Übungsblatt 5

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

1. Es sei $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i^{n_i} \trianglelefteq \mathbb{Z}_K$ Produkt von paarweise verschiedenen Primidealen. Weiter seien $b_i \in \mathfrak{p}_i^{n_i} - \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{b}$ mit $x \equiv b_i \mod \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$ für alle $1 \leq i \leq k$.
2. Sind $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ zwei gebrochene Ideale in K, so ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (x)$ für ein $x \in \mathfrak{b}$.
3. Jedes gebrochene Ideal von K kann mit (höchstens) zwei Elementen erzeugt werden.

Hinweis: (a) Chinesischer Restsatz.
(b) Ohne Einschränkung ist $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i^{n_i}$ ganz. Weiter darf man annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ebenfalls ein Produkt der Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ ist.Wähle nun x wie in (a) und zeige dass jedes Primideal von $\mathbb{Z}_K$ die Ideale $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} + (x)$ mit der selben Vielfachheit teilt.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie die Einheitengruppen $\mathbb{Z}^*_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ für $d = 2, 3, 5$.
2. Wie würden Sie im ersten Aufgabenteil ohne den Kettenbruchalgorithmus argumentieren?
3. Bestimmen Sie (mit dem Kettenbruchalgorithmus) Fundamentaleinheiten für $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d = 22, 29$.

Aufgabe 3 Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$. Bestimmen Sie $Q(d(O))$ und die Bijektion zu $\mathrm{Cl}(O)$ für

1. $O = \mathbb{Z}_K$.
2. $O = \mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$.