
Unitäre Gruppen

Vortrag zum Seminar zur Algebra, 23.06.2010

Anika Nehnes und Jan Hackfeld

§1 Einleitung

In diesem Vortrag bezeichne $\mathbb{F}$ einen Körper, V einen endlich dimensionalen $\mathbb{F}$ -Vektorraum der Dimension n und $\mathcal{P}(V)$ der zugehörige projektive Raum. Weiter sei β stets eine nicht-ausgeartete σ -hermitesche Sesquilinearform. Für $a \in \mathbb{F}$, benutze die Schreibweise $\bar{a} := \sigma(a)$ und λ_a für die Skalarmatrix mit a auf der Diagonalen.

Definition 1.1. Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$U(V) := \{f \in GL(V) \mid \beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v) \forall u, v \in V\}$$

und die **spezielle unitäre Gruppe** als $SU(V) := \{f \in U(V) \mid \det(f) = 1\}$.

Lemma 1.2. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $f \in GL(V)$ mit Abbildungsmatrix A bezüglich dieser Basis. Weiter sei $J := (\beta(v_i, v_j))$ die Grammatrix von β . Dann gilt:

1. $f \in U(V) \Leftrightarrow A^t J \sigma(A) = J$, wobei $\sigma(A)$ eintragsweise zu verstehen ist.
2. $\det(A) \det(\sigma(A)) = \det(A) \sigma(\det(A)) = 1$
3. $\det : U(V) \rightarrow \{a \in \mathbb{F}^\times \mid a \sigma(a) = 1\}$ ist surjektiv

Korollar 1.3. Für die **projektive unitäre Gruppe** $PU(V)$ und die **spezielle projektive unitäre Gruppe** $PSU(V)$ gelten folgende Isomorphismen:

1. $PU(V) \cong U(V) / \{\lambda_a \mid a \sigma(a) = 1\}$
2. $PSU(V) \cong SU(V) / \{\lambda_a \mid a \sigma(a) = 1 \text{ und } a^n = 1\}$

§2 Der Körper $\mathbb{F}$

Definition 2.1. Sei $\mathbb{F}_0 := \{a \in \mathbb{F} \mid a = \bar{a}\}$, dann heißt

$$Tr : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_0, a \mapsto a + \bar{a}$$

die **Spurabbildung** und

$$N : \mathbb{F}^\times \rightarrow \mathbb{F}_0^\times, a \mapsto a\bar{a}$$

die **Normabbildung**.

Lemma 2.2. Die Spur- und Normabbildung haben folgende Eigenschaften:

1. Tr ist eine $\mathbb{F}_0$ -lineare, surjektive Abbildung.
2. $Tr(a) = 0 \Leftrightarrow a = b - \bar{b}$ für ein $b \in \mathbb{F}$.
3. N ist ein Homomorphismus.
4. $N(a) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{b}{\bar{b}}$ für ein $b \in \mathbb{F}^\times$.
5. Falls $\mathbb{F}$ endlich ist, ist N surjektiv.

§3 Hyperbolische Paare

Lemma 3.1. Ist $\dim(V) \geq 2$ und die Normabbildung surjektiv, dann enthält V isotrope Vektoren.

Korollar 3.2. Ist $\dim(V) \geq 2$ und $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper, dann enthält $\mathbb{F}$ isotrope Vektoren.

Lemma 3.3. Falls $L = \langle e, f \rangle < V$ eine hyperbolische Gerade ist, so gilt

$$V = \langle e, f \rangle \perp \langle e, f \rangle^\perp$$

Lemma 3.4. Es existiert eine Zerlegung

$$V = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m \perp W$$

von V , wobei m der Wittindex von V ist, W ein anisotroper Unterraum und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ hyperbolische Geraden sind. Falls $\mathbb{F}$ endlich ist, gilt entweder $\dim(W) = 1$, falls $\dim(V)$ ungerade, oder $\dim(W) = 0$, falls $\dim(V)$ gerade.

