Übungsblatt 6

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 (Schwache Approximation)
Es seien K ein algebraischer Zahlkörper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ paarweise verschiedene Primideale in $\mathbb{Z}_K$ und $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie: Es existiert ein $a \in K^*$, sodass $(a) = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{e_i} \cdot \mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein zu den $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ teilerfremdes ganzes Ideal ist.

Aufgabe 2 Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale in einem algebraischen Zahlkörper K. Zeigen Sie:

1. Es existieren $x, y \in K^*$ so, dass $x\mathfrak{a}$ und $y\mathfrak{b}$ ganze teilerfremde Ideale von $\mathbb{Z}_K$ sind.
2. Es ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \cong \mathfrak{ab} \oplus \mathbb{Z}_K$ als $\mathbb{Z}_K$-Moduln.
3. $\mathfrak{a}$ ist ein projektiver $\mathbb{Z}_K$-Modul.

Aufgabe 3 Es seien $K \subseteq L \subseteq M$ algebraische Zahlkörper und $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbb{Z}_M$ ein Primideal. Weiter sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}_L$. Zeigen Sie:

1. $e_{M/K}(\mathfrak{p}) = e_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot e_{L/K}(\mathfrak{P})$
2. $f_{M/K}(\mathfrak{p}) = f_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot f_{L/K}(\mathfrak{P})$

Aufgabe 4 Es sei $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, i)$ und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Zeigen Sie, dass L/K eine unverzweigte Erweiterung ist.
Hinweis: Verwenden Sie auch den Teilkörper $K' := \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{-5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ von L.