die in diesem Kapitel benutzte Konstruktion kann für jeden beliebigen isotropen Vektor e' gemacht werden. Somit erhält man, dass $T(V) \subseteq SU(V)'$, da jede Transvektion in einer Wurzelgruppe enthalten ist und da $Q \subseteq SU(V)$ und somit auch $Q' = X_{\langle e\rangle,\langle e\rangle^\perp} \subseteq SU(V)'$ für alle isotropen Vektoren $e \in V$. $\square$

Lemma 8.3. *Falls $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $|\mathbb{F}| > 4$ ist, operiert $T(V)$ transitiv auf der Menge $M := \{v \in V \mid \beta(v,v) = 1\}$.*

Beweis. Seien $v, w \in M$. Falls $L := \langle v, w\rangle$ nicht entartet ist, gilt nach Korollar 3.2, dass L isotrope Vektoren enthält, also kann man als Basis ein hyperbolisches Paar wählen. Damit ist L eine hyperbolische Gerade. Dann gilt mit Lemma 6.4 und Lemma 6.3, dass es eine Transvektion $t \in T(V)$ gibt mit $t(v) = w$.

Betrachte nun den Fall, dass $\langle v, w\rangle$ entartet ist, also $\langle v, w\rangle^\perp = \langle e\rangle \subset \langle v, w\rangle$, wobei e so gewählt ist, dass $e = v - aw$, also $v = e + aw$. Dann ist e ein isotroper Vektor, denn $\beta(e,e) = \beta(e, v - aw) = \beta(e,v) - \overline{a}\beta(e,w) = 0$, da $e \in \langle v, w\rangle^\perp$. Insbesondere ist $e \in \langle w\rangle^\perp$. Da $dim(\langle w\rangle^\perp) = 2$, existiert ein isotroper Vektor $f \in \langle w\rangle^\perp$ mit $\beta(e,f) = 1$. Also gilt $\langle e, f\rangle = \langle w\rangle^\perp$und (e, w, f) ist eine Basis von V. Betrachte nun $\beta(v, w - \overline{a}f) = \beta(v,w) - a\beta(v,f) = \beta(e + aw, w) - a\beta(e + aw, f) = a - a = 0$. Also ist $w - \overline{a}f \in \langle v\rangle^\perp$. Da außerdem $e \in \langle v\rangle^\perp$und (e, w, f) eine Basis von V ist, ist also $(e, w - \overline{a}f)$ eine Basis von $\langle v\rangle^\perp$.

Wähle nun $u \in \langle v\rangle^\perp = \langle e, w - \overline{a}f\rangle$, so dass $\langle u, v\rangle$ und $\langle u, w\rangle$ nicht entartet ist. O.B.d.A setze $u := be + w - \overline{a}f$. Dann ist $\beta(u,w) = \beta(be + w - \overline{a}f, w) = \beta(w,w) = 1$. Sei nun $0 \neq x = ku + lv \in \langle u, v\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \langle u, v\rangle \text{ entartet} \\ \iff\ & \beta(x,u) = k\beta(u,u) = 0 \text{ und } \beta(x,v) = l = 0 \\ \overset{k\neq 0}{\iff}\ & \beta(u,u) = 0 \end{aligned}$$

Also muss b so gewählt werden, dass $\beta(u,u) \neq 0$. Betrachte jetzt $0 \neq x = ku + lw \in \langle u, w\rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \langle u, w\rangle \text{ entartet} \\ \iff\ & \beta(x,u) = k\beta(u,u) + l = 0 \text{ und } \beta(x,w) = k + l = 0 \\ \iff\ & k(\beta(u,u) - 1) = 0 \end{aligned}$$

Es muss also $k = 0$ oder $\beta(u,u) = 1$ gelten. Da aber $k + l = 0$, ist im Fall $k = 0$ auch $l = 0$. Damit wäre auch $x = 0$, also kann dieser Fall nicht auftreten. Insgesamt erhält man also

$$\langle u, w\rangle \text{ entartet } \iff \beta(u,u) = 1$$

Dann muss einerseits gelten $\beta(u,u) = \beta(be + w - \overline{a}f, be + w - \overline{a}f) = -ab - \overline{ab} + 1 \neq 0$, also $ab + \overline{ab} \neq 1$, andererseits muss auch gelten$\beta(u,u) \neq 1$, also $ab + \overline{ab} \neq 0$. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass $Bild(Tr) \cap \{0,1\} \neq \emptyset$ sein muss. Dies ist immer möglich, falls $\mathbb{F}_0 \neq \mathbb{F}_2$. Da $dim_{\mathbb{F}_0}\mathbb{F} = 2$, muss also $|\mathbb{F}| > 4$ gelten.

