Theta Funktionen als Modulformen

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes
18.04.2011, Christian Löbbert
Dieser Vortrag behandelt die Abschnitte 2.1 bis 2.4 aus **Ebeling, Lattices and Codes**

1 Die Theta Funktion eines Gitters

Definition 1: Zu einem Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Theta Funktion* ϑ_Γ *des Gitters* als

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x}, \qquad q := e^{2\pi i\tau}$$

für $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\tau > 0\} \subset \mathbb{C}$ (d.h. als Funktion auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$).

Dass dies für ein beliebiges Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine wohldefinierte, holomorphe Funktion ist, wird in Lemma 2 (s.u.) gezeigt. Für ein ganzes Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist stets $x \cdot x = x^\top x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, d.h.

$$\vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$$

mit $a_r = |\{x \in \Gamma \mid x\cdot x = 2r\}| = \left|\Gamma \cap \partial B_{\sqrt{2r}}(0)\right|$, wobei $\partial B_{\sqrt{2r}}(0)$ die Sphäre mit Radius $\sqrt{2r}$ um den Ursprung ist. Somit wächst a_r wir die Oberfläche einer Sphäre mit Radius $\sqrt{2r}$ der Dimension $n-1$, also wie $\left(\sqrt{2r}\right)^{n-1}$. Es ist aber

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\left(\sqrt{2r}\right)^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \left(\sqrt[r]{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\sqrt[r]{r}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 1,$$

folglich hat die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ Konvergenzradius 1 und wegen $\tau \in \mathbb{H} \Leftrightarrow q = e^{2\pi i\tau} \in \dot{\mathbb{E}} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < 1\}$ ist also $\vartheta_\Gamma(\tau)$ für $\tau \in \mathbb{H}$ und Γ ganz wohldefiniert.

Ziel des Vortrages wird der Beweis des folgenden Satzes sein:

Satz 1: Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann gilt

(i) $n \equiv 0 \pmod 8$

(ii) ϑ_Γ ist eine *Modulform vom Gewicht* $\frac{n}{2}$ (s.u.).

2 Modulformen

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \det g = ad - bc = 1 \right\}$ operiert auf $\mathbb{H}$ via

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad (g,\tau) \mapsto g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Die Operation eines $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ bezeichnet man auch als *gebrochen lineare Transformation auf* $\mathbb{H}$. Man kann leicht nachrechnen, dass $g(\sigma) - g(\tau) = \frac{1}{(c\sigma+d)(c\tau+d)}(\sigma - \tau)$ für $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. insbesondere $\operatorname{Im} g(\tau) = \frac{1}{2i}(g(\tau) - g(\overline{\tau})) = \frac{1}{(c\tau+d)(c\overline{\tau}+d)} \cdot \frac{1}{2i}(\tau - \overline{\tau}) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$. Somit $\operatorname{Im} g(\tau) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\tau > 0$.

Das Zentrum $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ operiert trivial auf $\mathbb{H}$: $g(\tau) = \tau$ für $g \in Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $\tau \in \mathbb{H}$.

Definition 2: Die Faktorgruppe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ wird als *Modulgruppe* bezeichnet.

Wir werden zeigen, dass $G = \langle S, T\rangle$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Elemente operieren als $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und $T : \tau \mapsto \tau + 1$ auf $\mathbb{H}$.

Erinnerung: $\tau \sim_G \tau' \;:\Leftrightarrow\; \exists g \in G : \tau = g(\tau')$ (sprich: τ und τ' sind äquivalent unter G). Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen von G auf $\mathbb{H}$.

Definition 3: $D \subset \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalbereich* für die Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, falls

(i) für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ein $\tau' \in D$ existiert mit $\tau \sim_G \tau'$,

(ii) $\tau \sim_G \tau'$ für $\tau, \tau' \in D$, $\tau \neq \tau'$ impliziert, dass τ und τ' auf dem Rand von D liegen ($\tau, \tau' \in \partial D$).

Erinnerung: $\mathrm{Stab}_G(\tau) = \{g \in G \mid g(\tau) = \tau\}$.

