Die generelle und spezielle linearen Gruppen

von David Dursthoff

1 Allgemeines

Es seien $\mathbb{F}$ ein Körper und V ein endl. erzeugter $\mathbb{F}$-VR mit m:=Dim(V)$\geq$ 2.
Dann ist $V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{F},\ \varphi\ linear\}$ der Dualraum von V.
P(V) bezeichne den projektiven Raum über V.
$\Gamma L(V) := \{f : V \to V \mid\ f\ bij.,\ \exists\ \sigma \in Aut(\mathbb{F})$ mit $f(av + w) = \sigma(a)f(v) + f(w)\ \forall a \in \mathbb{F},\ v, w \in V\}$

$GL(V) := \{f : V \to V \mid f\ linear\ und\ bij.\}$ (**generelle lineare Gruppe**)
$SL(V) := \{f \in\ Gl(V) \mid Det(f) = 1\}$ (**spezielle lineare Gruppe**)

$PGL(V) := \{P(f) : P(V) \to P(V) \mid P(f)\ von\ f \in GL(V)\ induziert\}$
(**projektive generelle lineare Gruppe**)
$PSL(V) := \{P(f) : P(V) \to P(V) \mid P(f)\ von\ f \in SL(V)\ induziert\}$
(**projektive spezielle lineare Gruppe**)
$Z(V) := \{f : V\ \to\ V \mid v\ \mapsto av,\ a \in \mathbb{F}^*\}$

$$PGL(V) \cong GL(V)/Z(V)$$

$$PSL(V) \cong SL(V)/(Z(V) \cap SL(V))$$

$V = \mathbb{F}^m$: $GL(m, \mathbb{F}) := GL(V)$ usw.
$\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ (endlicher Körper mit q Elementen): GL(m,q):=$GL(m, \mathbb{F}_q)$ usw.
$|GL(m, q)| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m}(q^i - 1)$
$|SL(m, q)| = |PGL(m, q)| = q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$
$|PSL(m, q)| = d^{-1}q^{m(m-1)/2} \prod_{i=2}^{m}(q^i - 1)$, d:=ggT(m,q-1)

2 Transvektionen

2.1 Definition:

Sein $\varphi \in V^*$ und $u \in V$, sodass $\varphi(u) \neq -1$.
Dann ist $t_{\varphi,u} : V \to\ V,\ v \mapsto v + \varphi(v)u$ lin. und bij., also $t_{\varphi,u} \in GL(V)$
Ist $\varphi(u) = 0$, so heißt $t_{\varphi,u}$ **Transvektion**, ansonsten **Dilatation**.

2.2 Satz (Eigenschaften von Transvektionen):

Seien $\varphi, \psi \in V^*,\ u, w \in V$ mit $\varphi(u) = \varphi(w) = \psi(u) = \psi(w) = 0$ und $a \in \mathbb{F}, f \in GL(V)$.
Dann gilt:

1. $t_{\varphi,au}\ =\ t_{a\varphi,u}$
2. $t_{\varphi+\psi,u}\ =\ t_{\varphi,u}\ t_{\psi,u}$, insb. ${t_{\varphi,u}}^{-1}\ =\ t_{-\varphi,u}$
3. $t_{\varphi,u+w}\ =\ t_{\varphi,u}\ t_{\varphi,w}$
4. $ft_{\varphi,u}f^{-1}\ =\ t_{f(\varphi),f(u)}\ =\ t_{\varphi f^{-1},f(u)}$
5. $Det(t_{\varphi,u}) = 1$, also $t_{\varphi,u} \in SL(V)$

3 Die Einfachheit von PSL(V)

3.1 Satz:

PSL(V) operiert 2-fach transitiv auf den Punkten von P(V), d.h. 2 verschiedene Punkte können auf 2 beliebige (unterschiedliche) Punkte abgebildet werden. Damit ist dann natürlich auch SL(V) 2-fach transitiv. Die doppelte Transitivität impliziert, dass SL(V) primitiv auf P(V) operiert.

