3. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Aufgabe 7. (Quaternionenalgebren) Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und D eine zentral einfache K-Algebra der Dimension 4. Zeigen Sie:
(a) Es gibt $a, b \in K^*$, $i, j \in D$ mit $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$. Bezeichnung: $D = \left(\frac{a,b}{K}\right)$.
(b) Für die reduzierte Norm gilt $N(x + yi + zj + tij) = x^2 - ay^2 - bz^2 + (ab)t^2$.
(c) Die Abbildung $x + yi + zj + tij \mapsto x - yi - zj - tij$ ist ein K-Algebren Isomorphismus zwischen D und D^{op}.
(d) Ist D eine Divisionsalgebra, so hat $[D]$ Ordnung 2 in $\mathrm{Br}(K)$.
(e) $\left(\frac{a,b}{K}\right) \cong \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ genau dann wenn die 3-dimensionalen quadratischen K-Vektorräume $(K^3, \mathrm{diag}(-a, -b, ab))$ und $(K^3, \mathrm{diag}(-\alpha, -\beta, \alpha\beta))$ isometrisch sind.
(f) $D^*/K^* \cong SO(\mathrm{diag}(-a, -b, ab)) = \{A \in \mathrm{SL}_3(K) \mid A\,\mathrm{diag}(-a, -b, ab)A^{tr} = \mathrm{diag}(-a, -b, ab)\}$

Aufgabe 8.
(a) $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right)$ ist eine Divisionsalgebra, genau dann wenn $a < 0$ und $b < 0$.
(b) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist $\Lambda := \langle 1, i, j, ij\rangle_{\mathbb{Z}}$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$. Bestimmen Sie $\Lambda^\#$ und $|\Lambda^\#/\Lambda|$.
(c) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ die Hasse Invariante von $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right) \otimes \mathbb{Q}_p$ trivial ist, falls p kein Teiler von $2ab$ ist.
(d) Bestimmen Sie die Hasse Invarianten von $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right) \otimes \mathbb{Q}_p$ für alle p und folgende Paare (a, b): $(-1, -1)$, $(-1, -3)$, $(2, 5)$, $(-2, -5)$, $(-2, 5)$, $(2, -5)$.
(e) Sei $D = \left(\frac{-2,-5}{\mathbb{Q}}\right)$. Zeigen Sie, dass $E = \mathbb{Q}[\zeta_5]$ ein Zerfällungskörper für D ist, jedoch kein echter Teilkörper von E die Divisionsalgebra D zerfällt.

Aufgabe 9.
Sei $A = \langle 1, \rho, i, \rho i\rangle_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}[\rho] \oplus \mathbb{Q}[\rho]i$, wo $\rho^2 + \rho + 3 = 0$, $i^2 = -1$, $(i\rho)^2 = -3$.
(a) Sei $\Lambda := \langle 1, \rho, i, \rho i\rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass Λ eine Maximalordnung in A ist.
(b) Bestimmen Sie alle Hasse Invarianten von A.
(c) Sei $\Gamma = \langle 1, \rho + i, 2i, \frac{1+\rho i}{2}\rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass Γ eine Maximalordnung ist.
(d) Bestimmen Sie die Einheitengruppen von Γ und von Λ und folgern Sie, dass Λ und Γ nicht isomorph sind.

Abgabe: Freitag, den 28.10.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.