BN-Paare und Gebäude

Christian Löbbert   Sergio Christian Siccha

21. April 2010

1 Mathematische Grundlagen - Wiederholungen

Definition 1.1 (Nebenklassen): *Seien G, H multiplikative Gruppen mit $H \leq G$, $x \in G$. Dann heißt*

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

eine **Linksnebenklasse** *von G. Die Menge der Linksnebenklassen bezeichnet man mit G/H. Analog definiert man eine* **Rechtsnebenklasse**. *Man nennt*

$$HxH = \{h \cdot x \cdot h' \mid h, h' \in H\}$$

eine **Doppelnebenklasse**.

Definition 1.2 (Normalteiler): *Seien N, G multiplikative Gruppen mit $N \leq G$. Wir nennen N einen* **Normalteiler** *von G wenn N folgendes erfüllt:*

$$\forall g \in G : g^{-1}Ng = N.$$

Bemerkung 1.3: *Man schreibt auch $N \trianglelefteq G$, N ist also eine Vereinigung von Konjugationsklassen. Es gilt*

$$G/N \text{ ist eine Gruppe} \Leftrightarrow N \trianglelefteq G$$

Bemerkung 1.4: *Die Gruppe G operiert auf der Menge $M \times N$ durch:*

$$G \times (M \times N) \to M \times N : (g, (m, n)) \mapsto (gm, gn).$$

Diese Operation heisst **Diagonale Operation**. *Operiert G transitiv auf M, dann existiert eine Bijektion zwischen den Bahnen der diagonalen Operation und den Bahnen von M unter dem Stabilisator eines bel. Elementes m:*

$$\varphi : \quad (M \times N)/G \to N/Stab_G(m), \quad G * (m, n) \mapsto Stab_G(m) * n.$$

2 BN-Paare

BN-Paar Axiome

Definition 2.1: *Ein BN-Paar einer Gruppe G ist ein Paar zweier Untergruppen $B,\ N$ s.d.*

(1) $G = \langle B, N \rangle$

(2) $H := B \cap N$ *ist ein Normalteiler von N.*

(3) *Zu* $W := N/H$ *gibt es eine Indexmenge I und ein Erzeugendensystem* $\{w_i \mid i \in I\}$ *s.d.* $\forall i \in I:\ w_i^2 = 1$.

(4) *Seien* $w_i = n_i H$ *mit* $i \in I$ *und* $n \in N$ *beliebig, dann gilt*

 (a) $n_i B n_i \neq B$ *und*

 (b) $n_i B n \subseteq (B n_i n B) \cup (B n B)$.

$|I|$ *ist der* **Rang** *des BN-Paares. B ist eine Borel-Untergruppe*[1], *H die Cartan-Untergruppe*[2] *und W die Weyl-Gruppe*[3].

Das Tits-Gebäude[4]

Die Eigenschaften und Beweise des BN-Paares der Speziellen Linearen Gruppe eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ kann man geometrisch veranschaulichen indem man das zu $\mathcal{V}$ gehörige Tits-Gebäude betrachtet.

Definition 2.2 (Fahne)**:** *Eine* **Fahne** *ist die Menge* $\{V_1, \cdots, V_k\}$ *einer aufsteigenden Folge verschiedener Vektorräume* $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k$. *Für* $d_i := dim V_i$ *ist* $\{d_1, \cdots, d_k\}$ *der* **Typ** *der Fahne. Enthält die Fahne* $\{0\}$ *oder* $\mathcal{V}$ *heißt sie* **uneigentlich** *oder* **ausgeartet**. *Fahnen vom Typ* $\underline{m-1}$ *heißen* **vollständig**.

Definition 2.3 (Appartement)**:** *Sei* $(e_1, \cdots, e_m)$ *eine beliebige Basis des Vektorraumes* $\mathcal{V}$, *dann ist* $\{\langle e_1 \rangle, \cdots, \langle e_m \rangle\}$ *ein* **Rahmen** $\mathcal{F}$ *von* $\mathcal{V}$. *Die Menge aller nicht-entarteten Fahnen deren Teilräume von Teilmengen von* $\{e_1, \cdots, e_m\}$ *erzeugt werden heißt das* **Appartement** $\Sigma(\mathcal{F})$ *zu* $\mathcal{F}$.

Beispiel 2.4: *Ein Appartement des* $\mathbb{F}^{4\times 1}$. **(Tafel)**

Definition 2.5 (Gebäude)**:** *Sei* $\Delta(\mathcal{V})$ *die Menge aller nicht-entarteten Fahnen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{A}$ *die Menge aller Appartements, dann ist das Paar* $(\Delta(\mathcal{V}), \mathcal{A})$ *das zu* $\mathcal{V}$ *gehörende* **Gebäude**. *In diesem Kontext wird eine vollständige Fahne auch* **Zimmer** *oder* **Kammer** *genannt.*

Das BN-Paar der Speziellen Linearen Gruppe

Sei M ein Zimmer(vollst. Fahne) $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{m-1}$ von $\Delta(\mathcal{V})$. Dann wählen wir den Rahmen $\mathcal{F}$ mit der Basis $e_1,\ e_2, \ldots, e_m$ so, dass

$$V_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle \text{ für } 1 \leq i < m.$$

Wir wollen nun zeigen dass (B, N) mit

$$B := Stab_{SL(\mathcal{V})}(M),$$

$$N := Stab_{SL(\mathcal{V})}(\mathcal{F})$$

ein BN-Paar der $SL(\mathcal{V})$ ist.

