

Kohomologie von Spechtmoduln

von
Christian Weber

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Dezember 2006

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Grundlagen	7
1.1 Darstellungen von Gruppen	7
1.2 Spechtmodul	11
1.3 Endlich presentierete Gruppen	31
1.4 Kohomologie von Gruppen	34
1.5 Das Zassenhaus-Verfahren	42
2 Die Bestimmung von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$	47
2.1 Zassenhaus-Matrizen zu $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$	48
2.2 Invariantenteiler von Zassenhaus-Matrizen	52
2.3 Primteiler von $ H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}) $	55
A GAP-Routinen	63
A.1 Zur Berechnung von $A_{\lambda}(G_n)$	63
A.2 Zur Berechnung von $A_{\lambda}(H_n)$	65
A.3 Zur Berechnung der Invariantenteiler von $A_{\lambda}(P)$	66
B GAP-Ergebnisse	69
B.1 Isomorphietypen von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$	69
B.2 Graphen der Form \mathcal{D}_p	75
C Der Beweis von Lemma 2.2.4	79

Vorwort

*Wer das Unmögliche möglich macht,
sollte dennoch das Wahrscheinliche
nicht ganz aus dem Auge verlieren.*

Ulrich Roski

Die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen ist eine der schönsten, beliebtesten und wichtigsten Bereiche der Algebra, mit vielen tiefen Beziehungen zu anderen Gebieten der Mathematik wie Kombinatorik, Lie-Theorie und algebraischer Geometrie. In der vorliegenden Arbeit wird ein Bogen zur Kohomologie geschlagen. Genauer gesagt untersuchen wir die Isomorphietypen der zweiten Kohomologiegruppen von symmetrischen Gruppen mit Werten in Spechtmoduln über den ganzen Zahlen.

Zur Motivation dieser Fragestellung betrachten wir zunächst eine Vermutung von Szczepański, die lautet: Für jede endliche Gruppe G existiert eine Bieberbachgruppe mit Holonomiegruppe G und einer \mathbb{Q} -vielfachheitsfreien Holonomiedarstellung (siehe [Sz03]). Im Vokabular der Erweiterungstheorie bedeutet das: Für jede endliche Gruppe G existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine torsionsfreie Erweiterung Γ von \mathbb{Z}^k mit G , so dass die durch Γ bewirkte Darstellung von G auf \mathbb{Z}^k vielfachheitsfrei über \mathbb{Q} ist.

Solange dieses Problem nicht in dieser Allgemeinheit gelöst ist, kann man sich fragen, ob die Vermutung für bestimmte Gruppen zutrifft, beispielsweise für symmetrische Gruppen. Um keine falschen Erwartungen zu wecken: Die vorliegende Arbeit beantwortet diese Frage nicht. Aber ihr Thema erwächst aus diesem Kontext.

Wenn wir nämlich die zu einer Erweiterung gehörige Operation von S_n auf \mathbb{Z}^k zu einer Operation auf \mathbb{Q}^k fortsetzen, dann wird \mathbb{Q}^k mit dem Satz von Maschke zu einem halbeinfachen $\mathbb{Q}S_n$ -Modul und ist damit eine direkte Summe aus Spechtmoduln. Spechtmoduln über \mathbb{Q} erhält man durch Konstantenerweiterung von Spechtmoduln über \mathbb{Z} mit \mathbb{Q} . Daher bewirkt eine direkte Summe aus Spechtmoduln S^λ mit $\lambda \vdash n$ über \mathbb{Z} , in der jeder Spechtmodul nur einmal auftaucht, eine \mathbb{Q} -vielfachheitsfreie Darstellung von S_n auf dieser direkten Summe.

Auf Basis dieser Überlegungen liegt es nahe, Erweiterungen von Spechtmoduln über \mathbb{Z} mit den zugehörigen symmetrischen Gruppen zu untersuchen. Deren Äquivalenzklassen werden gemäß dem Hauptsatz der Erweiterungstheorie klassifiziert durch die Elemente der zweiten Kohomologiegruppen von S_n mit Werten im jeweiligen Spechtmodul. Und eben mit deren Bestimmung befasst sich die vorliegende Arbeit.

Das erste Kapitel beleuchtet den benötigten mathematischen Hintergrund. Wir beginnen mit einem Abschnitt über verschiedene Grundbegriffe und grundlegende Aussagen aus der Darstellungstheorie von Gruppen, um dann im zweiten Abschnitt speziell die Darstellungstheorie von symmetrischen Gruppen ins Auge zu fassen. Hier werden Konstruktion und Eigenschaften von Spechtmoduln erläutert. Zentraler Punkt hierbei ist eine Version der Branching Rules für Spechtmoduln über beliebigen Integritätsbereichen.

Es folgt in Vorbereitung auf den Begriff der Fox-Derivationen und das Zassenhaus-Verfahren ein kurzer Abschnitt über endlich präsentierte Gruppen. Der vierte Abschnitt liefert Grundlagen aus der homologischen Algebra und erklärt die Interpretation von ersten und zweiten Kohomologiegruppen als Faktorgruppen von Derivationen beziehungsweise Faktorensystemen. Und schließlich stellt der letzte Abschnitt des ersten Kapitels das eben erwähnte Verfahren nach Zassenhaus vor, das die Berechnung von Kohomologiegruppen der Form $H^1(G, \mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k)$ ermöglicht.

Das zweite Kapitel erläutert zunächst die GAP-Implementierung der Bestimmung des Isomorphietyps von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$ unter Verwendung des Zassenhaus-Verfahrens. Hierbei konnte ich aufbauen auf die Diplomarbeit von Dr. Reinhard Waldmüller (siehe [Wa02]). Er hat das Zassenhaus-Verfahren für beliebige Gruppen mit beliebigen Präsentationen programmiert. In der vorliegenden Situation lässt sich die Berechnung allerdings wesentlich beschleunigen durch den Umstand, dass wir hier ausschließlich symmetrische Gruppen betrachten und so zusätzliche Informationen mit verarbeiten können.

Auf der Basis der so erhaltenen Ergebnisse werden dann einige theoretische Aussagen über die gesuchten Kohomologiegruppen hergeleitet. Darüber hinaus gibt eine Beobachtung der berechneten Daten Anlass zu diversen Vermutungen, deren Beweis mir bis dato leider nicht gelungen ist. Auf eine Vorstellung dieser Vermutungen möchte ich dennoch nicht verzichten.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Professor Hiß, der mir dieses reizvolle Thema zur Bearbeitung anbot und dessen wertvolle Hinweise meine Überlegungen immer wieder auf den rechten Pfad zurück lenkten. Insbesondere danke ich ihm für die entscheidenden Ratschläge für den Beweis von Lemma (2.3.1).

Ich danke weiterhin allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D, die mit hilfreichen Anregungen zum Gelingen dieser Diplomarbeit beitrugen. Besonders wichtig war für mich der Literaturhinweis von Dr. Matthias Künzer auf Kapitel 17 von [Ja78] für den Beweis der verallgemeinerten Branching Rule (1.2.31 (b)). Und nicht zuletzt möchte ich Dr. Frank Lübeck nennen, der jederzeit ein offenes Ohr für meine Fragen und Probleme hatte und dessen Kenntnisse in GAP mir von unschätzbarem Wert waren.

Kapitel 1

Grundlagen

Wir verwenden folgende notationelle Konventionen:

- Die Menge der positiven ganzen Zahlen wird mit \mathbb{N} bezeichnet, und es ist $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Die symmetrische Gruppe auf einer endlichen Menge X wird mit S_X bezeichnet. Für $Y \subseteq X$ identifizieren wir S_Y mit dem Stabilisator von Y in X . Die symmetrische Gruppe auf n Punkten wird mit $S_n := S_X$ für $n \in \mathbb{N}$ und $X := \{1, \dots, n\}$ bezeichnet. Dementsprechend fassen wir S_n als Untergruppe von S_{n+1} auf.
- Abbildungen und Gruppenoperationen werden von links geschrieben, sofern nichts anderes gefordert wird. Moduln sind damit bis auf wenige gekennzeichnete Ausnahmen immer Links-Moduln.

1.1 Darstellungen von Gruppen

Im Folgenden sei immer G eine Gruppe (multiplikativ geschrieben), R ein Integritätsbereich und V ein endlich erzeugter freier R -Modul vom Rang n .

1.1.1 Definition und Bemerkung

Eine **Darstellung von G auf V** ist ein Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$. In diesem Fall operiert G auf V via $gv := (\varphi(g))(v)$ für alle $g \in G, v \in V$.

Nach Wahl einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V erhalten wir als **Matrixdarstellung von G vom Grad n über R** den Homomorphismus $\tilde{\varphi} : G \rightarrow GL_n(R), g \mapsto M_{\varphi(g)}$. Hierbei bezeichnet $M_{\varphi(g)}$ die Abbildungsmatrix vom Automorphismus $\varphi(g)$ zur gewählten Basis. In diesem Fall operiert G auf R^n via $gv := (\tilde{\varphi}(g)) \cdot v$ für alle $g \in G, v \in R^n$.

1.1.2 Definition

Es sei $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$ eine Darstellung von G auf V .

- (a) Ein R -Untermodul $W \leq V$ heißt **G -invariant**, wenn $gW \leq W$ für alle $g \in G$.
- (b) Es sei R ein Körper. Dann heißt φ **reduzibel**, wenn V gleich $\{0\}$ ist oder einen echten, nichttrivialen, G -invarianten Unterraum besitzt, ansonsten **irreduzibel**.

1.1.3 Definition

- (a) Die **Gruppenalgebra von G über R** (Bezeichnung: RG) ist der freie Modul über R mit Basis G und Multiplikation:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \left(\sum_{g \in G} b_g g\right) = \sum_{g \in G} c_g g \quad \text{mit } c_g := \sum_{\substack{h, k \in G, \\ hk=g}} a_h b_k \quad \text{für alle } a_g, b_g \in R, g \in G.$$

- (b) Ein RG -Modul, der als R -Modul endlich erzeugt und frei ist, heißt **RG -Gitter**.

1.1.4 Bemerkung

Jede Darstellung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$ lässt sich linear zu einer Darstellung $\varphi' : RG \rightarrow \text{End}_R(V)$ fortsetzen:

$$\varphi' \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) := \sum_{g \in G} a_g \varphi(g).$$

Damit wird V via φ' zu einem RG -Gitter: $av := (\varphi'(a))(v)$ für alle $a \in RG, v \in V$. Analog kann man eine zu φ gehörige Matrixdarstellung fortsetzen zu einer Matrixdarstellung $\tilde{\varphi}' : RG \rightarrow R^{n \times n}, a \mapsto M_{\varphi'(a)}$ für alle $a \in RG$. Hierbei bezeichnet $M_{\varphi'(a)}$ die Abbildungsmatrix vom Endomorphismus $\varphi'(a)$ zur gewählten Basis. Damit wird R^n via $\tilde{\varphi}'$ zu einem RG -Gitter.

1.1.5 Bemerkung

Es sei V ein RG -Gitter und $W \leq V$ ein G -invarianter R -Untermodul. Dann induziert die Operation von G auf V eine Operation von G auf V/W via $g(v+W) := (gv) + W$ für alle $g \in G, v \in V$. Dadurch wird V/W zum RG -Modul.

Insbesondere induziert eine Operation von G auf \mathbb{Z}^n eine Operation auf $\mathbb{F}_p^n \cong \mathbb{Z}^n/p\mathbb{Z}^n$ für jede Primzahl p .

Des Weiteren induziert eine Operation von G auf \mathbb{Z}^n eine Operation auf \mathbb{Q}^n via $gv := (\tilde{\varphi}'(g))v$ für alle $g \in G, v \in \mathbb{Q}^n$. Mit obiger Aussage erhalten wir außerdem eine Operation auf $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$.

