Übungsblatt 8

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_5, \sqrt{2})$. Weiter sei $p \in \{2, 3, 5, 11\}$ und $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbb{Z}_K$ ein Primideal das p enthält. Bestimmen Sie die Verzweigungs- und Trägheitsgrade sowie die Zerlegungs- und Trägheitsgruppen von $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 2 Es sei (X, d) ein ultrametrischer Raum. Es sei $r > 0$ und $M \in X$. Zeigen Sie: Für jedes $M' \in B_r(M)^\circ$ gilt $B_r(M') = B_r(M)$.

Aufgabe 3 Es sei K ein Körper, der bezüglich der diskreten Bewertung $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ vollständig ist. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ in K die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 4 Sei R ein Noetherscher ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. Jedes von (0) verschiedene Primideal von R ist maximal, d.h. R ist ein Dedekindring.

2. Für jedes von (0) verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $R_{(\mathfrak{p})}$ ein diskreter Bewertungsring.