Übungsblatt 7

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 ei $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ und $^-$ bezeichne den Automorphismus auf K welcher durch $\zeta_5 \mapsto \zeta_5^{-1}$ definiert wird. Zeigen Sie:

1. $\varphi\colon \mathbb{Z}_K^* \to \mu(\mathbb{Z}_K^*),\ u \mapsto u/\bar{u}$ ist ein wohldefinierter Gruppenmorphismus.
2. -1 liegt nicht im Bild von φ. Insbesondere existiert zu jedem $u \in \mathbb{Z}_K^*$ ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\zeta_5^k u \in \mathrm{Fix}_K(\langle ^- \rangle)$.
3. Es ist $\mathbb{Z}_K^* = \left\langle -\zeta_5,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$.

Hinweis: Ad 2.: Ist $u \in \mathbb{Z}_K^*$ mit $u = -\bar{u}$ so liegt u im $\mathbb{Z}$-Gitter $\left\langle \zeta_5 - \zeta_5^{-1},\ \zeta_5^2 - \zeta_5^{-2} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ und wird daher von $\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$ in $\mathbb{Z}_K$ geteilt.

Ad 3.: Es ist $\mathrm{Fix}_K(\langle ^- \rangle) = \mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Aufgabe 2 Es seien p und ℓ zwei verschiedene Primzahlen und $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Zeigen Sie:

1. $X^p - 1 \in \mathbb{F}_\ell[X]$ hat genau dann eine mehrfache Nullstelle in $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ falls $p = \ell$.
2. $\mathfrak{p} := (1-\zeta_p)$ ist das einzige Primideal von $\mathbb{Z}_K$ welches p enthält und es gilt $e_\mathfrak{p} = p-1$ sowie $f_\mathfrak{p} = 1$.
3. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathbb{Z}_K$ mit $\ell \in \mathfrak{q}$. Dann ist $e_\mathfrak{q} = 1$ und $f_\mathfrak{q}$ ist die Ordnung von ℓ in $\mathbb{F}_p^*$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von $\ell\mathbb{Z}[\zeta_7]$ für $\ell = 2, 3, 7, 13, 29$, sowie die Trägheits- bzw. Verzweigungsgrade, Trägheits- bzw. Zerlegungskörper, Trägheits- bzw. Zerlegungsgruppe und Erzeuger der auftretenden Primideale.

Aufgabe 4 Sei $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ und ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

1. Sei $n = p^r$ für eine Primzahl p. Für je zwei zu p teilerfremde Zahlen $i, j \in \mathbb{Z}$ ist dann $(1-\zeta_n^i)/(1-\zeta_n^j) \in \mathbb{Z}[\zeta_n]^*$.
2. Sei n keine Primzahlpotenz. Dann ist $(1-\zeta_n) \in \mathbb{Z}[\zeta_n]^*$. Genauer gilt $\prod_{i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*}(1-\zeta_n^i) = \pm 1$.

Hinweis zu (b): Seien $T = \{d \in \mathbb{Z}_{>1} : d \mid n\}$ und $P = \{t \in T \mid t \text{ ist Primzahlpotenz}\}$. Dann ist $n = \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = \prod_{i \in P} \Phi_i(1) \cdot \prod_{i \in T-P} \Phi_i(1)$. Folgere $\Phi_i(1) \in \mathbb{Z}^*$ für alle $i \in T-P$.