1.1.6 Definition und Bemerkung

- (a) Ein Modul heißt **einfach**, wenn er ungleich $\{0\}$ ist und keinen echten, nichttrivialen Untermodul besitzt. Er heißt **halbeinfach**, wenn er eine direkte Summe aus einfachen Untermoduln ist.

- (b) Es sei $W \leq V$ ein R -Untermodul des RG -Moduls V . Dann sind äquivalent:

- W ist G -invariant.
- W ist RG -invariant.
- W ist ein RG -Untermodul von V .

Wenn also R ein Körper, dann ist die zu V gehörige Darstellung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$ genau dann irreduzibel, wenn V ein einfacher RG -Modul ist.

1.1.7 Lemma und Definition

Es sei W ein R -Untermodul von V . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Der Faktormodul V/W ist torsionsfrei.
- (b) Falls $av \in W$ ist für ein $0 \neq a \in R$ und ein $v \in V$, so ist $v \in W$.

In diesem Fall heißt W **rein**. Ein reiner RG -Untermodul ist ein G -invarianter reiner R -Untermodul.

Falls eine R -Basis von W existiert, die sich zu einer R -Basis von V ergänzen lässt, so ist W rein.

Beweis:

Der Faktormodul V/W ist genau dann torsionsfrei, wenn gilt: $a(v + W) \neq 0 + W$ für alle $0 \neq a \in R, v \in V \setminus W$. Dies ist äquivalent zu: $av \notin W$ für alle $0 \neq a \in R, v \in V \setminus W$.

Nun sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine R -Basis von V , so dass $\{v_1, \dots, v_m\}$ für ein $m \leq n$ eine R -Basis von W ist. Für $0 \neq a \in R$ und $v := \sum_{i=1}^n b_i v_i$ ist av genau dann in W , wenn alle $b_i = 0$ sind für $m + 1 \leq i \leq n$. \square

Im Folgenden sei immer $H \leq G$ eine Untergruppe von G .

1.1.8 Definition

Es sei V ein RG -Modul und W ein RH -Modul.

- (a) V wird durch die eingeschränkte Operation zum RH -Modul. In diesem Fall bezeichnet man $V :=: V \downarrow_H^G$ als den **auf H eingeschränkten Modul**.
- (b) RG kann man auf natürliche Weise als RG - RH -Bimodul auffassen. Dann hat $W \uparrow_H^G := RG \otimes_{RH} W$ eine eindeutige Struktur als RG -Modul via $a(g \otimes w) := (ag) \otimes w$ für alle $a, g \in RG, w \in W$. Man bezeichnet $W \uparrow_H^G$ als den **zu G induzierten Modul**.

1.1.9 Lemma

Es sei G endlich und $\{g_1, \dots, g_m\}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H in G . Weiter sei W ein RH -Gitter mit R -Basis $\{w_1, \dots, w_n\}$. Dann ist $\{g_j \otimes w_i \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ eine R -Basis von $W \uparrow_H^G$.

Beweis:

Es ist $RG \cong \bigoplus_{j=1}^m g_j RH$ als RH -Rechts-Modul. Also ist RG ein freier RH -Rechts-Modul mit RH -Basis $\{g_1, \dots, g_m\}$. Mit der Distributivität des Tensorproduktes gilt:

$$W \uparrow_H^G = RG \otimes_{RH} W \cong \bigoplus_{j=1}^m (g_j RH \otimes_{RH} W) = \bigoplus_{j=1}^m g_j (1 \otimes_{RH} W).$$

Damit ist $W \uparrow_H^G$ ein freier R -Modul mit Basis wie behauptet (siehe auch [CR81], S. 228/229). \square

1.1.10 Lemma

Es sei R' ein Integritätsbereich mit $R \leq R'$, G sei endlich und W ein RH -Gitter. Dann sind $R' \otimes_R (W \uparrow_H^G) \cong (R' \otimes_R W) \uparrow_H^G$ als $R'G$ -Moduln.

Beweis:

Es sei $\{g_1, \dots, g_m\}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H in G und $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine R -Basis von W . Dann gilt:

$$\begin{aligned} R' \otimes_R (W \uparrow_H^G) &= \langle r' \otimes (g_j \otimes w_i) \mid r' \in R', 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n \rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \langle 1 \otimes (g_j \otimes w_i) \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n \rangle_{R'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R' \otimes_R W) \uparrow_H^G &= \langle g_j \otimes (r' \otimes w_i) \mid r' \in R', 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n \rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \langle g_j \otimes (1 \otimes w_i) \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n \rangle_{R'} \end{aligned}$$

Bei den angegebenen R' -Erzeugermengen handelt es sich um R' -Basen. Der so erhaltene R' -Modul-Isomorphismus $1 \otimes (g_j \otimes w_i) \mapsto g_j \otimes (1 \otimes w_i)$ respektiert die Operation von G . Damit folgt die Behauptung. \square

Die folgenden Aussagen benötigen wir später für den Beweis der Branching Rule für Spechtmoduln über einem Körper der Charakteristik 0. Im Folgenden sei R ein Körper; zur Verdeutlichung schreiben wir daher $K := R$.

1.1.11 Satz von Maschke

Es sei G endlich mit $\text{char}(K) \nmid |G|$. Dann ist jeder KG -Modul halbeinfach. (Insbesondere ist KG selbst halbeinfach.)

Beweis:

Siehe [CR81], (3.14). \square

1.1.12 Definition und Bemerkung

Es seien V und W zwei KG -Moduln. Dann ist $\text{Hom}_{KG}(V, W)$ ein K -Vektorraum, und $i(V, W) := \dim_K(\text{Hom}_{KG}(V, W))$ ist die sogenannte **intertwining number** von V und W . Sie besitzt folgende Eigenschaften:

- (a) Falls $V = V_1 \oplus V_2$, dann ist $i(V, W) = i(V_1, W) + i(V_2, W)$.
- (b) Falls KG halbeinfach ist, dann ist $i(V, W) = i(W, V)$.

Beweis:

Siehe [CR62], (43.11). \square

1.1.13 Satz (Lemma von Schur)

Es sei K algebraisch abgeschlossen, und V und W seien zwei einfache KG -Moduln. Dann ist $\text{Hom}_{KG}(V, W) = 0$, falls V und W nicht isomorph sind, und es ist $\text{Hom}_{KG}(V, V) = \langle \text{id}_V \rangle_K$.

Beweis:

Siehe [CR62], (27.3). \square

1.1.14 Lemma

Es sei K algebraisch abgeschlossen, V sei ein halbeinfacher und W ein einfacher KG -Modul. Dann ist $i(V, W)$ die Anzahl der direkten Summanden einer festen direkten Summenzerlegung von V , die isomorph zu W sind.

Beweis:

Es sei $V := \bigoplus_{j=1}^l V_j$ mit einfachen V_j . Mit (1.1.12 (a)) ist $i(V, W) = \sum_{j=1}^l i(V_j, W)$. Die Behauptung folgt damit aus dem Lemma von Schur. \square

1.1.15 Satz (Frobenius-Reziprozität)

Es sei G endlich, V ein KG -Modul und W ein KH -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{KH}(W, V \downarrow_H^G) \cong \text{Hom}_{KG}(W \uparrow_H^G, V)$.

Beweis:

Die folgende Abbildung definiert einen K -Vektorraum-Isomorphismus (siehe [AB95], S. 165):

$$f : \text{Hom}_{KH}(W, V \downarrow_H^G) \longrightarrow \text{Hom}_{KG}(W \uparrow_H^G, V), \quad \phi \mapsto [f(\phi) : W \uparrow_H^G \rightarrow V, g \otimes w \mapsto g \cdot \phi(w)].$$

\square

Bemerkung:

Die Aussage gilt auch allgemeiner über einem kommutativen Ring statt über einem Körper (siehe [CR81] (8.10)).

1.1.16 Folgerung

Es sei G endlich und K algebraisch abgeschlossen mit $\text{char}(K) \nmid |G|$. Weiter seien V ein einfacher KG -Modul und W ein einfacher KH -Modul. Dann ist V ebenso oft als direkter Summand in $W \uparrow_H^G$ enthalten wie W als direkter Summand in $V \downarrow_H^G$ enthalten ist.

Beweis:

Mit dem Satz von Maschke (1.1.11) ist KH halbeinfach. Daher gilt mit (1.1.12 (b)) und der Frobenius-Reziprozität: $i(V \downarrow_H^G, W) = i(W \uparrow_H^G, V)$.

Da nach dem Satz von Maschke auch $V \downarrow_H^G$ und $W \uparrow_H^G$ halbeinfach sind, und da außerdem K algebraisch abgeschlossen ist, ist (1.1.14) anwendbar, und es folgt die Behauptung. \square

1.2 Spechtmoduln

In vielen Anwendungen werden Spechtmoduln nur über Körpern betrachtet. Das Konzept ist aber viel mächtiger: Man kann sie auf die gleiche Weise über jedem beliebigen Integritätsbereich konstruieren. Für die vorliegende Arbeit sind speziell die Spechtmoduln über den ganzen Zahlen von Interesse.

Viele Aussagen zu Spechtmoduln über Körpern gelten genau so für Spechtmoduln über beliebigen Integritätsbereichen, andere wiederum nicht. Dies verkompliziert die allgemeinere Betrachtungsweise oft erheblich. Ein Beispiel sind die sogenannten Branching Rules (1.2.28). Der Beweis ihrer Verallgemeinerung für Integritätsbereiche (1.2.31) erfordert erheblichen Mehraufwand, auf den wir hier leider nicht verzichten können.

Im Folgenden seien $n, \tilde{n}, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_0$.

1.2.1 Definition

- (a) Eine **verallgemeinerte Partition von \tilde{n}** ist eine Folge $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\tilde{m}})$ mit $\Lambda_i \in \mathbb{N}_0$ für alle $1 \leq i \leq \tilde{m}$ und $\sum_{i=1}^{\tilde{m}} \Lambda_i = \tilde{n}$. In diesem Fall schreiben wir: $\Lambda \models \tilde{n}$. Des Weiteren sei $\tilde{m}' := \max\{\Lambda_i \mid 1 \leq i \leq \tilde{m}\}$.
Notation: Falls $\Lambda_i = \Lambda_{i+1} = \dots = \Lambda_{i+j-1}$ für ein i und ein $j \in \mathbb{N}$, so kann man dafür in der Partition abkürzend Λ_i^j schreiben, zum Beispiel $(3, 0^3, 2^2) := (3, 0, 0, 0, 2, 2)$.
- (b) Eine (**echte**) **Partition von n** ist eine verallgemeinerte Partition $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \models n$ mit der zusätzlichen Bedingung, dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$. In diesem Fall schreiben wir $\lambda \vdash n$. Hier ist $m' = \max\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq m\} = \lambda_1$.
 Des Weiteren sind hier alle $\lambda_i \in \mathbb{N}$. Damit ist die leere Folge \emptyset (mit $m = 0$) die einzige echte Partition der 0.
- (c) Für $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\tilde{m}}) \models \tilde{n}$ sei $\Lambda' := (\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{\tilde{m}'}) \models \tilde{n}$ definiert durch $\Lambda'_j := |\{i \in \{1, \dots, \tilde{m}\} \mid \Lambda_i \geq j\}|$ für alle $1 \leq j \leq \tilde{m}'$.
 Für eine echte Partition λ ist $(\lambda')' = \lambda$. Für verallgemeinerte Partitionen gilt das nicht, da Λ' immer eine echte Partition ist (siehe auch die Bemerkung in 1.2.2 (a)). Daher bilden wir Λ' meist nur für echte Partitionen. In diesem Fall sprechen wir von einer **konjugierten Partition**.
- (d) Ein **Paar von Partitionen** ist ein Tupel (λ, Λ) mit $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ und $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\tilde{m}}) \models \tilde{n}$, wobei $n \leq \tilde{n}$ und $m \leq \tilde{m}$ ist und außerdem gilt: $\lambda_i \leq \Lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.
 Insbesondere definiert (λ, λ) ein Paar von Partitionen.

