Stark Perfekte Gitter und Sphärische Designs

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes, 20.06.2011

Nina Neidhardt und Jan Rosendahl

Ziel dieser Arbeit ist es, die lokalen Extremstellen der Dichtefunktion näher zu beschreiben. Wir suchen ein Kriterium, welches uns hilft extreme Gitter zu finden. Als Vorbereitung dazu untersuchen wir zunächst in Abschnitt 1 einige ausgewählte Polynome, deren Eigenschaften später nützlich sein werden. Anschließend führen wir im 2. Absatz den Begriff des *sphärischen t-Designs* ein und zeigen, dass Gitter, deren Mengen an kürzesten Vektoren sphärischen 4-Designs sind, extrem sind.

§1 Der Raum der Polynome

(1.1) Definition
$\mathbb{R}[X] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ bezeichne den *Polynomring* in n Unbestimmten. Für einen Multiindex $i = (i_1, \ldots, i_n)$ definieren wir das Monom $X^i := X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ vom Grad $|i| := \sum_{j=1}^n i_j$ sowie den *Multinomialkoeffizient*

$$\binom{|i|}{i} := \frac{|i|!}{i_1! \cdots i_n!}.$$

Weiter bezeichne $\mathcal{F}_{n,m} := \mathcal{F}_m$ den Raum aller Polynome in $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad m. Ist $T_m := \{i = (i_1, \ldots, i_n) \mid |i| = m\}$ so bilden die Monome X^i mit $i \in T_m$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathcal{F}_{n,m}$. Für $f := \sum_{i \in T_m} a_i X^i$ und $g := \sum_{i \in T_m} b_i X^i$ in $\mathcal{F}_{n,m}$ definieren wir das Skalarprodukt

$$[f, g] := \sum_{i \in T_m} \binom{|i|}{i}^{-1} a_i b_i.$$

Dies definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{n,m}$ für die die Monome X^i eine OG-Basis bilden mit $[X^i, X^i] = \binom{|i|}{i}^{-1}$. ◇

(1.2) Beispiel
Sei $\omega := \sum_{j=1}^n X_j^2 \in \mathcal{F}_{n,2}$.
Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\rho_\alpha := \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \in \mathcal{F}_{n,1}$.
Dann sind $\omega^{m/2}$ und ρ_α^m in $\mathcal{F}_{n,m}$ ◇

(1.3) Bemerkung
Die orthogonale Gruppe

$$O_n(\mathbb{R}) := \{\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \sigma\sigma^{tr} = 1\}$$

operiert auf $\mathcal{F}_{n,m}$ vermöge $(\sigma, f) \mapsto \sigma f := f(X\sigma)$.
Dann ist $\sigma\rho_\alpha = \rho_{\alpha\sigma}$ und $\sigma\omega = \omega$ für alle $\sigma \in O_n(\mathbb{R})$. ◇

(1.4) Lemma
Für $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$[f, \rho_\alpha^m] = f(\alpha).$$

(1.5) Folgerung

$$\mathcal{F}_{n,m} = \langle \rho_\alpha^m \mid \alpha \in \mathbb{R}^n \rangle$$

(1.6) Erinnerung
Der Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$$

heißt der *Laplace-Operator*. Dies ist eine Abbildung von $\mathcal{F}_{n,m}$ nach $\mathcal{F}_{n,m-2}$.

$$Harm_{n,m} := \ker(\Delta) := \{f \in \mathcal{F}_{n,m} \mid \Delta(f) = 0\}$$

heißt der Raum der *harmonischen Polynome* vom Grad m in n Variablen. ◇

(1.7) Beispiel
a) $\Delta(\rho_\alpha^m) = m(m-1)(\alpha,\alpha)\rho_\alpha^{m-2}$

b) $\Delta(\omega^\ell) = 2\ell(2\ell + n - 2)\omega^{\ell-1}$

c) $\Delta(\omega^\ell\rho_\alpha^k) = 2\ell(2\ell + 2k + n - 2)\omega^{\ell-1}\rho_\alpha^k + k(k-1)(\alpha,\alpha)\omega^\ell\rho_\alpha^{k-2}$

d) Für $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist

$$P_\alpha^{(2)} := \rho_\alpha^2 - \frac{(\alpha,\alpha)}{n}\omega \in \text{ Harm}_{n,2}$$ ◇

