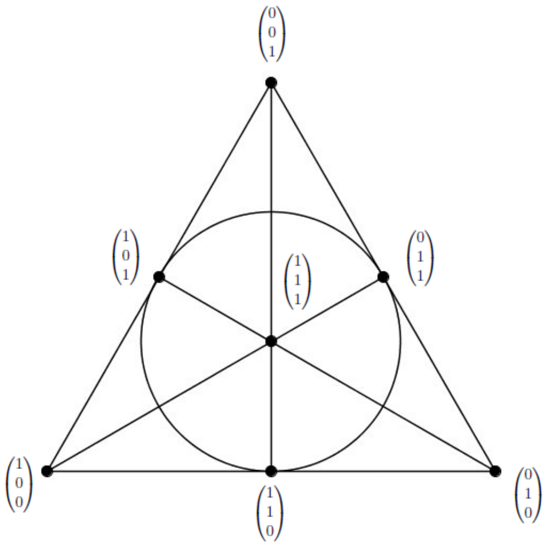
Die Fano-Ebene und die Isomorphie PSL(3,2) $\cong$ PSL(2,7)

von Artur Schäfer



Definition: Sei V ein $\mathbb{F}_2$ Vektorraum mit dim(V)= 3. Dann heißt die Projektive Ebene P(V), die sieben Punkte und sieben Geraden hat, Fanoebene. Dabei besteht jede Gerade aus drei Punkten und jeder Punkt liegt auf drei Geraden.

PSL(3,2)=SL$_3$($\mathbb{F}_2$) operiert auf P($\mathbb{F}_2{}^3$) $= \{\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle \mid 0 \neq \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2\}$.

Bemerkung: Ist Ω eine 7-elementige Menge und $\mathbb{B}$ eine 7-elementige Menge von 3-elementigen Teilmengen von Ω mit der Eigenschaft, dass der Schnitt von je zwei paarweise verschiedenen Elementen aus $\mathbb{B}$ genau aus einem Element bestehet, welches in Ω ist. Dann gibt es eine Bijektion $f : \Omega \to \mathbb{F}_2{}^3 - \{0\}$, mit $f(\mathbb{B}) = \{U - \{0\} \mid U \leq \mathbb{F}_2{}^3, dim(U) = 2\}$.

Vorbereitung zum Hauptsatz

- Der Normalisator von H ist $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$
- Der Zentralisator von H ist $C_G(H) := \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \; \forall h \in H\}$
- Ist H p-Sylowgruppe $\Rightarrow |G : N_G(H)| \equiv 1 \; mod \; p$

Lemma 1: Die 7-Sylowgruppen von A_8 sind in A_8 selbstzentralisierend.

Lemma 2: Sei G Gruppe. Gilt $g^2 = 1 \; \forall \; g \in G$, so folgt G ist abelsch.

Lemma 3: Ist G,H Gruppe, G einfach und $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus mit Bild(ϕ)$\neq \{1\}$. Dann ist ϕ injektiv und damit G $\cong \phi$(G).

Lemma 4: Sind X und Y normale Untergruppen einer p-Sylowgruppe P von G und $\exists\ g \in G$ mit $gXg^{-1} = Y$, dann $\exists\ n \in N_G(P)$ mit $nXn^{-1} = Y$.

Lemma 5: Alle 2-Sylowgruppen der A_7 sind selbstnormalisierend.

Lemma 6: Sind $U \leq G$ Gruppen mit Index von U in G gleich 2, so ist U Normalteiler von G.

Fakt: Die S_4 hat drei 2-Sylowgruppen.

Hauptsatz

Hauptsatz: Wenn G eine einfache Gruppe der Ordnung 168 ist, dann ist G isomorph zur PSL(3,2).

Zum Beweis sind nur die Anhaltspunkte aufgelistet, die das Vorgehen zeigen:

- $|G| = 7 * 3 * 2^3$. Sei $P \in Syl_7(G), Q \in Syl_3(G)$ *und* $S \in Syl_2(G)$.
- $N_G(P) = \langle P,\ Q\rangle,\ C_G(P) = P,\ N_G(Q) = \langle Q, t\rangle,\ C_G(Q) = Q$ und $N_G(S) = S$
- Wir erhalten: S nicht abelsch und $S \cong D_8, S \in Syl_2(G)$
- $\underbrace{G}_{\#=168} = \underbrace{\{1\}}_{\#=1} \uplus \underbrace{{}^G\mathrm{p}}_{\#=48} \uplus \underbrace{{}^G\mathrm{q}}_{\#=56} \uplus \underbrace{{}^G\mathrm{a}}_{\#=21} \uplus \underbrace{{}^G(\mathrm{ab})}_{\#=42}$ mit $p^7 = q^3 = a^2 = (ab)^4 = 1$
- Für $A, B \subseteq S$ mit $A, B \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ gilt $N_G(A) \cong S_4 \cong N_G(B)$
- $X \in \Omega := {}^G$A inzidiert mit $Y \in \mathbb{B} := {}^G$B, falls $\langle X, Y\rangle$ 2-Sylowgruppe ist.
- G operiert auf Ω und $\mathbb{B}$ durch konjugation und erhält die Inzidenzrelation.
- Ω und $\mathbb{B}$ repräsentieren Punkte und Geraden $\Leftrightarrow \forall$ g die nicht in $N_G(B)$ sind, existiert genau ein Element aus Ω, welches mit B *und* gBg^{-1} inzidiert.
- Für ein g ist $N_G(B) \cap N_G(gBg^{-1})$ eine Gruppe der Ordnung 4 und das bestimmte Element aus Ω, welches mit B *und* gBg^{-1} inzidiert.

$\Rightarrow G \cong$ PSL(3,2)

Corollar: Da |PSL(2,7)| = 168 und PSL(2,7) einfach $\Rightarrow$ PSL(3,2) $\cong$ PSL(2,7).