Im Folgenden seien immer $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\tilde{m}}) \models \tilde{n}$ eine verallgemeinerte Partition und $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ eine echte Partition. Aussagen über Λ gelten damit insbesondere auch für λ . Wenn λ und Λ gemeinsam auftreten, seien sie so gewählt, dass (λ, Λ) ein Paar von Partitionen ist.

1.2.2 Definition

- (a) Ein **Young-Diagramm** $[\Lambda]$ ist eine linksbündige Anordnung von \tilde{n} Knoten in \tilde{m} Zeilen, so dass für $1 \leq i \leq \tilde{m}$ die i -te Zeile jeweils Λ_i Knoten enthält.

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \end{array}$$

Beispiel: $[(3, 1, 2)] =$

Bemerkung: Bei einer echten Partition λ erhält man das Young-Diagramm $[\lambda']$ zur konjugierten Partition, indem man bei $[\lambda]$ Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.

- (b) Ein Young-Diagramm $[(\lambda, \Lambda)]$ zu einem Paar von Partitionen (λ, Λ) erhält man aus $[\Lambda]$ durch Einrahmen der zu $[\lambda]$ gehörigen Knoten.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\times} & \boxed{\times} & \times \\ \boxed{\times} & & \\ \boxed{\times} & & \end{array}$$

Beispiel: $[(2, 1, 1), (3, 1, 2)] =$

1.2.3 Definition

- (a) Trägt man die Zahlen von 1 bis \tilde{n} in beliebiger Reihenfolge in ein Young-Diagramm $[\Lambda]$ ein, so erhält man ein sogenanntes Λ -**Tableau** (oder einfach **Tableau**). Mit $T(\Lambda)$ sei die Menge aller Λ -Tableaus bezeichnet.

Notation: $\begin{array}{ccc} & 4 & 1 & 3 \\ 6 & & & \\ & 5 & & 2 \end{array}$ ist zum Beispiel ein Tableau zu $(3, 1, 2) \models 6$.

- (b) Es sei $t \in T(\Lambda)$.
- (i) Für $1 \leq i \leq \tilde{m}$ sei $h_i(t) := \{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \mid k \text{ steht in der } i\text{-ten Zeile von } t\}$ die Menge der Einträge der i -ten Zeile von t .
 - (ii) Für $1 \leq j \leq \tilde{m}'$ sei $v_j(t) := \{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \mid k \text{ steht in der } j\text{-ten Spalte von } t\}$ die Menge der Einträge der j -ten Spalte von t .
- (c) Ein (λ, Λ) -Tableau ist ein Λ -Tableau, bei dem wir unterscheiden zwischen Einträgen **innerhalb** und **außerhalb** von $[\lambda]$. Deren Definition ergibt sich auf natürliche Weise aus (a) und (1.2.2(b)). Die Menge der (λ, Λ) -Tableaus sei mit $T(\lambda, \Lambda)$ bezeichnet. Wir können jedes (λ, Λ) -Tableau als Λ -Tableau auffassen, in dem wir die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Einträgen ignorieren.

1.2.4 Bemerkung und Definition

$S_{\tilde{n}}$ operiert auf der Menge $T(\Lambda)$: Für $\pi \in S_{\tilde{n}}$ und $t \in T(\Lambda)$ sei πt dasjenige Λ -Tableau, in dem jeder Eintrag k durch πk ersetzt wurde. Diese Operation ist transitiv. Auf $T(\lambda, \Lambda)$ operiert $S_{\tilde{n}}$ genau so; die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Tableau-Einträgen spielt dabei keine Rolle.

Damit lassen sich folgende Untergruppen von $S_{\tilde{n}}$ definieren:

- (a) Der **Zeilenstabilisator** von $t \in T(\Lambda)$ sei definiert durch

$$Stab_h(t) := \{ \pi \in S_{\tilde{n}} \mid k \in h_i(t) \Leftrightarrow \pi k \in h_i(t) \quad \forall 1 \leq k \leq \tilde{n}, 1 \leq i \leq \tilde{m} \}.$$

Es ist $Stab_h(t) \cong S_{\Lambda_1} \times \dots \times S_{\Lambda_m}$. Falls die Einträge von t zeilenweise gelesen von 1 bis \tilde{n} geordnet sind, so heißt $Stab_h(t)$ auch die zu Λ gehörige **Young-Untergruppe** von $S_{\tilde{n}}$.

- (b) Der **Spaltenstabilisator** von $t \in T(\Lambda)$ sei definiert durch

$$Stab_v(t) := \{ \pi \in S_{\tilde{n}} \mid k \in v_j(t) \Leftrightarrow \pi k \in v_j(t) \quad \forall 1 \leq k \leq \tilde{n}, 1 \leq j \leq \tilde{m}' \}.$$

Es ist $Stab_v(t) \cong S_{\Lambda'_1} \times \dots \times S_{\Lambda'_{\tilde{m}'}}$.

- (c) Für $t \in T(\lambda, \Lambda)$ definieren wir den **eingeschränkten Spaltenstabilisator** durch

$$Stab_v^\lambda(t) := Stab_v(t) \cap \{ \pi \in S_{\tilde{n}} \mid \pi k = k \text{ für } k \text{ außerhalb } [\lambda] \}.$$

Hierbei ist $Stab_v(t)$ der Spaltenstabilisator, den wir erhalten, wenn wir t als Λ -Tableau auffassen.

1.2.5 Definition und Bemerkung

(a) Die Relation $\sim_\Lambda \in T(\Lambda) \times T(\Lambda)$ sei definiert durch $t \sim_\Lambda t'$ genau dann, wenn $Stab_h(t) = Stab_h(t')$ ist, also wenn $h_i(t) = h_i(t')$ ist für alle $1 \leq i \leq \tilde{m}$. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation.

(b) Eine Äquivalenzklasse $[t]$ bezüglich \sim_Λ heißt Λ -**Tabloid** (oder einfach **Tabloid**).

Notation: Im Vergleich zur Tableau-Schreibweise werden die Zeilen durch Linien voneinander getrennt und die Einträge jeder Zeile aufsteigend sortiert. Zum Beispiel

$$\text{schreiben wir für das zu } t := \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \\ 6 & & \\ 5 & 2 & \end{array} \text{ gehörige Tabloid } [t] := \frac{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ \hline 6 \\ \hline 2 & 5 \end{array}}{\hline}.$$

Die Menge aller Λ -Tabloide sei mit $\bar{T}(\Lambda)$ bezeichnet.

(c) Wir bezeichnen \sim_Λ -Äquivalenzklassen von (λ, Λ) -Tableaus als (λ, Λ) -Tabloide. (Eine Unterscheidung zwischen Einträgen innerhalb und außerhalb von $[\lambda]$ ist bei Tabloiden natürlich nicht sinnvoll. Die Bezeichnung als (λ, Λ) -Tabloid beschreibt also weniger eine Eigenschaft der Äquivalenzklasse als vielmehr eine Eigenschaft ihrer Elemente.) Die Menge aller (λ, Λ) -Tabloide sei mit $\bar{T}(\lambda, \Lambda)$ bezeichnet.

$S_{\tilde{n}}$ operiert auf $\bar{T}(\Lambda)$ durch $\pi[t] := [\pi t]$ für alle $\pi \in S_{\tilde{n}}, t \in T(\Lambda)$. Auch diese Operation ist transitiv.

Im Folgenden sei R ein Integritätsbereich.

1.2.6 Definition und Bemerkung

Der **Permutationsmodul** $M^\Lambda := M_R^\Lambda$ zur verallgemeinerten Partition Λ ist der freie R -Modul auf der Menge der Λ -Tabloide. M^Λ hat den Rang:

$$\frac{\tilde{n}!}{\prod_{i=1}^{\tilde{m}} (\Lambda_i!)}$$

Setzt man die Operation aus (1.2.5) R -linear auf M^Λ fort, so erhält man eine Darstellung von $RS_{\tilde{n}}$ auf M^Λ . Auf diese Weise wird M^Λ zu einem zyklischen $RS_{\tilde{n}}$ -Modul, der von jedem beliebigen Λ -Tabloid erzeugt wird.

Beweis:

Es ist $|T(\Lambda)| = \tilde{n}!$. Zwei Tableaus $t, t' \in T(\Lambda)$ sind genau dann äquivalent bezüglich \sim_Λ , wenn ein $\sigma \in Stab_h(t)$ existiert mit $\sigma t = t'$. Dieses σ ist per Definition der Operation eindeutig bestimmt. Daher gilt mit (1.2.4(a)) für alle $t \in T(\Lambda)$:

$$|[t]| = |Stab_h(t)| = \prod_{i=1}^{\tilde{m}} (\Lambda_i!).$$

Daraus folgt:

$$\text{Rang}_R(M^\Lambda) = |\bar{T}(\Lambda)| = \frac{\tilde{n}!}{\prod_{i=1}^{\tilde{m}} (\Lambda_i!).}$$

Da $S_{\tilde{n}}$ transitiv auf $\bar{T}(\Lambda)$ operiert, ist M^Λ ein zyklischer $RS_{\tilde{n}}$ -Modul wie behauptet. \square

1.2.7 Definition

Es sei $t \in T(\lambda, \Lambda)$.

- (a) Es sei $\kappa_t^\lambda := \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi)\pi \in RS_{\tilde{n}}$.
Falls $\lambda = \Lambda$ ist, schreiben wir $\kappa_t := \kappa_t^\lambda = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t)} \text{sgn}(\pi)\pi \in RS_n$ und nennen dieses Element **signierte Spaltensumme** von t .
- (b) Ein Element der Form $e_t^\lambda := \kappa_t^\lambda[t] \in M^\Lambda$ heißt **(λ, Λ) -Polytabloid** (oder einfach **Polytabloid**).
Falls $\lambda = \Lambda$ ist, schreiben wir $e_t := e_t^\lambda = \kappa_t[t] \in M^\lambda$ und nennen dieses Element **λ -Polytabloid**.
Bemerkung: Die Gestalt des Polytabloids e_t^λ wird nicht nur durch das Tabloid $[t]$, sondern auch durch das Tableau t bestimmt, da in κ_t^λ dessen eingeschränkter Spaltenstabilisator verwendet wird.

1.2.8 Definition und Bemerkung

Den von den Elementen e_t^λ mit $t \in T(\lambda, \Lambda)$ erzeugten $RS_{\tilde{n}}$ -Untermodul von M_R^Λ bezeichnen wir mit $S^{(\lambda, \Lambda)} := S_R^{(\lambda, \Lambda)}$. Es ist $S^{(\emptyset, \Lambda)} = M^\Lambda$ und insbesondere $S^{(\emptyset, \emptyset)} = 0$.

Falls $\lambda = \Lambda$ ist, dann heißt $S^\lambda := S_R^\lambda := S_R^{(\lambda, \lambda)} = \langle e_t | t \in T(\lambda) \rangle_{RS_n}$ der **Spechtmodul** über R zur Partition λ .

1.2.9 Lemma

- (a) Es sei $t \in T(\lambda, \Lambda)$ und $\sigma \in S_{\tilde{n}}$. Dann ist $\sigma e_t^\lambda = e_{\sigma t}^\lambda$.
- (b) Jeder Modul $S^{(\lambda, \Lambda)}$ (und damit insbesondere jeder Spechtmodul) ist zyklisch als RS_n -Modul und wird von jedem beliebigen (λ, Λ) -Polytabloid erzeugt.

