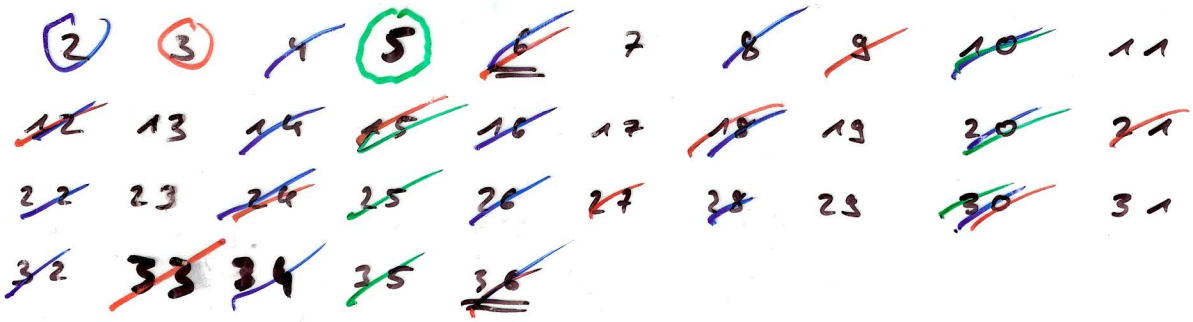
Sieb des Eratosthenes

Suchen alle Primzahlen bis zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dazu: $n := 36$ $\sqrt{n} = 6$



Hier sei entsteht eine weitere Idee:

$$P := \prod_{i \in I} p_i \qquad p_i \text{ Primzahlen}$$

$ggT(P, N) \neq 1$, so haben wir Teiler unter den p_i

$= 1$, so wissen wir, dass keines der p_i N teilt

Man sollte sich eine Strategie ausdenken für beliebige N.

Fermats Idee

Sei $N \in \mathbb{N}$ ungerade und eine zusammengesetzte Zahl, also

$N = a \cdot b$ $\quad a, b \in \mathbb{N}$ ungerade

Durch die Wahl von $x, y \in \mathbb{N}$ mit

$$x := \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad y := \frac{a-b}{2}$$

können wir auch schreiben:

$$N = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Wir suchen also ein Quadrat, das die folgende Gleichung erfüllt:

$$y^2 = x^2 - N$$

Dazu beschreib Fermat folgenden Algorithmus:

(1) $x := \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$ $\qquad f(x) = x^2 - N$

(2) Ist nun $f(x) = y^2$ ein Quadrat, so haben wir die Faktorisierung $N = a \cdot b = (x+y)(x-y)$

Wenn nicht:

$x := x + 1$ $\quad$ und $\quad f(x+1) = (x+1)^2 - N$

$= f(x) + 2x + 1$

und starte (2) neu.

Erweiterung der Idee

(durch Gauß (1777-1855), Legendre (1752-1833) und später in den 20er Jahren Kraitchik (1882-1957))

Sie fanden heraus, das man auch folgendes suchen kann:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = kN \qquad k \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt, dass in dem Restklassenring $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ für x^2 die Wurzel y ex.

Wir suchen also:

$$x^2 \equiv_N y^2 \quad \text{mit} \quad x \not\equiv_N \pm y$$

Finden wir ein solches y, so können wir über den

$$ggT(x-y, N)$$

einen nicht-trivialen Teiler von N finden.

Allg. Vorgehensweis bei den im Folgenden beschriebenen Algorithmen:

Wir bestimmen quadratische Reste

$$z_i \equiv_N x_i^2 \qquad z_i \in \mathbb{Z} \qquad i \in S := \{1 \dots s\}$$

und versuchen durch geschickte Wahl von $I \subseteq S$ folgendes zu finden:

$\prod_{i \in I} z_i = y^2$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}$;

wähle dann: $x := \prod_{i \in I} x_i$

$$\Rightarrow x^2 \equiv_N y^2$$

$y^2 \equiv_N x^2$ mit $x \not\equiv_N \pm y$

Es gibt genau 2^d verschiedene Wurzeln von x^2 ($d \hat{=}$ Anzahl Primteiler von N)