Dann sind also $\langle u, v\rangle$ und $\langle u, w\rangle$ hyperbolische Geraden. Aus dem ersten Teil des Beweises gibt es also $t_1, t_2 \in T(V)$ mit $t_1(v) = u$ und $t_2(u) = w$. Dann ist $(t_2 \circ t_1)(v) = w$. □

Nun wollen wir zum Hauptziel dieses Abschnitts kommen, und die Einfachheit der Gruppe $PSU(3,q)$ für $q \neq 2$ beweisen. Dazu wird zunächst ein Lemma benötigt.

Lemma 8.4. *Sei $P = \langle p\rangle \in \mathcal{P}(V)$. Dann ist die Wurzelgruppe $X_{P,P^\perp}$ ein abelscher Normalteiler von $Stab_{SU(3,q)}(\langle p\rangle)$.*

Beweis. Seien $t_1, t_2 \in X_{P,P^\perp}$. Dann ist $t_i(v) = b + a_i\beta(v,p)p$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
& (t_1 \circ t_2)(v) \\
= \ & t_1(v + a_2\beta(v,p)p) \\
= \ & v + a_2\beta(v,p)p + a_1\beta(v + a_2\beta(v,p)p, p)p \\
= \ & v + a_2\beta(v,p)p + a_1\beta(v,p)p \\
= \ & v + (a_1 + a_2)\beta(v,p)p \\
= \ & v + a_1\beta(v,p)p + a_2\beta(v + a_2\beta(v,p)p, p)p \\
= \ & (t_2 \circ t_1)(v)
\end{aligned}$$

damit ist $X_{P,P^\perp}$abelsch. Außerdem gilt für ein $f \in Stab_{SU(3,q)}(\langle p\rangle)$ mit $f(p) = np$ und $n \in \mathbb{F}^\times$:

$$\begin{aligned}
& fX_{P,P^\perp}f^{-1} \\
= \ & f\{v \mapsto v + a\beta(v,p)p \mid a + \overline{a} = 0\}f^{-1} \\
= \ & \left\{v \mapsto v + a\beta(f^{-1}(v),p)f(p) \mid a + \overline{a} = 0\right\} \\
= \ & \{v \mapsto v + a\beta(v, f(p))f(p) \mid a + \overline{a} = 0\} \\
= \ & \{v \mapsto v + a\beta(v, np)np \mid a + \overline{a} = 0\} \\
= \ & \{v \mapsto v + a\overline{n}n\beta(v,p)p \mid an\overline{n} + \overline{a}\overline{n}n = 0\} \\
= \ & X_{P,P^\perp}
\end{aligned}$$

also ist die Wurzelgruppe ein abelscher Normalteiler. □

Satz 8.5. *Für $q \neq 2$ sind die Gruppen $PSU(3,q)$ einfach.*

Beweis. Sei $q \neq 2$ und sei $v \in V$ mit $\beta(v,v) = 1$ nach Lemma 3.8 gilt, dass v zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden kann. Sei also (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 := v$ eine Orthonormalbasis von V. Sei nun $g \in Stab_{SU(3,q)}(v)$ mit $g(v_i) = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}v_k$ für $i = 2, 3$.