Beweis:

- (a) Für $\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)$ ist $\sigma\pi\sigma^{-1} \in \text{Stab}_v^\lambda(\sigma t)$, denn es gilt für jede Spalte $v_j(t) = \{t_1, \dots, t_l\}$ von t :

$$\sigma\pi\sigma^{-1}\{\sigma t_1, \dots, \sigma t_l\} = \sigma\pi v_j(t) = \sigma v_j(t) = \{\sigma t_1, \dots, \sigma t_l\}.$$

Dabei wird jedes σt_i , das in σt außerhalb von $[\lambda]$ liegt, von $\sigma\pi\sigma^{-1}$ festgelassen, da in diesem Fall auch t_i in t außerhalb von $[\lambda]$ liegt und daher von π festgelassen wird. Damit ist die Abbildung $\text{Stab}_v^\lambda(t) \rightarrow \text{Stab}_v^\lambda(\sigma t), \pi \mapsto \sigma\pi\sigma^{-1}$ wohldefiniert und bijektiv, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma\kappa_t^\lambda\sigma^{-1} &= \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi)\sigma\pi\sigma^{-1} \\ &= \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\sigma\pi\sigma^{-1})\sigma\pi\sigma^{-1} = \sum_{\pi' \in \text{Stab}_v^\lambda(\sigma t)} \text{sgn}(\pi')\pi' = \kappa_{\sigma t}^\lambda. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\sigma e_t^\lambda = \sigma\kappa_t^\lambda[t] = \kappa_{\sigma t}^\lambda[\sigma t] = \kappa_{\sigma t}^\lambda[\sigma t] = e_{\sigma t}^\lambda.$$

- (b) Es sei $t_0 \in T(\lambda, \Lambda)$. Da $S_{\tilde{n}}$ transitiv auf $T(\lambda, \Lambda)$ operiert, existiert für jedes $t \in T(\lambda, \Lambda)$ ein $\sigma \in S_{\tilde{n}}$ mit $\sigma t_0 = t$. Mit (a) gilt dann $e_t^\lambda = \sigma e_{t_0}^\lambda \in \langle e_{t_0}^\lambda \rangle_{RS_n}$. \square

Eine R -Basis von $S^{(\lambda, \Lambda)}$ (also insbesondere von S^λ) kann unabhängig vom verwendeten Integritätsbereich angegeben werden. Bevor dies in (1.2.21) geschieht, benötigen wir zunächst den Begriff der Standard-Polytabloide, eine Totalordnung auf $\bar{T}(\lambda)$, das Konzept der Sequenzen sowie den Begriff der Garnir-Elemente.

1.2.10 Definition

- (a) Ein (λ, Λ) -Tableau, dessen Einträge innerhalb von $[\lambda]$ sowohl zeilenweise als auch spaltenweise aufsteigend geordnet sind, heißt **Standard-Tableau**. Die Menge aller Standard-Tableaus zu (λ, Λ) sei mit $ST(\lambda, \Lambda)$ bezeichnet. Falls $\lambda = \Lambda$ ist, schreiben wir $ST(\lambda) := ST(\lambda, \lambda)$.
- (b) Es sei t ein Standard-Tableau. Dann heißt $[t]$ **Standard-Tabloid**.
- (c) Es sei t ein Standard-Tableau. Dann heißt e_t^λ **Standard-Polytabloid**. Die Menge aller Standard-Polytabloide zu (λ, Λ) sei mit $SP(\lambda, \Lambda)$ bezeichnet. Falls $\lambda = \Lambda$ ist, schreiben wir $SP(\lambda) := SP(\lambda, \lambda)$.

1.2.11 Bemerkung

- (a) Falls $\lambda = \Lambda$ ist, enthält jedes Tabloid höchstens ein Standard-Tableau. Im Allgemeinen kann ein Standard- (λ, Λ) -Tabloid aber mehrere Standard-Tableaus enthalten.
- (b) Es sei $t \in ST(\lambda, \Lambda)$ und $1 \neq \sigma \in Stab_v^\lambda(t)$. Dann ist $\sigma t \notin ST(\lambda, \Lambda)$, und es gilt:

$$sgn(\sigma)e_{\sigma t}^\lambda = \sum_{\pi \in Stab_v^\lambda(t)} sgn(\sigma\pi)\pi\sigma[t] = e_t^\lambda \in SP(\lambda, \Lambda).$$

Das bedeutet, dass man auch mit manchen Nicht-Standard-Tableaus ein Standard-Polytabloid bilden kann.

1.2.12 Lemma

Auf $\bar{T}(\Lambda)$ wird eine Totalordnung definiert durch: $[t_1] < [t_2]$ genau dann, wenn ein i existiert mit:

- (a) Aus $i \in h_l(t_1)$ und $i \in h_{l'}(t_2)$ folgt $l < l'$.
- (b) Jeder Eintrag $j > i$ liegt in der gleichen Zeile von t_1 und t_2 .

Mit anderen Worten: Wir betrachten den größten Eintrag, der sich in unterschiedlichen Zeilen von t_1 und t_2 befindet. Ist der zugehörige Zeilenindex in t_1 kleiner als in t_2 , dann ist $[t_1] < [t_2]$. (Siehe auch [Ja78], Definition 3.10.)

Beweis:

Für $[t_1] \neq [t_2] \in \bar{T}(\Lambda)$ seien:

$$m_1 := \max\{i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \mid \text{aus } i \in h_l(t_1) \text{ und } i \in h_{l'}(t_2) \text{ folgt } l > l'\}$$

$$m_2 := \max\{i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \mid \text{aus } i \in h_l(t_1) \text{ und } i \in h_{l'}(t_2) \text{ folgt } l < l'\}$$

Dann ist $m_1 \neq m_2$, und alle $j > \max\{m_1, m_2\}$ liegen jeweils in der gleichen Zeile von t_1 und t_2 . Falls $m_1 < m_2$ ist, dann ist $[t_1] < [t_2]$ bezüglich $i := m_2$. Falls $m_2 < m_1$ ist, dann

ist $[t_2] < [t_1]$ bezüglich $i := m_1$. Das heißt, für zwei Tabloide $[t_1]$ und $[t_2]$ tritt immer genau einer der drei Fälle $[t_1] = [t_2]$, $[t_1] < [t_2]$ oder $[t_2] < [t_1]$ ein.

Die Relation ist auch transitiv, denn wenn $[t_1] < [t_2]$ bezüglich i und $[t_2] < [t_3]$ bezüglich j ist, dann ist $[t_1] < [t_3]$ bezüglich $\max\{i, j\}$. \square

1.2.13 Lemma

Eine Folge (v_1, \dots, v_l) von R -Linearkombinationen in M^Λ , bei denen die jeweils größten vorkommenden Tabloide alle verschieden sind, ist R -linear unabhängig.

Beweis:

Da die größten vorkommenden Tabloide alle verschieden sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass für alle $2 \leq j \leq l$ das größte Tabloid aus v_j größer ist als das größte aus v_{j-1} . Damit ist das größte Tabloid aus v_l größer als alle anderen vorkommenden Tabloide. Falls also $\sum_{j=1}^l a_j v_j = 0$ ist, muss $a_l = 0$ sein. Somit folgt die Behauptung per Induktion. \square

1.2.14 Bemerkung

- (a) Es sei $t \in ST(\lambda, \Lambda)$. Das größte Tabloid (mit einem Koeffizienten ungleich 0) in $e_t^\lambda \in SP(\lambda, \Lambda)$ als Linearkombination von Tabloiden ist $[t]$, denn:
Es sei $1 \neq \pi \in Stab_v^\lambda(t)$. Dann wird jeder Eintrag von t durch π entweder in eine andere Zeile getauscht oder festgelassen. Weiter sei i der größte Eintrag von t , der durch π in eine Zeile mit kleinerem Index getauscht wird. Da t ein Standard-Tableau ist, ist $\pi i < i$ und $\pi j = j$ für alle $j > i$. Damit ist $[\pi t] < [t]$ bezüglich i .
- (b) Die Abbildung $ST(\lambda) \rightarrow SP(\lambda), t \mapsto e_t$ ist eine Bijektion. Dies folgt aus (a) und (1.2.11(a)).
- (c) Auf $T(\Lambda)$ kann man analog zu Tabloiden eine Spaltenäquivalenz definieren. Die zugehörigen Äquivalenzklassen seien mit $[[t]]$ bezeichnet für $t \in T(\Lambda)$.
Auf diesen Äquivalenzklassen kann man analog zu (1.2.12) eine Totalordnung definieren: Es sei $[[t_1]] < [[t_2]]$, wenn der größte Eintrag in t_1 , der in einer anderen Spalte liegt als in t_2 , in einer Spalte mit kleinerem Index liegt.

1.2.15 Definition und Bemerkung

- (a) Eine **Sequenz vom Typ Λ** ist eine Folge der Länge \tilde{n} , die für alle $1 \leq i \leq \tilde{m}$ genau Λ_i -mal den Wert i enthält. Es existiert eine Bijektion zwischen $\bar{T}(\Lambda)$ und der Menge aller Sequenzen vom Typ Λ : $[t]$ wird abgebildet auf die Sequenz, deren j -ter Eintrag i ist für $j \in h_i(t)$.
- (b) Die Einträge einer Sequenz werden folgendermaßen bewertet:
- Jeder Eintrag 1 ist *gut*.
 - Ein Eintrag $i + 1$ ist *gut*, wenn die Anzahl der vorangegangenen guten i echt größer ist als die Anzahl der vorangegangenen guten $i + 1$. Ansonsten ist der Eintrag $i + 1$ *schlecht*.

Die Anzahl der guten i in einer Sequenz sei mit γ_i bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Bewertung kann man ein Tableau t' als Vertreter der Äquivalenzklasse $[t]$ konstruieren, indem man sukzessive die Zahlen von 1 bis \tilde{n} auf folgende Weise in das Young-Diagramm $[\Lambda]$ einfügt: Wenn der j -te Eintrag der Sequenz ein gutes i ist, wird j so weit links wie möglich in die i -te Zeile eingetragen; wenn der j -te Eintrag ein schlechtes i ist, wird j so weit rechts wie möglich in die i -te Zeile eingetragen. (Die Bedeutung dieses speziellen Vertreters wird in (1.2.16) verdeutlicht.)

- (c) Es sei $[t]$ ein (λ, Λ) -Tabloid. Wir nennen $[t]$ *gut*, wenn in der zugehörigen bewerteten Sequenz vom Typ Λ gilt, dass $\gamma_i \geq \lambda_i$ ist für alle $1 \leq i \leq m$. In diesem Fall bezeichnen wir auch den in (b) konstruierten Äquivalenzklassenvertreter t' als *gut*, ebenso das Polytabloid $e_{t'}^\lambda$. Alle anderen (λ, Λ) -Tableaus, -Tabloide und -Polytabloide heißen *schlecht*.

1.2.16 Lemma

Ein (λ, Λ) -Tabloid $[t]$ ist genau dann gut, wenn es ein Standard- (λ, Λ) -Tabloid ist. Damit enthält ein Standard- (λ, Λ) -Tabloid genau ein gutes (λ, Λ) -Tableau.

Beweis:

Wir können den Vertreter t' von $[t]$ aus (1.2.15 (b)) auch ohne die zugehörige bewertete Sequenz konstruieren, nämlich folgendermaßen:

Zunächst werden die Elemente der ersten Zeile aufsteigend geordnet. Dann werden die Zeilen $2 \leq i \leq \tilde{m}$ sukzessive auf die folgende Art sortiert: Die Einträge werden für die Positionen $j = 1$ bis γ_i sukzessive so gewählt, dass sie in der i -ten Zeile minimal mit der Eigenschaft sind, größer als der $(j - 1)$ -te Eintrag in der i -ten Zeile und als der j -te Eintrag in der $(i - 1)$ -ten Zeile zu sein. (Für $j = 1$ entfällt die erste Bedingung.) Für die Position $\gamma_i + 1$ ist kein Wert mehr übrig, der beide Bedingungen erfüllt. Die verbleibenden Einträge werden absteigend geordnet.