Satz 2: Sei $D = \left\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, |\mathrm{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \mathbb{H}$, $\eta := e^{2\pi i/3}$ (siehe Tafel)

(i) $D \subset \mathbb{H}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

(ii) Es gilt $\mathrm{Stab}_G(\tau) = \{1\}$ für $\tau \in D \setminus \{i, \eta, -\overline{\eta}\}$ und $\mathrm{Stab}_G(i) = \{1, S\}$, $\mathrm{Stab}_G(\eta) = \left\{1, ST, (ST)^2\right\}$, $\mathrm{Stab}_G(-\overline{\eta}) = \left\{1, TS, (TS)^2\right\}$

(iii) $G = \langle S, T\rangle$

mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wie oben.

Beweis: Es sei $G' := \langle S, T \rangle$. Zeige zunächst :

$$\forall \tau \in \mathbb{H}\ \exists g \in G' \text{ sodass } g(\tau) \in D \ (\Rightarrow \text{ (i) aus Definition 3)}. \qquad (\star)$$

Sei also $\tau \in \mathbb{H}$. Wähle $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$ mit $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} g(\tau) \leq \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} g(\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$ maximal.

Dies ist stets möglich, da z.B. für bel. $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ und $\hat{\tau} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & [x] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G'} (\tau) = T^{[x]}(\tau)$ mit $[x] := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid |z - x| = \min\{|y - x| \mid y \in \mathbb{Z}\}\}$ gilt: $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\hat{\tau}) \leq \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im}\hat{\tau} = \operatorname{Im}\tau$. $\operatorname{Im} g(\tau)$ maximal bedeutet also insbesondere $\operatorname{Im} g(\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2} \geq \operatorname{Im}(\tau)$, d.h. $|c\tau + d| \leq 1$. Für festes $\tau \in \mathbb{H}$ existieren aber nur endlich viele $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $|c\tau + d| \leq 1$ (da $\operatorname{Im}\tau > 0$!): $|\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau \cap B_1(0)|$. Ein Minimum für $|c\tau + d|$, also ein Maximum für $\operatorname{Im} g(\tau)$ ist also stets wählbar.

Wir zeigen noch $|g(\tau)| \geq 1$: Angenommen $|g(\tau)| < 1$. Dann wäre $\operatorname{Im} Sg(\tau) = \frac{\operatorname{Im} g(\tau)}{|g(\tau)|^2} > \operatorname{Im} g(\tau)$, im Widerspruch zu $\operatorname{Im} g(\tau)$ maximal. Folglich gilt $|g(\tau)| \geq 1$ und somit insgesamt $g(\tau) \in D$.

Zeige nun:

$\tau \sim_G \tau'$ für $\tau, \tau' \in D$, $\tau \neq \tau'$ impliziert $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\tau' = -\frac{1}{2}$, $\tau' = \tau - 1$ <u>oder</u> $\operatorname{Re}\tau = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\tau' = \frac{1}{2}$, $\tau' = \tau + 1$ <u>oder</u> $|\tau| = |\tau'| = 1$, $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ ($\Rightarrow$ (ii) aus Definition 3). $(\star\star)$

Insgesamt haben wir dann gezeigt: (i) D ist Fundamentalbereich für die Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Gleichzeitig zeigen wir Behauptung (ii).

Sei also $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ sodass $\tau' = g(\tau) \in D$. O.E. sei $\operatorname{Im} g(\tau) \geq \operatorname{Im}\tau$ (sonst $\tau \leftrightarrow \tau'$, $g \leftrightarrow g^{-1}$). Wie oben impliziert dies $|c\tau + d|^2 \leq 1$. Sei $\tau = x + iy$. Da $\tau \in D$, ist $y \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wegen $|c\tau + d|^2 = c^2y^2 + (cx + d)^2 \leq 1$ erhält man

$$c^2y^2 \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c^2 \leq \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}.$$

Da $c \in \mathbb{Z}$ also $c \in \{-1, 0, 1\}$. Diese 3 Fälle betrachten wir nun:

1. $c = 0$: Dann folgt wegen $g \in G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ direkt $d = 1$ und $a = 1$, d.h. $\tau' = g(\tau) = \tau + b$. Da $\tau, \tau' \in D$, $\tau \neq \tau'$ muss aber $b = 1$ und damit notwendigerweise $\operatorname{Re}\tau = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\tau' = \frac{1}{2}$ <u>oder</u> $b = -1$ und damit notwendigerweise $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\tau' = -\frac{1}{2}$ gelten.