[1]Armand Borel (*1923, †2003)
[2]Henri Cartan (*1904, †2008)
[3]Hermann Weyl (*1885, †1955)
[4]Jacques Tits *1930, belgisch-französicher Mathematiker

Matrizen aus B besitzen obere rechte Dreiecksgestalt, Matrizen aus N sind Monomialmatrizen bzgl. der Basis $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$.

Zunächst kann man (1) bis (3) relativ leicht zeigen. (**Tafel**)

Jedem w entspricht eine Linksnebenklasse nH von N, man kann also gefahrlos statt BnB auch BwB schreiben. Über $SL(\mathcal{V}) = BNB$ aus dem Beweis zu (3) erhält man dann:

$$SL(\mathcal{V}) = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} BwB. \tag{1}$$

Geometrische Interpretation

Langfristiges Ziel wird sein zu zeigen dass durch die Doppelnebenklasse BwB das w eindeutig bestimmt ist. Zunächst untersuchen wir allerdings eine geometrische Veranschaulichung der Doppelnebenklassen BgB von $SL(\mathcal{V})$.

Lemma 2.6: *Sei M das Zimmer*

$$\{\, \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle |\, 1 \leq i < m\}$$

mit Stabilisator B, zu dem Rahmen $\mathcal{F}$

$$\{\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \ldots, \langle e_m \rangle\}$$

mit Stabilisator N. Dann gilt:

(1) Es existiert eine Bijektion zwischen den Linksnebenklassen gB von G und der Menge der Zimmer $\mathcal{M}$.

(2) Es existiert eine Bijektion zwischen den Doppelnebenklassen BgB von G und den Bahnen der Operation der $SL(\mathcal{V})$ auf Paaren von Zimmern $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

Satz 2.7: *Seien M_1, M_2 zwei Zimmer von $\Delta(\mathcal{V})$, dann existiert ein Appartement $\Sigma(\mathcal{F})$ sodass $M_1, M_2 \in \Sigma(\mathcal{F})$.*

Fahnen und Appartements

Um zu zeigen dass die Vereinigung in (1) disjunkt ist untersuchen wir nun die Fahnen und Appartements des Gebäudes genauer.

Lemma 2.8: *Sei $\mathcal{V}$ Vektorraum mit Basis $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ und $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq E$. Dann gilt für $U_1 = \langle \Gamma_1 \rangle$ und $U_2 = \langle \Gamma_2 \rangle$:*

(1) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ist eine Basis für $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$

(2) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ist eine Basis für $U_1 \cap U_2$.

Satz 2.9: *Seien $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ Rahmen für $\mathcal{V}$ und $F, F' \in \Delta(\mathcal{V})$ Fahnen mit $F, F' \in \Sigma(\mathcal{F}_1)$ und $F, F' \in \Sigma(\mathcal{F}_2)$.*

Dann existiert eine Abbildung $f \in SL(\mathcal{V})$ mit $f(F) = F$, $f(F') = F'$ und $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$.

Satz 2.10: *Seien $n_1, n_2 \in N$. Dann gilt $Bn_1B = Bn_2B$ genau dann wenn $n_1H = n_2H$*

Wände

Um den Beweis zu vervollständigen dass B und N ein BN-Paar der $SL(\mathcal{V})$ bildet bleibt zu zeigen dass das Axiom (iv) erfüllt wird. Dazu betrachten wir die Wände von $\Delta(\mathcal{V})$.

Definition 2.11: *Eine echte Fahne die aus genau $m-2$ Untervektorräumen von $\mathcal{V}$ besteht nennt man eine* **Wand** *von $\Delta(\mathcal{V})$.*

Lemma 2.12: *Sei A eine Wand des Appartements $\Sigma(\mathcal{F})$, dann gibt es genau zwei Zimmer in $\Sigma(\mathcal{F})$ die A enthalten.*

Jetzt haben wir genügend Hilfsmittel zur Hand um die Gültigkeit des Axioms (iv) zu beweisen:

(a) $n_iBn_i \neq B$ für $w_i = n_iH$

(b) $n_iBn \subseteq (Bn_inB) \cup (BnB)$ für $w_i = n_iH$, $n \in N$

Beweis:
Zu (a): Jede Transposition $(i, i+1) = \psi^{-1}(w_i)$ vertauscht von links i-te Zeile mit $i+1$-ter Zeile und von rechts i-te Spalte mit $i+1$-ter Spalte. So können Elemente oberhalb der Diagonale unter die Diagonale verschoben werden, d.h. die Konjugation führt aus B heraus.

Ein Beispiel dazu: $\mathcal{V} = \mathbb{F}^{3\times 1}$,

$$n_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in N \text{ (also } \psi^{-1}(n_iH) = (2\,3) \in S_3)$$

$$b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \in B$$

$$\text{und } n_ibn_i = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \notin B \qquad \square$$

Zu (b):

Beweis an der Tafel.

Damit liegt in der Tat ein BN-Paar der $SL(\mathcal{V})$ vor.