Durch die Minimalitätsbedingung erzeugt man auf diese Weise einen Vertreter von $[t]$, der den größtmöglichen zusammenhängenden Bereich enthält, in dem die Einträge zeilen- und spaltenweise aufsteigend geordnet sind. Daher enthält $[t]$ genau dann ein Standard- (λ, Λ) -Tableau, wenn $\gamma_i \geq \lambda_i$ ist für alle $1 \leq i \leq m$. □

1.2.17 Beispiel

Die Sequenzen vom Typ $\Lambda := (2, 3) \models 5$ entsprechen folgenden Tabloiden und Tableaus:

1	1	2	2	2	<u>1 2</u>	1	2	2	1	2	<u>2 4</u>	2	4				
+	+	+	+	-	<u>3 4 5</u>	3	4	5	-	+	+	+	+				
1	2	1	2	2	<u>1 3</u>	1	3	2	1	2	2	1	<u>2 5</u>	2	5		
+	+	+	+	-	<u>2 4 5</u>	2	4	5	-	+	+	-	+	<u>1 3 4</u>	3	4	1
1	2	2	1	2	<u>1 4</u>	1	4	2	2	1	1	2	<u>3 4</u>	3	4		
+	+	-	+	+	<u>2 3 5</u>	2	5	3	-	-	+	+	+	<u>1 2 5</u>	5	2	1
1	2	2	2	1	<u>1 5</u>	1	5	2	2	1	2	1	<u>3 5</u>	3	5		
+	+	-	-	+	<u>2 3 4</u>	2	4	3	-	-	+	+	+	<u>1 2 4</u>	4	2	1
2	1	1	2	2	<u>2 3</u>	2	3	2	2	2	1	1	<u>4 5</u>	4	5		
-	+	+	+	+	<u>1 4 5</u>	4	5	1	-	-	-	+	+	<u>1 2 3</u>	3	2	1

In den Sequenzen sind gute Einträge durch + und schlechte durch – markiert. Wenn wir die Tableaus als $((2^2), (2, 3))$ -Tableaus auffassen, dann sind die fettgedruckten Tableaus die guten. Darüber hinaus gibt es noch folgende Standard- $((2^2), (2, 3))$ -Tableaus:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 3 & 5 & 4 \end{array} & \in & \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & 5 \end{array}} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 4 & 5 & 3 \end{array} & \in & \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & 5 \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 4 & 5 & 2 \end{array} & \in & \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 2 & 4 & 5 \end{array}} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 \end{array} & \in & \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 2 & 4 & 5 \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 3 & 5 & 2 \end{array} & \in & \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 4 & \\ 2 & 3 & 5 \end{array}} \end{array}$$

1.2.18 Bemerkung

Es sei t ein Standard- (λ, Λ) -Tableau. Im obigen Beispiel wird noch einmal verdeutlicht, dass $[t]$ mehrere Standard-Tableaus enthalten kann, wie bereits in (1.2.11 (a)) erwähnt. Für alle $\bar{t} \in [t] \cap ST(\lambda, \Lambda)$ ist $e_{\bar{t}}^\lambda$ ein Standard-Polytabloid, in dem $[\bar{t}] = [t]$ das größte vorkommende Tabloid ist (siehe 1.2.14 (a)). Von diesen ist aber nur e_t^λ mit t' definiert wie in (1.2.15 (b)) ein gutes Polytabloid. Dies ist weiter unten in Satz (1.2.21) beim Übergang von Aussage (a) zu Aussage (b) zu beachten.

1.2.19 Definition

Es sei $t \in T(\Lambda)$ und $j < \tilde{m}'$. Weiter seien $\emptyset \neq X \subseteq v_j(t)$ und $\emptyset \neq Y \subseteq v_{j+1}(t)$. Durch $\{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ sei eine Menge von Nebenklassenvertretern von $S_X \times S_Y$ in $S_{X \cup Y}$ gegeben. Dann heißt $G_{X,Y} := \sum_{k=1}^l \text{sgn}(\sigma_k) \sigma_k \in RS_{\tilde{n}}$ ein **Garnir-Element**.

1.2.20 Lemma

Es seien $t \in T(\lambda, \Lambda)$, X, Y und $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ wie oben. Zusätzlich soll gelten, dass die Werte aus $X \cup Y$ in t innerhalb von $[\lambda]$ liegen und dass $|X \cup Y| > \lambda'_j$ ist. Dann ist $G_{X,Y} e_t^\lambda = 0$.

Beweis:

Wir verallgemeinern den Beweis aus [Ja78], Theorem 7.2, der dort für $t \in T(\lambda)$ geführt wird.

Zunächst betrachten wir den Fall $R = \mathbb{Z}$. Es sei $\Sigma_{X,Y} := \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \text{sgn}(\pi) \pi \in \mathbb{Z}S_{\tilde{n}}$. Nach Wahl von X und Y ist $S_X \times S_Y \subseteq \text{Stab}_v^\lambda(t)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_{X,Y} \kappa_t^\lambda &= \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \text{sgn}(\pi) \pi \sum_{\sigma \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \\ &= \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \sum_{\sigma \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi \sigma) \pi \sigma = \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \sum_{\sigma' \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\sigma') \sigma' = |X|! |Y|! \kappa_t^\lambda. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $\Sigma_{X \cup Y} := \sum_{\pi \in S_{X \cup Y}} \text{sgn}(\pi) \pi \in \mathbb{Z}S_{\tilde{n}}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{X \cup Y} &= \sum_{k=1}^l \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \text{sgn}(\sigma_k \pi) \sigma_k \pi \\ &= \sum_{k=1}^l \text{sgn}(\sigma_k) \sigma_k \sum_{\pi \in S_X \times S_Y} \text{sgn}(\pi) \pi = G_{X,Y} \Sigma_{X,Y}. \end{aligned}$$

Nun sei $\tau \in \text{Stab}_v^\lambda(t)$. Nach Wahl von X und Y liegen die Werte aus $X \cup Y$ auch in τt innerhalb von $[\lambda]$. Wegen $|X| + |Y| = |X \cup Y| > \lambda'_j$ können die Werte aus $X \cup Y$ in τt nicht alle in verschiedenen Zeilen liegen. Daher existieren zwei Einträge $k_1 \in X$ und $k_2 \in Y$, die in derselben Zeile von τt liegen. Daraus folgt mit $\sigma := (k_1, k_2) \in S_{X \cup Y} \cap \text{Stab}_h(\tau t)$:

$$\sum_{\pi \in S_{X \cup Y}} \text{sgn}(\pi) \pi[\tau t] = \sum_{\pi \in S_{X \cup Y}} \text{sgn}(\pi \sigma) \pi \sigma[\tau t] = - \sum_{\pi \in S_{X \cup Y}} \text{sgn}(\pi) \pi[\tau t].$$

Damit ist $\Sigma_{X \cup Y}[\tau t] = 0$. Insgesamt folgt also:

$$0 = \sum_{\tau \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\tau) \Sigma_{X \cup Y}[\tau t] = \Sigma_{X \cup Y} \kappa_t^\lambda[t] = G_{X,Y} \Sigma_{X,Y} \kappa_t^\lambda[t] = G_{X,Y} |X|! |Y|! e_t^\lambda.$$

Da wir $R = \mathbb{Z}$ vorausgesetzt haben, folgt daraus, dass $G_{X,Y} e_t^\lambda = 0$ ist. Wenn die Aussage aber über \mathbb{Z} gilt, gilt sie auch über jedem beliebigen Integritätsbereich. \square

Damit können wir nun eine R -Basis von $S^{(\lambda, \Lambda)}$ angeben.

1.2.21 Satz

- (a) $S^{(\lambda, \Lambda)} = \langle e_t^\lambda \mid t \in ST(\lambda, \Lambda) \rangle_R$
- (b) $S^{(\lambda, \Lambda)}$ ist ein $RS_{\tilde{n}}$ -Gitter mit R -Basis $\{e_t^\lambda \mid t \text{ ist gut}\}$.
- (c) S^λ ist ein RS_n -Gitter mit R -Basis $SP(\lambda)$.

Beweis:

- (a) Es ist zu zeigen, dass jedes Polytabloid e_t^λ als R -Linearkombination von Standard-Polytabloiden geschrieben werden kann. Wir verallgemeinern dazu den Beweis von [Ja78], Theorem 8.4, der dort nur für Spechtmoduln geführt wird.

Für jedes $t \in T(\Lambda)$ existiert ein $\pi_t \in \text{Stab}_v^\lambda(t)$, so dass die Einträge von $\pi_t t$ innerhalb von $[\lambda]$ spaltenweise aufsteigend geordnet sind. Dann ist $e_{\pi_t t}^\lambda = \text{sgn}(\pi_t) e_t^\lambda$ (siehe auch 1.2.11 (b)). Daher genügt es, diejenigen t zu betrachten, bei denen die Einträge von t innerhalb von $[\lambda]$ spaltenweise aufsteigend geordnet sind.

Wenn t ein Standard-Tableau ist, sind wir fertig. Wenn nicht, existieren nach Voraussetzung ein $1 \leq i \leq m$ und ein $1 \leq j \leq m' - 1$, so dass für $h_i(t) \cap v_j(t) := \{k_1\}$ und $h_i(t) \cap v_{j+1}(t) := \{k_2\}$ gilt, dass k_1 und k_2 innerhalb von $[\lambda]$ liegen und $k_1 > k_2$ ist. Wir setzen $X := \bigcup_{k=i}^m h_k(t) \cap v_j(t)$ und $Y := \bigcup_{k=1}^i h_k(t) \cap v_{j+1}(t)$. Da k_1 und k_2 innerhalb von $[\lambda]$ liegen, ist $|X \cup Y| = \lambda'_j + 1$. Daher ist (1.2.20) anwendbar:

$$0 = G_{X,Y} e_t^\lambda = \sum_{k=1}^l \text{sgn}(\sigma_k) \sigma_k e_t^\lambda = \sum_{k=1}^l \text{sgn}(\sigma_k) e_{\sigma_k t}^\lambda.$$

Wenn wir $\sigma_1 := 1$ wählen, erhalten wir daraus:

$$e_t^\lambda = - \sum_{k=2}^l \text{sgn}(\sigma_k) e_{\sigma_k t}^\lambda.$$

Jeder der Nebenklassenvertreter σ_k von $S_X \times S_Y$ in $S_{X \cup Y}$ außer σ_1 muss mindestens einen Eintrag aus der Spalte j in die Spalte $j+1$ tauschen. Da die Einträge in t nach Voraussetzung spaltenweise aufsteigend geordnet sind, und da $k_1 > k_2$ ist, befindet

sich der größte Eintrag von $\sigma_k t$, der in einer anderen Spalte liegt als in t , in einer Spalte mit höherem Index. Es ist also $[[\sigma_k t]] > [[t]]$ (siehe 1.2.14 (c)).

Somit können wir per Induktion annehmen, dass $e_{\sigma_k t}^\lambda$ bereits eine Linearkombination von Standard-Polytabloiden ist. Der Induktionsanfang liegt dabei bei der größten Spaltenäquivalenzklasse $[[t_0]]$: Mit der Argumentation wie beim Induktionsschluss kann sich e_t^λ für jedes $t \in [[t_0]]$ nur durch ein Vorzeichen von einem Standard-Polytabloid unterscheiden (vergleiche auch 1.2.11 (b)), denn sonst müsste noch eine größere Spaltenäquivalenzklasse existieren.

- (b) Mit (1.2.13), (1.2.14 (a)) und (1.2.16) folgt, dass die Menge der guten (λ, Λ) -Polytabloide R -linear unabhängig ist. Zu zeigen ist nun, dass jedes Element $x \in S^{(\lambda, \Lambda)}$ eine Linearkombination von guten Polytabloiden ist.

