Übungsblatt 3

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper.

Definition Zu einer Ordnung R in K und einer Primzahl p bezeichne

$$J_p(R) := \{a \in R \mid a^m \in pR \text{ für ein } m \geq 0\}$$

das p-Radikal von R.

Aufgabe 1 Im Folgenden sei R eine Ordnung in K und p eine Primzahl. Zeigen Sie:

1. $J_p(R)$ ist ein Ideal von R.
2. Es existiert ein $m \geq 0$ so, dass $J_p(R)^m \subseteq pR$. (Es sei $J_p(R)^0 = R$.)
3. $pR \subseteq p\mathcal{O}(J_p(R)) \subseteq J_p(R) \subset R$. Insbesondere ist $|\mathcal{O}J_p(R))/R|$ ein Teiler von p^{n-1}.

Aufgabe 2 (Zassenhaus Round 2)

1. Es ist $S := \{a \in \mathbb{Z}_K \mid p^k a \in R \text{ für ein } k \geq 0\}$ eine Ordnung von K.
2. Ist $R = \mathcal{O}(J_p(R))$ so gilt $R = S$.
3. p teilt $|\mathbb{Z}_K/R|$ genau dann wenn $R \subset \mathcal{O}(J_p(R))$.

(Hinweis zu 2.: Wäre $R \subset S$, so existiert ein $k \geq 0$ mit $J_p(R)^k \cdot S \not\subseteq R$ und $J_p(R)^{k+1} \cdot S \subseteq R$. Wähle $x \in J_p(R)^k \cdot S - R$ und zeige $xJ_p(R) \subseteq J_p(R)$.)

Aufgabe 3 Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

1. Bestimmen Sie $\mathbb{Z}_K$.
2. Bestimmen Sie die Primidealzerlegeungen von $p\mathbb{Z}_K$ für $p = 2, 3, 5, 7, 31$.