Außerdem ist für $i = 2, 3$

$$0 = \beta(v, v_i) = \beta(g(v), g(v_i)) = \beta(v, \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} v_k) = \overline{a_{i,1}}$$

also ist $g(v_i) \in \langle v_2, v_3 \rangle$. Die Matrix dieser Abbildung hat dann folgende Blockdiagonalgestalt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, wobei A die Matrix der Abbildung $g|_{\langle v_2, v_3 \rangle}$. Da $g \in SU(3, q)$, muss $det(A) = 1$ gelten, also kann $g|_{\langle v_2, v_3 \rangle}$ als Abbildung in $SU(2, q)$ aufgefasst werden. Somit erhält man $Stab_{SU(3,q)}(v) \cong SU(2, q)$. Aus Korollar 6.3 wissen wir, dass $SU(2, q)$ von Transvektionen erzeugt ist.

Sei nun $g \in SU(3, q)$. Dann gilt $\beta(v, v) = 1 = \beta(g(v), g(v))$, also existiert nach Lemma 8.3 $t \in T(V)$ mit $t(v) = g(v)$. Dann ist $g' := t^{-1} \circ g \in Stab_{SU(3,q)}(v)$. Also ist $g' = \prod_{i=1}^{n} t_i$ ein Produkt aus Transvektionen. Damit ist $g = g' \circ t = \prod_{i=1}^{n} t_i \circ t$ ebenfalls ein Produkt aus Transvektionen. Damit ist $T(V) = SU(3, q)$. Mit Lemma 8.2 folgt also $SU(3, q)' = SU(3, q)$. Nach Satz 7.2 operiert $SU(3, q)$ zweifach transitiv, also primitiv, auf den isotropen Punkten. Nach Lemma 8.4 ist $X_{P,P^\perp}$ für einen isotropen Punkt $P = \langle p \rangle$ ein abelscher Normalteiler. Außerdem gilt:

$$\begin{array}{rc} & \langle f^{-1} X_{P,P^\perp} f \mid f \in SU(3, q) \rangle \\ = & \langle f^{-1} \{v \mapsto v + a\beta(v, p)p \mid a + \overline{a} = 0\} f \mid f \in SU(3, q) \rangle \\ = & \langle v \mapsto v + a\beta(v, f(p))f(p) \mid a + \overline{a} = 0,\ f \in SU(3, q) \rangle \\ = & \langle X_{Q,Q^\perp} \mid Q \in \Omega \rangle \\ = & T(V) \\ = & SU(3, q) \end{array}$$

Dann folgt mit Iwasawas Kriterium, dass

$$SU(3, q)/ \{g \in SU(3, q) \mid g(P) = P \text{ für alle isotropen Punkte } P\}$$

einfach ist. Die Abbildung, die alle isotropen Punkte fest lässt, ist die Identität auf $PSU(3, q)$. Also gilt

$$\begin{array}{rl} & SU(3, q)/ \{g \in SU(3, q) \mid g(P) = P \text{ für alle isotropen Punkte } P\} \\ = & SU(3, q)/ \left\{\lambda_a \mid a\sigma(a) = 1, a^3 = 1\right\} \\ \cong & PSU(3, q) \end{array}$$

Damit ist also $PSU(3, q)$ einfach. □

9 Die Einfachheit von $PSU(V)$

Bemerkung 9.1. Die Ausnahmefälle in den jeweiligen Sätzen, insbesondere die Gruppen $PSU(2, 2)$, $PSU(2, 3)$ und $PSU(3, 2)$, werden in diesem Abschnitt nicht näher untersucht. Hierfür sei auf die entsprechenden Abschnitte im Kapitel über unitäre Gruppen im Taylor verwiesen.

Lemma 9.2. *Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $dim(V) \geq 2$, so operiert die von Transvektionen erzeugte Untergruppe $T(V)$ transitiv auf $M := \{v \in V \mid \beta(v,v) = 1\}$ außer für den Fall $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ und $dim(V) = 3$.*