Wegen (a) kann man x als Linearkombination von Standard-Polytabloiden schreiben. Daher ist mit (1.2.14 (a)) das größte vorkommende Tabloid ein Standard-Tabloid. Nun sei $[t]$ dieses größte in x vorkommende Tabloid und $a_{[t]} \in R$ der zugehörige Koeffizient. Mit (1.2.16) enthält $[t]$ ein gutes t' . Da $[t'] = [t]$ auch das größte in $e_{t'}^\lambda$ vorkommende Tabloid ist, sind alle Tabloide in $x - a_{[t]} e_{t'}^\lambda \in S^{(\lambda, \Lambda)}$ kleiner als $[t]$. Damit folgt die Behauptung per Induktion. (Falls $[t]$ bereits das kleinste Standard-Tabloid ist, muss $x - a_{[t]} e_{t'}^\lambda = 0$ sein.)

(Zum Vergleich siehe auch [Ja78], Theorem 17.13. Dort wird die Aussage für Körper statt für beliebige Integritätsbereiche bewiesen.)

- (c) Falls $\lambda = \Lambda$ ist, entspricht $SP(\lambda)$ mit (1.2.11 (a)) und (1.2.16) genau den guten λ -Polytabloiden. Also folgt die Behauptung aus (b). \square

1.2.22 Bemerkung

Aus (1.2.21 (c)) ist ersichtlich, dass die Konstruktion eines Spechtmoduls unabhängig vom Integritätsbereich R ist. Das bedeutet insbesondere, dass der Rang von S^λ mit (1.2.21 (c)) und (1.2.14 (b)) immer gleich der Anzahl der Standard- λ -Tableaus ist. Diese ist genau dann gleich 1, wenn $\lambda \in \{(n), (1^n)\}$ ist. Im Allgemeinen kann sie mit der sogenannten Hakenformel (1.2.23) bestimmt werden.

Des Weiteren gilt für jeden Integritätsbereich R' mit $R \leq R'$:

$$R' \otimes_R S_R^\lambda = \langle r' \otimes v \mid r' \in R', v \in S_R^\lambda \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 1 \otimes e_t \mid t \in ST(\lambda) \rangle_{R'} \cong S_{R'}^\lambda.$$

1.2.23 Satz (Hakenformel)

Für einen Knoten x im Young-Diagramm $[\lambda]$ sei die Hakenlänge h_x definiert durch $h_x := |\{\text{Knoten rechts von } x\}| + |\{\text{Knoten unterhalb von } x\}| + 1$. Dann gilt:

$$|ST(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{x \in [\lambda]} h_x}.$$

Beweis:

Siehe [JK81], Theorem 2.3.21. \square

1.2.24 Beispiele für Spechtmoduln

- (a) $S^{(n)}$ ist der Spechtmodul zur trivialen Darstellung $\sigma \mapsto 1$ für $\sigma \in S_n$.
- (b) $S^{(1^n)}$ ist der Spechtmodul zur alternierenden Darstellung $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ für $\sigma \in S_n$.
- (c) $S^{(n-1,1)}$ ist vom Rang $k = n - 1$, und eine zugehörige Matrixdarstellung wird beschrieben durch:

$$(1, 2) \mapsto A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$(1, 2, \dots, n) \mapsto B := \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

oder durch: $(1, 2) \mapsto \Sigma_1 := A$,

$$(i, i+1) \mapsto \Sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n-1.$$

(Dabei steht der fettgedruckte Eintrag an der Position (i, i) .)

Beweis:

- (a) Zu $\lambda = (n)$ gibt es nur ein einziges Standard-Tableau t . Es ist $\text{Stab}_v(t) = \{1\}$ und $SP(\lambda) = \{e_t = \underline{1 \ 2 \ \cdots \ n}\}$. S_n operiert daher trivial auf S^λ .
- (b) Zu $\lambda = (1^n)$ gibt es wieder nur ein einziges Standard-Tableau t . Es ist $\text{Stab}_v(t) = S_n$ und $SP(\lambda) = \{e_t = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi[t]\}$. Für alle $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\sigma e_t = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\sigma^2 \pi) \sigma \pi[t] = \text{sgn}(\sigma) \sum_{\pi' \in S_n} \text{sgn}(\pi') \pi'[t] = \text{sgn}(\sigma) e_t.$$

- (c) Die Standard-Tableaus zu $\lambda = (n-1, 1)$ haben die Gestalt

$$t_i := \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & i & i+2 & \cdots & n \\ & & & i+1 & & & \end{array} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n-1.$$

Damit ist $Stab_v(t_i) = \{1, (1, i+1)\}$, und die Standard-Polytabloide sind gegeben durch:

$$e_i := [t_i] - (1, i+1)[t_i] = \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i \ i+2 \ \dots \ n}}{\underline{i+1}} - \frac{\overline{2 \ \dots \ n}}{\underline{1}}.$$

S_n operiert folgendermaßen auf den Standard-Polytabloiden:

- $(1, 2)e_1 = -e_1$
- $(1, 2)e_i = \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i \ i+2 \ \dots \ n}}{\underline{i+1}} - \frac{\overline{1 \ 3 \ \dots \ n}}{\underline{2}} = e_i - e_1$ für $i > 1$
- $(1, 2, \dots, n)e_{n-1} = -e_1$
- $(1, 2, \dots, n)e_i = \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i+1 \ i+3 \ \dots \ n}}{\underline{i+2}} - \frac{\overline{1 \ 3 \ \dots \ n}}{\underline{2}} = e_{i+1} - e_1$ für $i < n-1$
- Sei nun $2 \leq i \leq n-1$:
 - $(i, i+1)e_{i-1} = \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i \ i+2 \ \dots \ n}}{\underline{i+1}} - \frac{\overline{2 \ \dots \ n}}{\underline{1}} = e_i$
 - $(i, i+1)e_i = \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i-1 \ i+1 \ \dots \ n}}{\underline{i}} - \frac{\overline{2 \ \dots \ n}}{\underline{1}} = e_{i-1}$
 - $(i, i+1)e_j = e_j$ für $j \notin \{i-1, i\}$

Damit folgt die Behauptung. □

Für einen Körper K werden die einfachen KS_n -Moduln und damit die irreduziblen Darstellungen der S_n über K durch je einen der beiden folgenden Fälle beschrieben:

1.2.25 Satz

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Dann sind die Spechtmoduln S_K^λ zu allen Partitionen $\lambda \vdash n$ einfache KS_n -Moduln, und jede Isomorphieklasse von einfachen KS_n -Moduln enthält genau einen Spechtmodul.

Beweis:

Siehe [Ja78], Theorem 4.12. □

1.2.26 Definition und Satz

Es sei p eine Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p .

- (a) Eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ heißt **p -regulär**, wenn aus $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+l}$ folgt, dass $l < p$ ist.
Für p -reguläre Partitionen sei $D_K^\lambda := S_K^\lambda / (S_K^\lambda \cap S_K^{\lambda \perp})$.
- (b) Die Moduln D_K^λ zu allen p -regulären Partitionen $\lambda \vdash n$ sind einfache KS_n -Moduln, und jede Isomorphieklasse von einfachen KS_n -Moduln enthält genau einen solchen Modul D_K^λ .

Beweis:

Siehe [Ja78], Theorem 11.5. □

Bemerkung:

Jede Partition ist „ ∞ -regulär“. Wählt man statt $\text{char}(K) = 0$ die Bezeichnung $\text{char}(K) = \infty$, so liefert die Erweiterung von (b) um den Fall $p = \infty$ die Aussage von Satz (1.2.25), denn in diesem Fall ist $S_K^\lambda \cap S_K^{\lambda^\perp} = 0$ (siehe [Ja78], Corollary 4.11).

Eine wichtige Eigenschaft von Spechtmoduln wird beschrieben durch die sogenannten Branching Rules.

1.2.27 Bezeichnungen

(a) Es sei $S^\lambda \downarrow := S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$ der auf S_{n-1} eingeschränkte Spechtmodul, und $S^\lambda \uparrow := S^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$ sei der zu S_{n+1} induzierte Spechtmodul.

(b) $\mathbb{I}_{\lambda^-} := \{1 \leq i \leq m \mid \lambda^{i^-} := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m) \vdash n - 1\}$
 $\mathbb{I}_{\lambda^+} := \{1 \leq i \leq m \mid \lambda^{i^+} := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m) \vdash n + 1\} \cup \{m + 1\}$

Bemerkung: Es ist $\lambda^{(m+1)^+} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 1) \vdash n + 1$ für alle $\lambda \vdash n$. Außerdem ist $m \in \mathbb{I}_{\lambda^-}$ und $1 \in \mathbb{I}_{\lambda^+}$ für alle $\lambda \vdash n$.

Weiter sei $\lambda^- := \{\lambda^{i^-} \mid i \in \mathbb{I}_{\lambda^-}\}$ und $\lambda^+ := \{\lambda^{i^+} \mid i \in \mathbb{I}_{\lambda^+}\}$.

(Diese etwas umständliche Beschreibung ist für (1.2.31) nützlich.)

1.2.28 Satz (Branching Rules)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Dann gilt:

(a) Es sind $S_K^\lambda \downarrow$ und $\bigoplus_{\mu \in \lambda^-} S_K^\mu$ isomorph als KS_{n-1} -Moduln.

(b) Es sind $S_K^\lambda \uparrow$ und $\bigoplus_{\mu \in \lambda^+} S_K^\mu$ isomorph als KS_{n+1} -Moduln.

Beweis:

Für einen Körper der Charakteristik 0 sind mit dem Satz von Maschke (1.1.11) alle KS_n -Moduln halbeinfach, und mit (1.2.25) sind die Spechtmoduln über K einfach. Daher folgen beide Aussagen aus der unten vorgestellten allgemeineren Variante (1.2.31). Allerdings kann man die Gültigkeit von (b) auch einfacher zeigen als mit dem recht aufwendigen Beweis von (1.2.31 (b)):

Es sei zunächst $K = \mathbb{C}$. Dann ist K algebraisch abgeschlossen, und die Frobenius-Reziprozität ist in Form von (1.1.16) anwendbar. Die Behauptung für \mathbb{C} folgt dann aus (a), denn für alle $\lambda \vdash n$ und alle $\mu \vdash n + 1$ gilt:

$$i(S^\lambda \uparrow, S^\mu) = i(S^\mu \downarrow, S^\lambda) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \mu \in \lambda^+ \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Weiter gilt unter Verwendung von (1.1.10) und (1.2.22):

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} (S_{\mathbb{Q}}^\lambda \uparrow) \cong S_{\mathbb{C}}^\lambda \uparrow \cong \bigoplus_{\mu \in \lambda^+} S_{\mathbb{C}}^\mu \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \bigoplus_{\mu \in \lambda^+} S_{\mathbb{Q}}^\mu$$

Hiermit folgt die Aussage zunächst für $K = \mathbb{Q}$ und damit für $\text{char}(K) = 0$. □

1.2.29 Folgerung

- (a) $|ST(\lambda)| = \sum_{\mu \in \lambda^-} |ST(\mu)|$
- (b) $(n+1)|ST(\lambda)| = \sum_{\mu \in \lambda^+} |ST(\mu)|$

Beweis:

Die Aussagen folgen aus den Branching-Rules (1.2.28), aus (1.2.22) und aus (1.1.9). \square

Eingeschränkte und induzierte Spechtmoduln über beliebigen Integritätsbereichen sind im Allgemeinen nicht isomorph zu direkten Summen von Spechtmoduln. Sie besitzen aber eine sogenannte Spechtreihe:

1.2.30 Definition

Es sei V ein RS_n -Gitter mit einer Filtrierung $0 =: Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_r := V$ aus reinen Untergittern, so dass Z_j/Z_{j-1} für alle $1 \leq j \leq r$ als RS_n -Modul isomorph zu einem Spechtmodul ist. In diesem Fall sagen wir: V besitzt eine **Spechtreihe**.

1.2.31 Satz

- (a) Der eingeschränkte Spechtmodul $S_R^\lambda \downarrow$ besitzt eine Spechtreihe. Diese wird folgendermaßen beschrieben:

Es sei $\mathbb{I}_{\lambda^-} =: \{i_1, \dots, i_r\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_r = m$. Dann existiert eine Filtrierung

$$0 =: Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_r := S_R^\lambda \downarrow,$$

so dass für alle $1 \leq j \leq r$ jeweils Z_j/Z_{j-1} und $S^{\lambda^{i_j^-}}$ isomorph als RS_{n-1} -Moduln sind.

