Übungsblatt 4

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Aufgabe 2 Es sei K ein Zahlkörper mit genau r reellen und $2s$ echt komplexen Einbettungen. Die Menge der Einbettungen heiße G. Zeigen Sie:

1. Für $t \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $X_t := \left\{(z_\tau)_{\tau\in G} \in K_\mathbb{R} : \sum_{\tau\in G} |z_\tau| < t\right\} \subset K_\mathbb{R}$ eine zentralsymmetrische konvexe Menge mit Volumen $2^r\pi^s t^n/n!$.
2. In jeder Idealklasse von K gibt es ein ganzes Ideal $\mathcal{A}$ mit $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{A}) \leq \frac{n!}{n^n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^s\sqrt{|d_K|}$.
3. Ist $K \neq \mathbb{Q}$ so ist $|d_K| > 1$.

Ad 1.: Beachten Sie, dass das durch die Minkowski-Metrik (vgl. 1.2.7) induzierte Maß sich nur um den Faktor 2^s vom Maß aus dem Standard-Skalarprodukt, also dem Lebesgue-Maß (unter der Identifizierung) unterscheidet.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-17}))$ sowie Vertreter aller Idealklassen.

Aufgabe 4 Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d = 14$ bzw. $d = 30$. Bestimmen Sie jeweils den Isomorphietyp und ein Vertretersystem von $\mathrm{Cl}(K)$, $\mathrm{Cl}(K)^2$ und $\mathrm{Cl}(K)/\mathrm{Cl}(K)^2$.