Beweis. Für $n = 2$ folgt die Behauptung aus Korollar 6.3 und Lemma 6.4. Für $n = 3$ folgt die Aussage aus Lemma 8.3. Sei also $n \geq 4$ und $v, w \in M$. Betrachte zunächst den Fall, dass $dim(\langle v, w\rangle) = 2$ gelte. Da $\mathbb{F}$ endlich ist, enthält $\langle v, w\rangle$ isotrope Vektoren nach Korollar 3.2 und diese können zu einem hyperbolischen Paar ergänzt werden. Das heißt $\langle v, w\rangle$ ist eine hyperbolische Gerade und $V = \langle v, w\rangle \perp \langle v, w\rangle^{\perp}$. Da β nicht ausgeartet ist, existiert $u \in \langle v, w\rangle^{\perp}$ mit $\beta(u, u) \neq 0$. Da die Normabbildung surjektiv ist, sei ohne Einschränkung $\beta(u, u) = 1$, also $u \in M$. Es gilt $u \notin \langle v, w\rangle$, das heißt, $L_1 := \langle u, v\rangle$ und $L_2 := \langle u, w\rangle$ sind Vektorräume der Dimension 2, also hyperbolische Geraden, da $\mathbb{F}$ endlich ist. Nach Lemma 6.4 und Korollar 6.3 existiert $t_1 \in SU(L_1)$ mit $t_1(v) = u$ und $t_2 \in SU(L_2)$ mit $t_2(u) = w$. Da die t_i nach Satz 5.3 Produkte von Transvektionen der Gestalt

$$t(x) = x + a\beta(x, e)e$$

für einen isotropen Vektoren $e \in V$ und $a \in \mathbb{F}$ mit $a + \overline{a} = 0$ sind, können die einzelnen Transvektionen und damit auch ihr Produkt als Elemente von $U(V)$ aufgefasst werden. Dann ist $t := t_2t_1 \in T(V)$ mit $t(v) = w$. Im Fall, dass $dim(\langle v, w\rangle) = 1$, existiert $w' \in M$ mit $w' \notin \langle v\rangle = \langle w\rangle$. Nach dem bereits Gezeigtem, existieren dann $t_1, t_2 \in T(V)$ mit $t_1(v) = w'$ und $t_2(w') = w$. Dann erfüllt wiederum $t := t_2t_1 \in T(V)$, dass $t(v) = w$ und damit ist $T(V)$ transitiv auf M. □

Eine Verallgemeinerung des obigen Lemmas ist sehr viel aufwendiger zu beweisen, worauf an dieser Stelle verzichtet wird.

Lemma 9.3. *Ist $dim(V) \geq 2$, dann operiert $T(V)$ transitiv auf $\{v \in V \mid \beta(v, v) = a\}$ für beliebiges $a \in \mathbb{F}_0^{\times}$, außer für den Fall $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ und $dim(V) = 3$.*

Beweis. Siehe Taylor, Satz 10.21. □

Lemma 9.4. *Ist $dim(V) \geq 2$ und der Wittindex von V mindestens 1, so gilt $T(V) = SU(V)$ außer für den Fall $SU(V) = SU(3, 2)$.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass V stets einen isotropen Vektor e enthält, der sich zu einem hyperbolischen Paar (e, f) ergänzen lässt, da der Wittindex von V mindestens 1 ist. Da V isotrope Vektoren enthält, existieren darüber hinaus auch stets Transvektionen in $SU(V)$. Zeige die Behauptung per vollständiger Induktion über n. Für $n = 2$ ist $V = \langle e, f\rangle$ eine hyperbolische Gerade und die Aussage folgt aus Korollar 6.3. Sei also $n \geq 3$. Da die Spurabbildung surjektiv ist, existiert $a \in \mathbb{F}$ mit $a + \overline{a} = 1$. Setze weiter $v_1 := e + af$. Dann gilt

$$\beta(v_1, v_1) = \beta(e + af, e + af) = a + \overline{a} = 1.$$

Ergänze nun v_1 zu einer Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V und sei $V' := \langle v_2, \ldots, v_n\rangle$. Zeige zunächst $Stab_{SU(V)}(v_1) \cong SU(V')$. Definiere hierfür die Abbildung

$$\psi : SU(V') \to Stab_{SU(V)}(v_1),\ f \mapsto \tilde{f} \quad \text{mit } \tilde{f}\colon\ v_1 \mapsto v_1,\ v_j \mapsto f(v_j) \quad \text{für } j \geq 2.$$