- (b) Der induzierte Spechtmodul $S_R^\lambda \uparrow$ besitzt eine Spechtreihe. Diese wird folgendermaßen beschrieben:

Es sei $\mathbb{I}_{\lambda^+} =: \{i_1, \dots, i_q\}$ mit $m+1 = i_1 > i_2 > \dots > i_q = 1$. Dann existiert eine Filtrierung

$$0 =: Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_q := S_R^\lambda \uparrow,$$

so dass für alle $1 \leq j \leq q$ jeweils Z_j/Z_{j-1} und $S^{\lambda^{i_j^+}}$ isomorph als RS_{n+1} -Moduln sind.

Beweis:

- (a) Es sei $t \in T(\lambda)$ und $1 \leq j \leq r$. Falls n der letzte Eintrag in der i_j -ten Zeile von t ist, dann erhalten wir daraus ein Tableau $\hat{t} \in T(\lambda^{i_j^-})$, indem wir den Knoten, der n enthält, weglassen. Damit können wir (durch Wahl von geeigneten Äquivalenzklassenvertretern) für $1 \leq j \leq r$ jeweils einen R -Modul-Homomorphismus

$$\vartheta_j : M^\lambda \longrightarrow M^{\lambda^{i_j^-}}, \quad [t] \mapsto \begin{cases} [\hat{t}], & \text{falls } n \in h_{i_j}(t) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Dies ist außerdem ein RS_{n-1} -Modul-Homomorphismus, denn für $t \in T(\lambda)$ und $\pi \in S_{n-1}$ ist $n \in h_{i_j}(\pi t)$ genau dann, wenn $n \in h_{i_j}(t)$ ist. Nun wählen wir für $1 \leq j \leq r$:

$$Z_j := \langle e_t \mid t \in ST(\lambda) \text{ mit } n \in h_{i_1}(t) \cup \dots \cup h_{i_j}(t) \rangle_R.$$

Für $1 \leq j \leq r$ gilt nun:

- (i) Es ist Z_j ein reiner RS_{n-1} -Untermodul von $S^\lambda \downarrow$.
- (ii) Es ist $\text{Rang}_R(Z_j) - \text{Rang}_R(Z_{j-1}) = \text{Rang}_R(S^{\lambda^{i_j^-}})$.
- (iii) Es ist $Z_{j-1} \leq \text{Kern}(\vartheta_j)$.
- (iv) Es ist $\vartheta_j(Z_j) = S^{\lambda^{i_j^-}}$.

Mit (iii) ist $Z_{j-1} \leq Z_j \cap \text{Kern}(\vartheta_j) = \text{Kern}(\vartheta_j|_{Z_j})$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}_R(\vartheta_j(Z_j)) &= \text{Rang}_R(Z_j) - \text{Rang}_R(\text{Kern}(\vartheta_j|_{Z_j})) \\ &\leq \text{Rang}_R(Z_j) - \text{Rang}_R(Z_{j-1}) \stackrel{(ii)}{=} \text{Rang}_R(S^{\lambda^{i_j^-}}) \stackrel{(iv)}{=} \text{Rang}_R(\vartheta_j(Z_j)). \end{aligned}$$

Also herrscht überall Gleichheit. Damit und mit (i) ist $Z_{j-1} = \text{Kern}(\vartheta_j|_{Z_j})$, und es folgt die Behauptung.

Nun zum Beweis der Aussagen (i) bis (iv):

- (i) Es sei $t \in ST(\lambda)$ mit $n \in h_{i_j}(t)$ und $\pi \in S_{n-1}$. Dann ist n auch in $h_{i_j}(\pi t)$. Mit dem Beweis von (1.2.21) folgt, dass $\pi e_t = e_{\pi t} \in Z_j$ ist, denn für alle $\hat{t} \in ST(\lambda)$, bei denen n in einer Zeile mit höheren Index liegt, ist $[\hat{t}] > [\pi t]$. Darum kann $e_{\hat{t}}$ in der Darstellung von πe_t als Linearkombination von Standard-Polytabloiden nicht vorkommen. Also ist Z_j ein RS_{n-1} -Untermodul. Per Konstruktion ist er rein.
- (ii) Die Abbildung $\{t \in ST(\lambda) \mid n \in h_{i_j}(t)\} \rightarrow ST(\lambda^{i_j^-}), t \mapsto \hat{t}$ ist bijektiv. Damit folgt die Behauptung.
- (iii) Es sei $t \in ST(\lambda)$ mit $n \in h_{i_{j-1}}(t)$ und $\pi \in \text{Stab}_v(t)$. Da n in einem Standard-Tableau der letzte Eintrag in seiner Spalte ist, ist $n \in h_{i_1}(\pi t) \cup \dots \cup h_{i_{j-1}}(\pi t)$. Es ist also $\vartheta_j([\pi t]) = 0$ und damit auch $\vartheta_j(e_t) = 0$.
- (iv) Es sei $t \in ST(\lambda)$ mit $n \in h_{i_j}(t)$, also $e_t \in Z_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta_j(e_t) &= \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t) \cap S_{n-1}} \text{sgn}(\pi) \theta_j([\pi t]) + \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t) \setminus S_{n-1}} \text{sgn}(\pi) \theta_j([\pi t]) \\ &= \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(\hat{t})} \text{sgn}(\pi) \pi[\hat{t}] + 0 = e_{\hat{t}} \end{aligned}$$

Mit dem Beweis von (ii) folgt die Behauptung.

- (b) Der Beweis dieser Aussage bedarf zusätzlicher Vorarbeit. Er wird in Folgerung (1.2.39 (a)) formuliert. \square

Wir kehren von den Spechtmoduln wieder zur allgemeineren Situation zurück. Im Folgenden sei also wieder durch $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ und $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\tilde{m}}) \models \tilde{n}$ ein Paar von Partitionen (λ, Λ) gegeben.

1.2.32 Bemerkung

Es sei $\tilde{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Da in einer Sequenz jede 1 gut ist, ist per Konstruktion die Menge der guten $(\tilde{\lambda}, \Lambda)$ -Tableaus gleich der Menge der guten (λ, Λ) -Tableaus, wenn man sie jeweils als Λ -Tableaus betrachtet. Damit ist $S^{(\tilde{\lambda}, \Lambda)} = S^{(\lambda, \Lambda)}$. Im Folgenden können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass $\lambda_1 = \Lambda_1$ ist.

1.2.33 Definition

Es sei $\lambda \neq \Lambda$. Für $m+1 \leq i \leq \tilde{m}$ setze $\lambda_i := 0$. Weiter sei $2 \leq c \leq \tilde{m}$ mit $\lambda_c < \Lambda_c$ und $\lambda_{c-1} = \Lambda_{c-1}$.

- (a) Falls $\lambda_c < \lambda_{c-1}$ ist, sei $A_c(\lambda, \Lambda) := (\lambda^{c+}, \Lambda)$. Falls $\lambda_c = \lambda_{c-1}$ ist, sei $A_c(\lambda, \Lambda) := (\emptyset, \emptyset)$. Es wird also $[\lambda]$ in $[\Lambda]$, falls möglich, um einen Knoten vergrößert. (Das A steht für „add“). *Beispiel:*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \end{array} \xrightarrow{A_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \end{array} \xrightarrow{A_3} (\emptyset, \emptyset)$$

- (b) Es sei $\Lambda^c := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{c-2}, \Lambda_{c-1} + (\Lambda_c - \lambda_c), \lambda_c, \Lambda_{c+1}, \dots, \Lambda_{\tilde{m}}) \models \tilde{n}$. Falls $c > 2$ ist, sei $R_c(\lambda, \Lambda) := (\lambda, \Lambda^c)$. Für $c = 2$ sei $R_2(\lambda, \Lambda) := (\lambda, \Lambda^2)$ mit $\tilde{\lambda} := (\Lambda_1^2, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Es werden also alle Knoten aus der c -ten Zeile von $[\Lambda]$, die nicht innerhalb von $[\lambda]$ liegen, in die nächsthöhere Zeile verschoben. (Das R steht hier für „raise“). *Beispiel:*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \end{array} \xrightarrow{R_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \\ \hline \end{array} \times \xrightarrow{R_2} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline \end{array}$$

Bemerkung:

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass $A_c(\lambda, \Lambda)$ und $R_c(\lambda, \Lambda)$ im Fall $\lambda_c < \Lambda_c$ und $\lambda_{c-1} < \Lambda_{c-1}$ nicht definiert sind, auch wenn man das leicht tun könnte. Aber für die Aussage (1.2.36) müssen wir diese Fälle ausschließen.

1.2.34 Bemerkung

- (a) Es sei $A_c(\lambda, \Lambda)$ definiert. Dann ist $S^{A_c(\lambda, \Lambda)} \leq S^{(\lambda, \Lambda)}$ ein reiner $RS_{\tilde{n}}$ -Untermodul, denn:

Für $A_c(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist die Aussage klar. Sei also nun $A_c(\lambda, \Lambda) \neq (\emptyset, \emptyset)$. Die (λ, Λ) -Tableaus entsprechen, als Λ -Tableaus betrachtet, genau den (λ^{c+}, Λ) -Tableaus. Dabei sind gute (λ^{c+}, Λ) -Tableaus auch gute (λ, Λ) -Tableaus. Für $t \in T(\lambda^{c+}, \Lambda)$ ist $Stab_v^\lambda(t) \leq Stab_v^{\lambda^{c+}}(t)$. Wähle Nebenklassenvertreter $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ von $Stab_v^\lambda(t)$ in $Stab_v^{\lambda^{c+}}(t)$. Dann gilt für alle (λ^{c+}, Λ) -Polytabloide:

$$\begin{aligned} e_t^{\lambda^{c+}} &= \sum_{\pi \in Stab_v^{\lambda^{c+}}(t)} \text{sgn}(\pi) \pi[t] = \sum_{i=1}^l \sum_{\pi \in Stab_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\sigma_i \pi) \sigma_i \pi[t] \\ &= \sum_{i=1}^l \text{sgn}(\sigma_i) \sigma_i \sum_{\pi \in Stab_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi) \pi[t] = \sum_{i=1}^l \text{sgn}(\sigma_i) \sigma_i e_t^\lambda \in S^{(\lambda, \Lambda)} \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für ein gutes $A_c(\lambda, \Lambda)$ -Polytabloid $e_t^{\lambda^{c+}}$ wegen (1.2.14 (a)), dass $[t]$ das größte in $e_t^{\lambda^{c+}}$ vorkommende Tabloid ist; es hat den Koeffizienten $sgn(1) = 1$. Wenn wir also $e_t^{\lambda^{c+}}$ als Linearkombination von guten (λ, Λ) -Polytabloiden schreiben, so kommt e_t^λ mit Koeffizient 1 vor, und für alle anderen vorkommenden guten Polytabloide $e_{t'}^\lambda$ gilt, dass $[t'] < [t]$ ist. Daraus folgt, dass man die Menge der guten $A_c(\lambda, \Lambda)$ -Polytabloide zu einer R -Basis von $S^{(\lambda, \Lambda)}$ ergänzen kann, indem man alle guten (λ, Λ) -Polytabloide $e_{t'}^\lambda$ hinzufügt, für die t' als $A_c(\lambda, \Lambda)$ -Tableau schlecht ist. Also ist $S^{A_c(\lambda, \Lambda)}$ mit (1.1.7) ein reiner Untermodul.