Definition 3.5. Sei $\mathbb{F}$ endlich, $V = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m \perp W$ und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ wie oben. Falls $\dim(W) = 0$ nennt man $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m)$ eine **unitäre Basis**. Falls $\dim(W) = 1$ sei $W = \langle w \rangle$. Dann ist $(e_1, f_1, \dots, e_m, f_m, w)$ eine **unitäre Basis**.

Bemerkung 3.6. $U(V)$ operiert regulär auf Basen dieser Art.

Lemma 3.7. Sei $\mathbb{F}$ endlich und $\dim(V)$ ungerade. Weiter seien $e_1, f_1, \dots, e_m, f_m \in V$ fest gewählt, sodass

$$V = L_1 \perp L_2 \perp \dots \perp L_m \perp W,$$

wobei W ein anisotroper Unterraum und $L_i = \langle e_i, f_i \rangle$ hyperbolische Geraden sind. Dann existieren genau $q + 1$ verschiedene $w \in W$ mit $W = \langle w \rangle$ und $\beta(w, w) = 1$.

Lemma 3.8. Sei (V, β) ein unitärer $\mathbb{F}$ -Vektorraum, dann existiert eine Orthogonalbasis von V bezüglich β . Falls die Normabbildung surjektiv ist, gibt es eine Orthonormalbasis.

Lemma 3.9. Enthält V mindestens einen isotropen Vektor, so existiert eine Basis von V , die nur aus isotropen Vektoren besteht.

§4 Ordnungen

Falls $|\mathbb{F}_0| = q$ und V ein Vektorraum der Dimension n ist, schreibt man auch $U(n, q)$, $SU(n, q)$, usw.

Lemma 4.1. Eine hyperbolische Gerade $L := \langle e, f \rangle$ enthält genau $q + 1$ isotrope Punkte.

Lemma 4.2. V enthält $(q^{n-1} - (-1)^{n-1})(q^n - (-1)^n)$ isotrope Vektoren.

Lemma 4.3. V enthält $q^{2n-3}(q^{n-1} - (-1)^{n-1})(q^n - (-1)^n)$ hyperbolische Paare.

Satz 4.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|U(n, q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=1}^n (q^k - (-1)^k)$.

Korollar 4.5. $|PU(n, q)| = |SU(n, q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=2}^n (q^k - (-1)^k)$

Korollar 4.6. $|PSU(n, q)| = d^{-1} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=2}^n (q^k - (-1)^k)$, wobei $d := \gcd(n, q + 1)$.

§5 Unitäre Transvektionen

Lemma 5.1. Falls $f \in U(V)$, dann gilt $\ker(id - f)^\perp = \operatorname{im}(id - f)$.

Lemma 5.2. Falls $t_{\varphi,u} \neq id$, dann gilt:

1. $\ker(id - t_{\varphi,u}) = \ker(\varphi)$
2. $\operatorname{im}(id - t_{\varphi,u}) = \langle u \rangle$
3. Falls $t_{\varphi,u} \in U(V)$, dann ist u isotrop.

Satz 5.3. Sei t eine Transvektion. Dann gilt: $t \in U(V) \Leftrightarrow t(v) = v + a\beta(v,u)u$ mit $a \in \mathbb{F}$, wobei $a + \bar{a} = 0$, und u isotroper Vektor ist.

Definition 5.7. $T(V)$ sei die von Transvektionen erzeugte Untergruppe von $SU(V)$.

§6 Hyperbolische Geraden

Satz 6.1. Falls L eine hyperbolische Gerade ist, dann ist $SU(L) \cong SL(2, \mathbb{F}_0)$.

Lemma 6.2. $PSU(L)$ operiert zweifach-transitiv auf den isotropen Punkten von $\mathcal{P}(L)$.

