Übungsblatt 9

Algebraische Zahlentheorie, Prof. Dr. Gabriele Nebe, SS 2022

Aufgabe 1 Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Menge der Quadrate in $\mathbb{Z}_p^*$, $\mathbb{Z}_p$ sowie $\mathbb{Q}_p^*$. Bestimmen Sie ferner Erzeuger sowie den Isomorphietyp von $\mathbb{Z}_p^*/(\mathbb{Z}_p^*)^2$ bzw. $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$.

Hinweis: Im Fall $p > 2$ fixiere man ein Nichtquadrat $\varepsilon \in \mathbb{F}_p^*$. Der Fall $p = 2$ ist gesondert zu betrachten.

Aufgabe 2 Faktorisieren Sie $X^{15} - 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$ für $p \in P := \{2, 3, 11\}$. Die auftretenden p-adischen Zahlen sind modulo p^4 zu approximieren. Bestimmen Sie ferner die Primidealzerlegung sowie die Trägheits- und Zerlegungsgrade von $p\mathbb{Z}[\zeta_{15}]$ in $\mathbb{Z}[\zeta_{15}]$ für alle $p \in P$.

Aufgabe 3

1. Führen sie einen elementaren Beweis von Satz 8.2: Es sei (K, ν) ein vollständig diskret bewerteter Körper mit Bewertungsring R und maximalem Ideal πR. Es sei $F := R/\pi R$ mit natürlichem Epimorphismus $\overline{} : R[X] \to F[X]$. Es sei $f(x) \in R[X]$ primitiv , sodass $\overline{f(X)} = h_0(X)g_0(X)$ mit teilerfremden Polynomen $h_0(X), g_0(X) \in F[X]$. Bestimmen Sie zwei Folgen von Polynomen $(h_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ in $R[X]$ mit $f \equiv h_n(X) \cdot g_n(X) \pmod{\pi^{n+1}}$ und $h_n \equiv h_{n+1} \pmod{\pi^n}$ bzw. $g_n \equiv g_{n+1} \pmod{\pi^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
2. Approximieren Sie die Faktorisierung von $X^7 - 1$ in $\mathbb{Z}_2[X]$ modulo 2^4.
3. Approximieren Sie die Faktorisierung von $\Phi_{15}(X)$ in $\mathbb{Z}_2[X]$ modulo 2^4.