(1.8) Satz
$\mathcal{F}_{n,m} = \text{ Harm}_{n,m} \perp \omega \text{ Harm}_{n,m-2} \perp \omega^2 \text{ Harm}_{n,m-4} \perp \ldots \perp \omega^{\lfloor m/2 \rfloor} \text{ Harm}_{n,m-2\lfloor m/2 \rfloor}$
ist eine Zerlegung von $\mathcal{F}_{n,m}$ in irreduzible $O_n(\mathbb{R})$-invariante Teilmoduln. ◇

(1.9) Satz
$\text{Harm}_{m,n}$ ist ein irreduzibler $O_n(\mathbb{R})$-Modul. ◇

§ 2 Sphärische Designs

Im Folgenden nehmen wir $n \geq 2$ an.

(2.1) Definition
Sei $t \in \mathbb{N}$. Eine endliche, nicht-leere Teilmenge $\mathcal{X} \subset S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,x) = 1\}$ heißt *sphärisches t-Design*, falls für alle $m \leq t$ und $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} f(x)dx = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x).$$

◇

(2.2) Bemerkung
Die symmetrische Bilinearform

$$(f,g) \mapsto \int_{S^{n-1}} f(x)g(x)dx$$

ist ein $O_n(\mathbb{R})$ invariantes Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{n,m}$. ◇

(2.3) Satz
Für eine endliche, nicht-leere Teilmenge $\mathcal{X} \subset S^{n-1}$ sind äquivalent:
(a) $\mathcal{X}$ ist ein sphärisches t-design.
(b) Für alle $m \leq t$ und alle Polynome $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ ist

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (\sigma f)(x) \text{ für alle } \sigma \in O_n(\mathbb{R}).$$

(c) Für jedes $1 \leq m \leq t$ und jedes harmonische Polynom $f \in Harm_{n,m}$ ist

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = 0.$$

◇

(d) Sei $\{g,u\} = \{t, t-1\}$ und u ungerade, g gerade. Dann gibt es eine Konstante c_g mit

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} (x,\alpha)^g = c_g(\alpha,\alpha)^{g/2} \text{ und } \sum_{x \in \mathcal{X}} (x,\alpha)^u = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

(2.4) Bemerkung
Die Konstante c_g in Satz (2.3)(d) ist gegeben durch

$$c_g = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (g-1)}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+g-2)} |\mathcal{X}|.$$

(2.5) Bemerkung
Häufig wird $\mathcal{X}$ symmetrisch sein (z.B. $\mathcal{X} = S(L)$), das heißt mit $x \in \mathcal{X}$ ist auch $-x \in \mathcal{X}$. Dann ist die 2. Gleichung in Satz 2.3 (d) trivialerweise immer erfüllt. $\diamond$

(2.6) Erinnerung
Ein Gitter L heißt *eutaktisch*, falls seine Grammatrix $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit ist und es $\lambda_x > 0$ für alle $x \in S(F)$ gibt, so dass:

$$F^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^t x$$

Dies ist äquivalent zu der Bedingung, es $\gamma_y > 0 \;\; \forall\, y \in S(L)$ gibt mit:

$$I_n = \sum_{y \in S(L)} \gamma_y y^t y$$

$\diamond$

(2.7) Definition
Ein Gitter L heißt *stark eutaktisch*, falls L eutaktisch ist und alle Eutaxiekoeffizienten λ_x mit $x \in S(L)$ gleich gewählt werden können. $\diamond$

(2.8) Satz
Ein Gitter L ist stark eutaktisch, genau dann wenn $S(L)$ ein sphärisches 2-Design ist. $\diamond$

(2.9) Definition
Ein Gitter L heißt *stark perfekt*, falls $S(L)$ ein sphärisches 4-Design ist. $\diamond$

(2.10) Hauptsatz
Stark perfekte Gitter sind perfekt und eutaktisch und daher lokale Maxima der Dichtefunktion. $\diamond$