2. $c = 1$: Wegen $|c\tau + d| \leq 1$ gibt es drei Möglichkeiten:
   (a) $|\tau| = 1$, $d = 0$,
   (b) $\tau = \eta$, $d = 1$,
   (c) $\tau = -\overline{\eta}$, $d = -1$.
   Im Fall (a) impliziert die Bedingung $ad - bc = 1$ unmittelbar $b = -1$ und $g(\tau) = a - \frac{1}{\tau}$. Falls $\tau \notin \{\eta, -\overline{\eta}\}$, muss $a = 0$ und somit $g = S$ sein. Damit erhält man außerdem $\operatorname{Stab}_G(i) = \{1, S\}$, da $S(i) = \frac{-1}{i} = i$.
   Falls $\tau = \eta$ hat man entweder $a = 0$ und $g = S$ oder $a = -1$ und

$$g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}S = (ST)^2.$$

Damit erhält man außerdem $(ST)^2 \in \mathrm{Stab}_G(\eta)$: $g(\eta) = \frac{-\eta-1}{\eta} = -1 - \frac{1}{\eta} = -1 - \overline{\eta} = \eta$.
Falls $\tau = -\overline{\eta}$ hat man entweder $a = 0$ und $g = S$ oder $a = 1$ und

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS \in \mathrm{Stab}_G(-\overline{\eta}),$$

da $g(-\overline{\eta}) = \frac{-\overline{\eta}-1}{-\overline{\eta}} = 1 + \eta = -\overline{\eta}$.
Im Fall (b) wegen $ad - bc = a - b = 1$: $b = a - 1$ und $g(\eta) = \frac{a\eta + a - 1}{\eta+1} = a - \frac{1}{\eta+1} = a - \frac{1}{-\overline{\eta}} = a + \eta \Rightarrow a = 1$ oder $a = 0$:
$a = 1$: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $g(\eta) = -\overline{\eta}$
$a = 0$: $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST$, $g(\eta) = \eta$, d.h. $ST \in \mathrm{Stab}_G(\eta)$.
Den Fall (c) behandelt man analog.

3. Der Fall $c = -1$ kann durch Änderung der Vorzeichen von a, b, c, d auf den Fall $c = 1$ zurückgeführt werden.

Somit ist D tatsächlich ein Fundamentalbereich der Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.

Bleibt zu zeigen: $G = G' = \langle S, T \rangle$. Sei also $g \in G$ und sei $\tau_0 \in D^\circ$ ein Punkt aus dem Inneren von D. Wegen $(\star)$ existiert $g' \in G'$ mit $g'g(\tau_0) \in D$, d.h. $g'g(\tau_0) \sim_G \tau_0$. Wegen $(\star\star)$ und $\tau_0 \in D^\circ$ muss $g'g = 1$ sein, also $g \in G'$. Damit ist $G = \langle S, T \rangle$ gezeigt. $\square$

Definition 4: Sei $k \in 2\mathbb{N}$ (gerade, positive ganze Zahl). Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *Modulform vom Gewicht* k, falls folgende beide Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

(ii) f lässt sich in $q = e^{2\pi i \tau}$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. f ist holomorph in $\tau = i\infty$.

