Übungsblatt 2

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 Sei $d \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_K^*$ im Fall $d < 0$.

Aufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass jeder (kommutative) faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist.
2. Begründen Sie warum $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ kein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 3 Sei $p > 2$ eine Primzahl. Weiter sei $d \in \mathbb{F}_p[X]$ quadratfrei mit $\deg d > 0$. Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von $\mathbb{F}_p[X]$ in $\mathbb{F}_p(X, \sqrt{d}) = \mathbb{F}_p(X)[T]/(T^2 - d)$.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $n = [K : \mathbb{Q}]$.

Definition

- Eine Ordnung in K ist ein Teilring von K, der auch ein volles ($\mathbb{Z}$-)Gitter (also ein e. e. $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n) in $(K, S_{K/\mathbb{Q}})$ ist.
- Zu einem vollen Gitter I in K sei $\mathcal{O}(I) := \{a \in K \mid aI \subseteq I\}$ die zugehörige Ordnung.

Aufgabe 4 Zeigen Sie:

1. Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_K$ ist eine Ordnung und enthält jede Ordnung von K.
   (Man sagt $\mathbb{Z}_K$ ist die Maximalordnung von K.)
2. Jedes von (0) verschiedene Ideal einer Ordnung in K ist ein volles Gitter.
3. Ist I ein volles Gitter in K so ist $\mathcal{O}(I)$ eine Ordnung in K.