Diese ist wohldefiniert, da für $f \in SU(V')$ und $\tilde{f} := \psi(f)$ gilt, dass

$$\beta(\tilde{f}(v_1), \tilde{f}(v_1)) = \beta(v_1, v_1) \text{ und } \beta(\tilde{f}(v_1), \tilde{f}(v_j)) = 0 = \beta(v_1, v_j)$$

und analog für die anderen Kombinationen der Erzeuger. Die Injektivität von ψ ist klar. Zur Surjektivität sei $\tilde{f} \in Stab_{SU(V)}(v_1)$ und $\tilde{f}(v_j) = \sum_{i=1}^{n} k_{i,j} v_i$. Dann folgt

$$0 = \beta(v_1, v_j) = \beta(\tilde{f}(v_1), \tilde{f}(v_j)) = \beta(v_1, \sum_{i=1}^{n} k_{i,j} v_i) = \overline{k_{1,j}} \beta(v_1, v_1) = \overline{k_{1,j}},$$

also $f := \tilde{f}\big|_{V'} : V' \to V' \in SU'(V)$. Das heißt $\psi(f) = \tilde{f}$ und ψ ist surjektiv. Zeige noch, dass ψ Transvektionen auf Transvektionen abbildet. Sei dazu $t \in SU(V')$ eine beliebige Transvektion, dann gilt nach Lemma 5.3, dass

$$t(v) = v + a\beta(v, u)u$$

für einen isotropen Vektor $u \in V'$ und $a \in \mathbb{F}$ mit $a + \overline{a} = 0$. Fasse t als Element in $SU(V)$ auf, dann gilt $t(v_1) = v_1 + a\beta(v_1, u)u = v_1$, da $u \in V'$. Das heißt $t \in Stab_{SU(V)}(v_1)$ und $\psi(t\big|_{V'}) = t$ ist eine Transvektion. Umgekehrt ist die Einschränkung einer Transvektion auf V' auch stets wieder eine Transvektion. Nach Induktionsvoraussetzung gilt weiter

$$T(V') = SU(V') \cong Stab_{SU(V)}(v_1).$$

Zu beachten ist hierbei, dass für den Fall $SU(V) = SU(4, 2)$ die Induktionsvoraussetzung nicht angewendet werden kann. Die Behauptung folgt in diesem Fall direkt aus Korollar 10.19 (Taylor). Da ψ Transvektionen auf Transvektionen abbildet, gilt also $T(V) \supseteq Stab_{SU(V)}(v_1)$. Sei nun $g \in SU(V)$ beliebig, dann gilt

$$\beta(g(v_1), g(v_1)) = \beta(v_1, v_1) = 1.$$

Wegen der Transitivität von $T(V)$ auf $\{v \in V \mid \beta(v, v) = 1\}$ nach Lemma 9.3, da $SU(V) \neq SU(3, 2)$, existiert ein $t \in T(V)$ mit $t(v_1) = g(v_1)$. Dann ist $t^{-1}g \in Stab_{SU(V)}(v_1) \subseteq T(V)$, also $g \in T(V)$ und $T(V) = SU(V)$, wie gewünscht. □

Lemma 9.5. *Sei $dim(V) \geq 3$ und der Wittindex von V mindestens 1, so gilt $SU(V) = SU(V)'$ außer für den Fall $SU(V) = SU(3, 2)$.*

Beweis. Zeige zunächst, dass $T(V) \subseteq SU(V)'$. Für $n = 3$ folgt die Aussage aus Lemma 8.2. Sei also $n \geq 4$ und $t \in T(V)$ eine Transvektion mit

$$t(v) = v + a\beta(v, u)u$$

für einen isotropen Vektor $u \in V$ und $a \in \mathbb{F}$ mit $a + \overline{a} = 0$ nach Satz 5.3. Ergänze u durch $e \in V$ zu einem hyperbolischen Paar (u, e). Weiter seien $w_1, \ldots, w_{n-2} \in V$ so, dass

$$V = \langle u, e \rangle \perp \langle w_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle w_{n-2} \rangle.$$