Bemerkung: (i) impliziert $f(\tau + b) = f\left(\frac{1\cdot\tau+b}{0\cdot\tau+1}\right) = (0 \cdot \tau + 1)^k f(\tau) = f(\tau)$ für $b \in \mathbb{Z}$, d.h. f ist periodisch. f lässt sich also in eine Laurentreihe in $q = e^{2\pi i\tau}$ entwickeln: $f(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r q^r$, $a_r \in \mathbb{C}$ für $r \in \mathbb{Z}$.
(ii) impliziert, dass es sich dabei sogar um eine Potenzreihe handelt, d.h. $a_r = 0 \ \forall r < 0$.
Im Kontext von Satz 2 ist eine Modulform f vom Gewicht k durch eine Potenzreihe $f(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ gegeben, die für $|q| < 1$ (d.h. $\tau \in \mathbb{H}$) konvergiert und $f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau)$ erfüllt. Um also (in Satz 1) zu zeigen, dass ϑ_Γ Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist, ist zu zeigen, dass ϑ_Γ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, dass $\frac{n}{2}$ gerade ist und dass ϑ_Γ die Identität

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau)$$

erfüllt. Dies wird sich aus der Poisson Summenformel ergeben.

3 Die Poisson Summenformel

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beliebiges volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche die folgenden drei Bedingungen (V1), (V2) und (V3) erfüllt:

(V1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$

(V2) Die Reihe $\displaystyle\sum_{x\in\Gamma} |f(x+u)|$ konvergiert kompakt gleichmäßig in $u \in \mathbb{R}^n$

(V3) Die Reihe $\displaystyle\sum_{y\in\Gamma^\#} \hat{f}(y)$ ist absolut konvergent.

$\hat{f}$ sei die Fourier Transformation von f, welche als $\hat{f}(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (x\cdot y)}\, dx$ definiert ist.

Bemerkung: (V1) impliziert die Existenz der Fourier Transformation,
(V2) impliziert, dass die Funktion $F(u) := \displaystyle\sum_{x\in\Gamma} f(x+u)$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz 3 (Poisson Summenformel): Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche (V1), (V2) und (V3) erfüllt. Dann gilt:

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^\#} \hat{f}(y)\,.$$

Beweis: Sei zunächst $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Die Funktion $F(u) := \displaystyle\sum_{x\in\Gamma} f(x+u)$ ist stetig wegen (V2) und periodisch in u, d.h. $F(u+x) = F(u)$ für $x \in \mathbb{Z}^n$. Folglich lässt sich F in eine Fourier Reihe $\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u\cdot y} a(y)$ mit $a(y) := \displaystyle\int_{[0,1]^n} F(t)\, e^{-2\pi i y\cdot t}\, dt$ entwickeln. Wir zeigen $a(y) = \hat{f}(y)$. Mit (V3) konvergiert die Fourierreihe von F dann gleichmäßig absolut (Weierstraß), also gegen eine stetige Funktion und somit gegen F. Dann gilt

$$F(0) = \sum_{x\in\Gamma} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(y)\,,$$

die Poisson Formel für $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Zeige $a(y) = \hat{f}(y)$:

$$\begin{aligned}
a(y) &= \int_{[0,1]^n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i t\cdot y}\, dt \underset{x\cdot y\in\mathbb{Z}}{=} \int_{[0,1]^n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i (t+x)\cdot y}\, dt \\
&\underset{\text{lok. glm. konv.}}{=} \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i (x+x)\cdot y}\, dt = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \int_{x+[0,1]^n} f(t')\, e^{-2\pi i t'\cdot y}\, dt' \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t')\, e^{-2\pi i t'\cdot y}\, dt' = \hat{f}(y)\,.
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall hat man $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} c_i = M \cdot \mathbb{Z}^n$ mit $M = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Die Basis des dualen Gitters $\Gamma^{\#} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y \in \mathbb{Z}\, \forall y \in \Gamma\} = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ ist $(c_1^{\star}, \ldots, c_n^{\star})$ mit $c_i^{\star} \cdot c_j = \delta_{ij}$, also $\Gamma^{\#} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} c_i^{\star} = M^{\star} \mathbb{Z}^n$ mit $M^{\star} = \left(M^{\top}\right)^{-1}$, da

$$(M^{\star})^{\top} M = \begin{pmatrix} (c_1^{\star})^{\top} \\ \vdots \\ (c_n^{\star})^{\top} \end{pmatrix} (c_1 \ldots c_n) = I_n.$$