Korollar 6.3. Für eine hyperbolische Gerade L gilt:

1. $T(L) = SU(L)$; d.h. $SU(L)$ wird von Transvektionen erzeugt.
2. $T(L) = SU(L)'$, außer für $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{F}_9$

Lemma 6.4. Für alle $a \in \mathbb{F}_0 \setminus \{0\}$ ist die Operation von $SU(L)$ auf der Menge $\Omega := \{v \mid \beta(v,v) = a\}$ regulär.

§7 Die Operation der $PSU(V)$ auf den Isotropen Punkten

Lemma 7.1. Sei $V = L \perp W$, wobei $L = \langle e, f \rangle$ für ein hyperbolisches Paar $(e, f) \in V \times V$, und $d \in \mathbb{F}$ mit $d\bar{d} = 1$. Dann existiert $g \in U(V)$ mit $g|_W = id_W$, $g(\langle e \rangle) = \langle e \rangle$, $g(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ und $\det(g) = d^{-1}$.

Satz 7.2. Sei Ω die Menge der isotropen Punkte von $\mathcal{P}(V)$. Dann gilt:

1. Ist der Wittindex von V gleich 1, so operiert $PSU(V)$ zweifach-transitiv und treu auf Ω .
2. Ist der Wittindex von V mindestens 2, so operiert $PSU(V)$ primitiv auf Ω .

§8 Dreidimensionale unitäre Geometrien

In diesem Abschnitt sei V ein unitärer Raum der Dimension 3 mit Wittindex 1.

Korollar 8.1. $Stab_{SU(V)}(e) = Q := \{Q(a, b) \mid a\bar{a} + b + \bar{b} = 0\}$ und es gelten die folgenden Formeln für die Multiplikation und die Bildungung der inversen Matrix:

$$\begin{aligned} Q(a_1, b_1)Q(a_2, b_2) &= Q(a_1 + a_2, b_1 + b_2 - \bar{a}_1 a_2) \\ Q(a, b)^{-1} &= Q(-a, -b - a\bar{a}) \end{aligned}$$

Lemma 8.2. Die Kommutatoruntergruppe Q' von Q ist die Wurzelgruppe $X_{\langle e \rangle, \langle e \rangle^\perp}$ und es gilt $T(V) \subseteq SU(V)'$

Lemma 8.3. Falls $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $|\mathbb{F}| > 4$ ist, operiert $T(V)$ transitiv auf der Menge $M := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 1\}$.

Lemma 8.4. Sei $P = \langle p \rangle \in \mathcal{P}(V)$. Dann ist die Wurzelgruppe $X_{P, P^\perp}$ ein abelscher Normalteiler von $Stab_{SU(3, q)}(\langle p \rangle)$.

Satz 8.5. Für $q \neq 2$ sind die Gruppen $PSU(3, q)$ einfach.

§9 Die Einfachheit von $PSU(V)$

Lemma 9.1. Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $\dim(V) \geq 2$, so operiert die von Transvektionen erzeugte Untergruppe $T(V)$ transitiv auf $M := \{v \in V \mid \beta(v, v) = 1\}$, außer für den Fall $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ und $\dim(V) = 3$.

Lemma 9.2. Sei $\dim(V) \geq 2$, dann operiert $T(V)$ transitiv auf $\{v \in V \mid \beta(v, v) = a\}$ für beliebiges $a \in \mathbb{F}_0^\times$, außer für den Fall $\mathbb{F} = \mathbb{F}_4$ und $\dim(V) = 3$.

Lemma 9.3. Ist $\dim(V) \geq 2$ und der Wittindex von V mindestens 1, so gilt $T(V) = SU(V)$ außer für den Fall $SU(V) = SU(3, 2)$.

Lemma 9.4. Sei $\dim(V) \geq 3$ und der Wittindex von V mindestens 1, so gilt $SU(V) = SU(V)'$ außer für den Fall $SU(V) = SU(3, 2)$.

Satz 9.5. Ist $\dim(V) \geq 2$ und der Wittindex von V mindestens 1, dann ist die Gruppe $PSU(V)$ einfach, außer für die Fälle $PSU(2, 2)$, $PSU(2, 3)$ und $PSU(3, 2)$.