Zur Ex. von solchen y:

sei dazu N ungrade, keine Primzahl

Sei $N = a \cdot b$ a, b teilerfremd

$y \in \mathbb{Z}_N^*$

$\overset{CRS}{\Rightarrow}$ $\exists\, x \in \mathbb{Z}_N^*$ mit $\underbrace{x \equiv_a y}_{*}$ $x \equiv_b -y$

d.h. $a \mid x-y$ und $b \mid x+y$

also: $x^2 \equiv_N y^2$

Es bleibt zu zeigen, $x \not\equiv \pm y$

Nehmen das Gegenteil an $x \equiv_N +y$ oder $x \equiv_N -y$

OE $x \equiv_N -y$

$\Rightarrow$ $x \equiv_a -y$ aber auch $x \equiv_a y$ (*)

$\Rightarrow$ $2x \equiv_a 0$ da a ungerade $\Rightarrow a \mid x$

$\Rightarrow$ $ggT(x, N) \neq 1$ ↯ $x \in \mathbb{Z}_N^*$

Dazu müssen wir uns Folgendes vorstellen:

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \oplus_i \dots \oplus_i \mathbb{Z}/p_d^{e_d}\mathbb{Z}$$

$$z = (z_1, \dots, z_d)$$

$$\| \quad (y_1^2, \dots, y_d^2) = y^2$$

<u>Wurzeln</u> von $(z_1, \dots, z_n)$ sind demnach $(\pm y_1, \dots, \pm y_d)$

Warum gibt es (genau) 2^d Stück, obwohl wir uns in Ringen befinden?

Dazu: Es existieren keine oder zwei Quadratwurzeln einer Zahl $a \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ $a \neq 0$ $p \neq 2$ *

Seien $x, y \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ Quadratwurzel von a

Dann ist $x^2 - y^2 = k p^e$ $k \in \mathbb{Z}$

also $(x+y)(x-y) = k p^e$ (*)

Es kann aber nicht sein, dass $x+y$ und $x-y$ durch p^e teilbar sind, dann würde folgen

$y \equiv_{p^e} -y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow a = y^2 = 0$ ↯ (*)

Also ist entweder $x+y$ oder $x-y$ teilbar durch p^e (nach *)

$\Rightarrow$ $x = y$ oder $x = -y$

Das Quadratische Sieb

Vorgegeben: $N \in \mathbb{N}$ zusammengesetzt, keine Primzahlpotenz.

Parameter $B, S \in \mathbb{N}$

Gesucht: $x^2 \equiv_N y^2$

1. Liste: $L = [f_1, \dots, f_S]$.

$f_i := f(x_i) := x_i^2 - N, \quad x_i := \lfloor \sqrt{N} \rfloor + i$

2. Faktorbasis: $F(B) := \{ p \leq B \mid p \text{ prim}, \left(\frac{N}{p}\right) = 1 \}$

3. Sieben: - Suche für $p \in F(B)$ Lösung t von $x^2 \equiv_p N$

- setze $t_1 := t - \lfloor \sqrt{N} \rfloor \bmod p$,
  $(p \neq 2)$ $t_2 := -t - \lfloor \sqrt{N} \rfloor \bmod p$
- dann $L[t_j + k \cdot p] = f_{t_j + kp}$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$
  durch p teilen
- für p^e, $e \geq 2$ evtl. wiederholen

4. y^2 ermitteln: - für $L[i] = 1$ Faktorbasisvektoren erzeugen
- Lin. Abh. der Vektoren mod 2 suchen
- sein $(v(f_{i_1}), \dots, v(f_{i_e}))$ l. a.
  $\Rightarrow y^2 := \sqrt{f_{i_1} \cdot \dots \cdot f_{i_e}} \bmod N$

5. Auswertung: $x := x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_e} \bmod N$, $ggT(x - y, N)$ berechnen

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 46 & 47 & 49 & 51 & 53 \\
 & 75 & 168 & 360 & 560 & 768 \\
\hline
2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 8 \\
3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array} =: M
$$

$$
\ker(M \bmod 2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

$$
\Rightarrow y \equiv_N \sqrt{75 \cdot 168 \cdot 360 \cdot 560} \equiv_N 1416
$$

$$
x \equiv_N 46 \cdot 47 \cdot 49 \cdot 51 \equiv_N 311
$$

$$
ggT(1416 - 311, N) = 13
$$

$$
\boxed{2041 = 13 \cdot 157}
$$