Nun ist

$$\sum_{x \in \Gamma} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(Mx) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f_M(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_M(y)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{f}_M(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Mt)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt \\ &= \frac{1}{\det M} \int_{\mathbb{R}^n} f(t')\, e^{-2\pi i \left(M^{-1} t'\right) \cdot y}\, dt' \qquad (t = M^{-1} t') \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma)} \hat{f}\left(\left(M^{\top}\right)^{-1} y\right) \qquad (M^{-1} t' \cdot y = t' \cdot \left(M^{\top}\right)^{-1} y), \end{aligned}$$

und wegen $\Gamma^{\#} = \left(M^{\top}\right)^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$ folgt

$$\sum_{x \in \Gamma} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_M(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma)} \sum_{y \in \Gamma^{\#}} \hat{f}(y).$$

□

Lemma 1: Die Funktion $f : x \mapsto e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right) x^2}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0)$ besitzt die Fourier Transformation $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2}$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right) x^2} e^{-2\pi i x \cdot y}\, dx = \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2}. \qquad (\star\star\star)$$

(Für $t = 1$ hat man insbesondere, dass $f : x \mapsto e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gleich ihrer Fourier Transformation ist.)

Beweis: Zu zeigen ist also $(\star\star\star)$. Substituiert man in $(\star\star\star)$ $\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{t}}$ und $\tilde{y} = y\sqrt{t}$, so erhält man

$$\left(\sqrt{t}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \tilde{x}^2} e^{-2\pi i \tilde{x} \tilde{y}}\, dx = \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi \tilde{y}^2},$$

somit reicht es, die Behauptung für $t = 1$ zu zeigen. Sei also $t = 1$.

Sei $n = 1$ und $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx$ für $y \in \mathbb{R}$ die Fourier Transformation von $f(x)$.

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(y) &= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx \\
&= i \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-2\pi i x y}}_{=:g} \underbrace{\left(-2\pi x e^{-\pi x^2}\right)}_{=:h'} dx \right) \\
&= i \left(e^{-2\pi i x y} e^{-\pi x^2} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \left(-2\pi i y e^{-2\pi i x y}\right) e^{-\pi x^2}\, dx \right) \\
&= 0 - 2\pi y \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} e^{-\pi x^2}\, dx = -2\pi y \hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Aus $\hat{f}'(y) = -2\pi y \hat{f}(y)$ erhält man

$$\frac{d}{dy} \frac{\hat{f}(y)}{e^{-\pi y^2}} = \frac{-2\pi y \hat{f}(y) e^{-\pi y^2} + 2\pi y \hat{f}(y) e^{-\pi y^2}}{e^{-2\pi y^2}} = 0.$$

Folglich ist $\hat{f}(y) = c e^{-\pi y^2}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Nun ist aber $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$ (siehe z.B. Krieg, Funktionentheorie I Kap. VI 3.9), d.h. $c = 1$. Also $\hat{f}(y) = f(y)$ falls $n = 1$.

Mit dem Satz von Fubini zeigt man die Aussage nun induktiv für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot y}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi \sum^n x_i^2} e^{-2\pi i \sum^n x_i y_i}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_n y_n}\, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi \sum^{n-1} x_i^2} e^{-2\pi i \sum^{n-1} x_i y_i}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&\overset{\text{IV.}}{=} e^{-\pi y_n^2} e^{-\pi \sum^{n-1} y_i^2} = e^{-\pi y^2}.
\end{aligned}$$

□

4 Theta Funktionen als Modulformen

Wir wollen nun Satz 1 beweisen. Dafür zunächst 2 Lemmas:

Lemma 2: $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sei volles Gitter. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2} x \cdot x} = \sum_{x \in \Gamma} e^{\pi i \tau x^2}$$

gleichmäßig absolut für alle τ mit $\mathrm{Im}\tau \geq v_0 > 0$ (also lokal gleichmäßig absolut konvergent auf $\mathbb{H}$) und ist somit eine holomorphe Funktion.