3.2 Satz:

Sei $u \in V\backslash\{0\}$ und definiere $P :=< u >,\ X_P := \{t_{\varphi,u}|\ \varphi \in V^*$ und $\varphi(u) = 0\}$. Dann gilt:

1. X_P ist abelsche, normale Untergruppe von $SL(V)_P = Stab_{SL(V)}(P)$
2. $SL(V) =< fX_Pf^{-1}|\ f \in SL(V) >$

3.3 Satz:

Für $m \geq 3$ *oder* $|\mathbb{F}| \geq 4$ ist $SL(m,\mathbb{F})' = SL(m,\mathbb{F})$.

3.4 Satz:

Mit Ausnahme von $PSL(2,\mathbb{F}_2)$ *und* $PSL(2,\mathbb{F}_3)$ sind die Gruppen $PSL(m,\mathbb{F}),\ m \geq 2$, einfach.

4 Die Gruppen PSL(2,q)

Für $< e_1, e_2 >= \mathbb{F}_q^2$ sind die Punkte der projektiven Gerade $P(2,\mathbb{F}_q)$ dann $< e_1 >$ und $< ae_1 + e_2 >,\ a \in \mathbb{F}_q$.
Identifiziert man $\infty :=< e_1 >$ und $a :=< ae_1 + e_2 >$, so kann man $P(2,\mathbb{F}_q)$ als $P := \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ auffassen. $PSL(2,q) = \{f : P \to P|\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, ad-bc ist Quadrat in $\mathbb{F}_q^*\} =$
$\{g \in PSL(2,q)|^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $D := ad - bc$ ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_q^*\}$

4.1 Bemerkung:

- $PSL(2,q)_\infty = Stab_{PSL(2,q)}(\{\infty\}) = \{f : P \to P,\ z \mapsto a^2z + b,\ a \in \mathbb{F}_q^*\ und\ b \in \mathbb{F}_q\} =$
  $\{g \in PSL(2,q)|^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\ mit\ a \in \mathbb{F}_q^*\ und\ b \in \mathbb{F}_q\}$
- $PSL(2,q)_{\infty,0} = Stab_{PSL(2,q)}(\{\infty,0\}) = \{f : P \to P,\ z \mapsto a^2z,\ a \in \mathbb{F}_q^*\}=$
  $\{g \in PSL(2,q)|^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\ mit\ a \in \mathbb{F}_q^*\}$ ist zyklische Gruppe von der Ordnung q-1, falls q gerade und (q-1)/2, falls q ungerade.
- $X_\infty = \{f : P \to P,\ z \mapsto z+b,\ b \in \mathbb{F}_q\}$=$\{g \in PSL(2,q)|^{(e_1,e_2)}g^{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ mit\ b \in \mathbb{F}_q\}$ ist Normalteiler von PSL(2,q) und isomorph zur additiven Gruppe $(\mathbb{F},+)$
- $PSL(2,q)_\infty$ ist semidirektes Produkt von X_∞ und $PSL(2,q)_{\infty,0}$.

Da $|PSL(2,q)| = |PSL(2,q)_\infty| * |PSL(2,q)\infty|$ ist, kann man auch so die Ordnung von PSL(2,q) bestimmen: $|PSL(2,q)|$= q(q-1)(q+1) falls q gerade und $|PSL(2,q)| = \frac{q(q-1)(q+1)}{2}$ falls q ungerade.

Da $|P| = q+1$ ist, gilt $PSL(2,q) \leq Sym_P = S_{q+1}$. Mit dieser Idee kann man einige interessante Isomorphismn finden:

4.2 Satz:

- $PSL(2,2) \cong S_3$ Da S_3 nicht einfach ist, ist PSL(2,2) auch nicht einfach.
- $PSL(2,3) \cong A_4$ (Alternierende Gruppe der Ordnung 4) Da A_4 nicht einfach ist, ist PSL(2,3) auch nicht einfach.
- $PSL(2,4) \cong A_5$ Da PSL(2,4) einfach ist, ist damit auch A_5 einfach.