Betrachte nun $\tilde{V} := \langle u, e, w_1 \rangle$. Da $dim(\tilde{V}) = 3$, gilt nach Lemma 8.2, dass $T(\tilde{V}) \subseteq SU(\tilde{V})'$, das heißt, es existieren $g, h \in SU(\tilde{V})$ mit

$$t\Big|_{\tilde{V}} = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Setzte g, h durch die Identität auf $\tilde{V}^{\perp} = \langle w_2, \ldots, w_{n-2} \rangle$ fort. Wegen der Orthogonalität lässt sich leicht nachrechnen, dass dann $g, h \in SU(V)$. Weiter ist $t\Big|_{\tilde{V}^{\perp}} = id$, also gilt

$$t = ghg^{-1}h^{-1} \in SU(V)'.$$

Da dies für einen beliebigen Erzeuger t von $T(V)$ gilt, haben wir $T(V) \subseteq SU(V)'$ gezeigt. Nach Annahme ist $SU(V) \neq SU(3,2)$, also folgt mit Lemma 9.4, dass $T(V) = SU(V)$ und somit $SU(V)' = SU(V)$. □

Satz 9.6. *Ist $dim(V) \geq 2$ und der Wittindex von V mindestens 1, dann ist die Gruppe $PSU(V)$ einfach, außer für die Fälle $PSU(2,2)$, $PSU(2,3)$ und $PSU(3,2)$.*

Beweis. Zeige, dass die Voraussetzungen für Iwasawas Einfachheitskriterium erfüllt sind. Sei dazu Ω die Menge der isotropen Punkte von V, $P = \langle p \rangle \in \Omega$ für $p \in V$ ein beliebiger isotroper Punkt und $A := X_{P,P^{\perp}}$ die dazugehörige Wurzelgruppe. Betrachte die Gruppe $SU(V)$ für $SU(V)$ ungleich $SU(2,2)$, $SU(2,3)$ und $SU(3,2)$. Die Operation von $SU(V)$ auf Ω ist nach Satz 7.2 primitiv. Für den Fall, dass der Wittindex 1 ist, folgt dies, da die doppelte Transitivität die Primitivität der Operation impliziert. Außerdem gilt $T(V) = SU(V)$ nach Lemma 9.4, da $SU(V) \neq SU(3,2)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\langle f^{-1}Af \mid f \in SU(V) \rangle \\
=&\langle f^{-1} \{v \mapsto v + a\beta(v,p)p \mid a + \overline{a} = 0\} f \mid f \in SU(V) \rangle \\
=&\langle v \mapsto v + a\beta(v, f(p))f(p) \mid a + \overline{a} = 0,\ f \in SU(V) \rangle \\
=&\langle X_{Q,Q^{\perp}} \mid Q \in \Omega \rangle = T(V) = SU(V).
\end{aligned}$$

Die drittletzte Gleichheit folgt, da die Operation von $SU(V)$ auf Ω nach Satz 7.2 transitiv ist. Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass jede Transvektion in einer Wurzelgruppe enthalten ist und $T(V)$ von Transvektionen erzeugt wird. Völlig analog zum Beweis von Lemma 8.4 kann gezeigt werden, dass A ein abelscher Normalteiler von $Stab_{SU(V)}(P)$ ist. Weiter gilt $SU(V)' = SU(V)$. Für $n \geq 3$ folgt dies direkt aus Lemma 9.5, da $SU(V) \neq SU(3,2)$. Für $n = 2$ ist $SU(V)$ ungleich $SU(2,2)$ beziehungsweise $SU(2,3)$. Daher ist dann $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_4$ sowie $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_9$ und die Aussage folgt aus Korollar 6.3. Das Anwenden von Iwasawas Einfachheitskriterium liefert die Einfachheit von

$$\begin{aligned}
SU(V)/\{f \in SU(V) \mid f(P) = P\, \forall P \in \Omega\} &= SU(V)/\{\lambda_a \mid a\sigma(a) = 1,\ a^n = 1\} \\
&\cong PSU(V).
\end{aligned}$$

Dabei wurde einerseits die Tatsache benutzt, dass $PSU(V)$ nach Satz 7.2 treu auf Ω operiert und andererseits die Isomorphie aus Korollar 1.4. □