Beweis: Sei $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^n$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\varepsilon := \min_{|x|=1} (Mx)^2 > 0$. Dann ist $(Mx)^2 \geq \varepsilon x^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ($(Mx)^2 = \left(M\frac{x}{|x|}\right)^2 |x|^2 \geq \varepsilon^2 x^2$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $0 = (M \cdot 0)^2 \geq \varepsilon^2 \cdot 0^2 = 0$). Dies führt zu folgender Abschätzung:

$$\sum_{x\in\Gamma} \left|e^{\pi i \tau x^2}\right| = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \left|e^{\pi i \tau (Mx)^2}\right| \leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi v_0 \varepsilon x^2} \overset{(\star)}{=} \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{-\pi v_0 \varepsilon r^2}\right)^n < \infty \quad \text{(geo. Reihe)}$$

$$(\star): \quad \text{induktiv:} \quad \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(\alpha x^2\right) = \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} \exp\left(\alpha r^2\right)\right)^n.$$

Also ist die Reihe $\sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x} = \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i \tau x^2}$ gleichmäßig absolut konvergent für τ, $\mathrm{Im}\tau \geq v_0 > 0$. □

Lemma 3. Für ein volles Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ gilt die Identität

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)} \vartheta_{\Gamma^\#}(\tau).$$

Beweis: Da beide Seiten der Identität holomorph in $\tau \in \mathbb{H}$ sind, reicht es aus, die Gleichheit für $\tau = it$, $t \in (0, \infty)$ zu zeigen (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). Lt. Lemma 1 hat man $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2}$ als Fourier Transformation von $f(x) := e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right)x^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Die Poisson Summenformel liefert

$$\begin{aligned}\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{it}\right) &= \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\left(-\frac{1}{it}\right)x^2} = \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right)x^2} = \frac{1}{\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)} \sum_{y\in\Gamma^\#} \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2} \\ &= t^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)} \vartheta_{\Gamma^\#}(it),\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Beweis von Satz 1: Sei Γ ein gerades, unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen zunächst (i): Angenommen n ist nicht durch 8 teilbar. Sei o.E. $n \equiv 4 \pmod 8$ (sonst betrachte $\Gamma \perp \Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$ bzw. $\Gamma\perp\Gamma\perp\Gamma\perp\Gamma \subset \mathbb{R}^{4n}$). Lemma 3 besagt dann ($\Gamma^\# = \Gamma$ und $\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right) = 1$):

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-1)^{\frac{n}{4}} \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau) = -\tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau).$$

Da Γ gerade, ist ϑ_Γ invariant unter $T : \tau \mapsto \tau + 1$, also

$$\vartheta_\Gamma\left(T\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) = \vartheta_\Gamma\left((TS)\tau\right) = -\tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau).$$

Folglich erhält man wegen $(TS)\,\tau = 1 - \frac{1}{\tau} = \frac{\tau-1}{\tau}$ und $(TS)^2\,\tau = 1 - \frac{\tau}{\tau-1} = \frac{-1}{\tau-1}$:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\Gamma\left((TS)^3\,\tau\right) &= -\left((TS)^2\,\tau\right)^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma\left((TS)^2\,\tau\right)\\
&= \left((TS)^2\,\tau\right)^{\frac{n}{2}}\left((TS)\,\tau\right)^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma\left((TS)\,\tau\right)\\
&= -\left((TS)^2\,\tau\right)^{\frac{n}{2}}\left((TS)\,\tau\right)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)\\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)\\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}}\,\vartheta_\Gamma(\tau) = -\vartheta_\Gamma(\tau)\,.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $(TS)^3 = 1$, also zu $\vartheta_\Gamma\left((TS)^3\,\tau\right) = \vartheta_\Gamma(\tau)$ und es folgt (i).

Da nun $n \equiv 0 \pmod 8$ gezeigt ist, erhalten wir aus Lemma 3 (mit $\Gamma^\# = \Gamma$ und $\mathrm{vol}\,(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$):

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i)^{\frac{n}{2}}\,\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau) = \tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)\,,$$

ϑ_Γ ist also Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$, das ist (ii). $\square$