- (b) Es sei $R_c(\lambda, \Lambda)$ definiert, t ein (λ, Λ) -Tableau und $R_c t$ dasjenige $R_c(\lambda, \Lambda)$ -Tableau, das man erhält, wenn man die letzten $\Lambda_c - \lambda_c$ Einträge aus der c -ten Zeile von t unter Beibehaltung der Reihenfolge an die $(c - 1)$ -te Zeile anhängt. Dann ist die Abbildung $T(\lambda, \Lambda) \rightarrow T(\lambda, \Lambda^c), t \mapsto R_c t$ eine Bijektion.
- (c) Es sei $\lambda \neq \Lambda$. Dann existiert ein $2 \leq c \leq \tilde{m}$, für das $A_c(\lambda, \Lambda)$ und $R_c(\lambda, \Lambda)$ definiert sind, da nach Voraussetzung $\lambda_1 = \Lambda_1$ ist. Falls dabei $A_c(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist für alle $2 \leq c \leq \tilde{m}$, für die $A_c(\lambda, \Lambda)$ definiert ist, so existiert eine Folge c_1, \dots, c_l , so dass $A_{c_k} R_{c_{k-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist für alle $1 \leq k \leq l - 1$ und
 - (i) $A_{c_l} R_{c_{l-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda) \neq (\emptyset, \emptyset)$ oder
 - (ii) $A_{c_l} R_{c_{l-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ und $R_{c_l} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda) = (\mu, \mu)$ ist für eine Partition $\mu \vdash \tilde{n}$.

Dazu betrachten wir zunächst den folgenden Fall: Es existieren $1 \leq c' < c \leq \tilde{m}$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\lambda_{c'} = \Lambda_{c'} > \lambda_{c'+1}, \quad \lambda_c < \Lambda_c, \quad \text{und } \lambda_i = \Lambda_i = \lambda_c \text{ für } c' + 1 \leq i \leq c - 1.$$

Dann erfüllt die Folge $c, c - 1, \dots, c' + 1$ die Bedingung aus (i). *Beispiel:*

$$\begin{array}{c} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{array} \xrightarrow{R_c} \begin{array}{c} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{array} \xrightarrow{R_{c-1}} \begin{array}{c} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{array} \xrightarrow{A_{c-2}} \begin{array}{c} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{array}$$

Falls der obige Fall nicht gilt, so existiert ein c' mit $\lambda_{c'} < \Lambda_{c'}$ und $\lambda_i = \Lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq c'$. Wähle dann c minimal mit der Eigenschaft, dass $\lambda_c < \Lambda_c$ ist, und beginne die gesuchte Folge mit $c, c - 1, \dots, 2$. Wenn Zeile c die einzige ist, in der sich λ von Λ unterscheidet, so ist $R_2 \dots R_c(\lambda, \Lambda) = (\mu, \mu)$ mit $\mu = (\Lambda_c, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, und es gilt (ii). Andernfalls erfüllt $R_2 \dots R_c(\lambda, \Lambda)$ die Bedingungen vom obigen Fall, und wir können die Folge dementsprechend fortsetzen. *Beispiel:*

$$\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} \times \times \xrightarrow{R_3} \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array} \times \times \xrightarrow{R_2} \begin{array}{c} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{array}$$

- (d) Es sei $s((\lambda, \Lambda))$ die Menge aller Sequenzen vom Typ Λ , die einem guten (λ, Λ) -Tabloid im Sinne von (1.2.15 (b)) entsprechen. Falls $A_c(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist, ist $s(A_c(\lambda, \Lambda)) = \emptyset$.

Ansonsten ist die Mindestanzahl der guten c in einer Sequenz aus $s(A_c(\lambda, \Lambda))$ größer oder gleich der Mindestanzahl der guten c in einer Sequenz aus $s((\lambda, \Lambda))$. Damit ist $s(A_c(\lambda, \Lambda)) \subseteq s((\lambda, \Lambda))$.

Des Weiteren ist $|s((\lambda, \Lambda)) \setminus s(A_c(\lambda, \Lambda))| = |s(R_c(\lambda, \Lambda))|$. (Zum Beweis siehe [Ja78], Theorem 15.14.)

1.2.35 Definition und Bemerkung

Es sei $2 \leq c \leq \tilde{m}$, so dass $R_c(\lambda, \Lambda)$ definiert ist. Weiter sei $t \in T(\Lambda)$ und $U_{[t]} \subseteq \bar{T}(\Lambda^c)$ die Menge aller Λ^c -Tabloide $[u]$ mit $h_i(u) = h_i(t)$ für $i \notin \{c-1, c\}$ und $h_c(u) \subseteq h_c(t)$. (Dann ist $h_{c-1}(t) \subseteq h_{c-1}(u)$.) Damit definiert die Abbildung

$$\psi_c : M^\Lambda \longrightarrow M^{\Lambda^c}, \quad [t] \mapsto \sum_{[u] \in U_{[t]}} [u]$$

einen $RS_{\tilde{n}}$ -Modul-Homomorphismus, denn es gilt:

$$\pi \sum_{[u] \in U_{[t]}} [u] = \sum_{[u] \in U_{[t]}} [\pi u] = \sum_{[u'] \in U_{[\pi t]}} [u'].$$

1.2.36 Satz

Es sei $2 \leq c \leq \tilde{m}$, so dass $A_c(\lambda, \Lambda)$ und $R_c(\lambda, \Lambda)$ definiert sind. Dann gilt:

- (a) $\psi_c(S^{(\lambda, \Lambda)}) = S^{R_c(\lambda, \Lambda)}$.
- (b) $\text{Kern}(\psi_c) \cap S^{(\lambda, \Lambda)} = S^{A_c(\lambda, \Lambda)}$.

Beweis:

- (a) Für ein Tabloid $[t]$ und jedes Tabloid $[u] \in U_{[t]}$ sei das Tableau u so gewählt, dass es in allen Zeilen mit Index ungleich $c-1$ und c mit t übereinstimmt. Insbesondere können wir $R_c t$ als einen derartigen Äquivalenzklassenvertreter wählen, und es gilt wegen $\text{Stab}_v^\lambda(t) = \text{Stab}_v^\lambda(R_c t)$:

$$\kappa_t^\lambda[R_c t] = \kappa_{R_c t}^\lambda[R_c t] = e_{R_c t}^\lambda.$$

Für alle anderen Tabloide $[u] \in U_{[t]}$ existiert ein Eintrag $k_1 \in h_c(t)$ innerhalb $[\lambda]$ mit $k_1 \in h_{c-1}(u)$. In diesem Fall sei $k_2 \in h_{c-1}(t)$ derjenige Eintrag, der in t direkt über k_1 liegt. Wegen $h_{c-1}(t) \subseteq h_{c-1}(u)$ ist $k_2 \in h_{c-1}(u)$ und damit $(k_1, k_2)[u] = [u]$. Außerdem ist $(k_1, k_2) \in \text{Stab}_v^\lambda(t)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi) \pi[u] &= \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi) \pi(k_1, k_2)[u] \\ &= - \sum_{\pi \in \text{Stab}_v^\lambda(t)} \text{sgn}(\pi) \pi[u]. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist also $\kappa_t^\lambda[u] = 0$. Also gilt für alle $t \in T(\lambda, \Lambda)$:

$$\psi_c(e_t^\lambda) = \psi_c(\kappa_t^\lambda[t]) = \kappa_t^\lambda \psi_c([t]) = \kappa_t^\lambda \sum_{[u] \in U_{[t]}} [u] = \kappa_t^\lambda[R_c t] = e_{R_c t}^\lambda.$$

Mit (1.2.34 (b)) folgt die Behauptung.

(b) Zunächst zeigen wir, dass $\psi_c(S^{A_c(\lambda, \Lambda)}) = 0$ ist. Falls $A_c(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist, ist diese Aussage trivial. Andernfalls betrachten wir die $A_c(\lambda, \Lambda)$ -Polytabloide $e_t^{\lambda^{c^+}} \in S^{A_c(\lambda, \Lambda)}$:

Für jedes Tableau u definiert wie in (a) existiert ein $k_1 \in h_c(t)$ innerhalb von $[\lambda^{c^+}]$ mit $k_1 \in h_{c-1}(u)$. Daher folgt analog zur entsprechenden Aussage in (a), dass $\kappa_t^{\lambda^{c^+}}[u] = 0$ ist für alle $[u] \in U_{[t]}$, und wir erhalten:

$$\psi_c(e_t^{\lambda^{c^+}}) = \kappa_t^{\lambda^{c^+}} \psi_c([t]) = \kappa_t^{\lambda^{c^+}} \sum_{[u] \in U_{[t]}} [u] = \sum_{[u] \in U_{[t]}} \kappa_t^{\lambda^{c^+}} [u] = 0$$

Also ist $S^{A_c(\lambda, \Lambda)} \subseteq \text{Kern}(\psi_c) \cap S^{(\lambda, \Lambda)}$. Außerdem wissen wir wegen (1.2.21 (b)), (1.2.34 (d)) und

$$S^{(\lambda, \Lambda)} / (\text{Kern}(\psi_c) \cap S^{(\lambda, \Lambda)}) \cong \psi_c(S^{(\lambda, \Lambda)}) = S^{R_c(\lambda, \Lambda)},$$

dass $\text{Rang}(S^{A_c(\lambda, \Lambda)}) = \text{Rang}(\text{Kern}(\psi_c) \cap S^{(\lambda, \Lambda)})$ ist. Da $S^{A_c(\lambda, \Lambda)}$ mit (1.2.34 (a)) ein reiner Untermodul ist, folgt die Behauptung. \square

1.2.37 Satz

Für jedes Paar von Partitionen (λ, Λ) besitzt $S^{(\lambda, \Lambda)}$ eine Spechtreihe.

Beweis:

Falls $\lambda = \Lambda$ ist, ist $S^{(\lambda, \Lambda)} = S^\lambda$ selbst ein Spechtmodul. Mit Hilfe von (1.2.34 (c)) können wir nun eine Induktion über den Rang der betrachteten Moduln durchführen:

Falls $\lambda \neq \Lambda$ ist, so existiert ein $2 \leq c \leq \tilde{m}$, so dass $A_c(\lambda, \Lambda)$ und $R_c(\lambda, \Lambda)$ definiert sind. Falls für ein solches c gilt, dass $A_c(\lambda, \Lambda) \neq (\emptyset, \emptyset)$ ist, so besitzen $S^{A_c(\lambda, \Lambda)}$ und $S^{R_c(\lambda, \Lambda)}$ nach Induktionsvoraussetzung eine Spechtreihe, und es folgt die Behauptung für $S^{(\lambda, \Lambda)}$.

Falls $A_c(\lambda, \Lambda) = (\emptyset, \emptyset)$ ist für alle c , für die der Ausdruck definiert ist, so existiert eine Folge c_1, \dots, c_l , so dass einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

- Es existiert eine Partition $\mu \vdash \tilde{n}$, so dass $S^{(\lambda, \Lambda)}$ isomorph ist zum Spechtmodul $S^{(\mu, \mu)} = S^\mu$ vermöge der Abbildung $\psi_{c_l} \circ \dots \circ \psi_{c_1}$.
- Es ist $S^{(\lambda, \Lambda)}$ isomorph zu $S^{R_{c_{l-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda)}$ vermöge der Abbildung $\psi_{c_{l-1}} \circ \dots \circ \psi_{c_1}$. Wegen $A_{c_l} R_{c_{l-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda) \neq (\emptyset, \emptyset)$ besitzen $S^{A_{c_l} R_{c_{l-1}} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda)}$ und $S^{R_{c_l} \dots R_{c_1}(\lambda, \Lambda)}$ nach Induktionsvoraussetzung eine Spechtreihe, und es folgt die Behauptung. \square

1.2.38 Lemma

Es sei $\Lambda := \lambda^{(m+1)^+}$. Dann sind $S^{(\lambda, \Lambda)}$ und $S^\lambda \uparrow$ isomorph als RS_{n+1} -Moduln.

Beweis:

Die Permutationen $\sigma_i := (i, i+1, \dots, n+1) \in S_{n+1}$ für $1 \leq i \leq n+1$ bilden eine Menge von Nebenklassenvertretern von S_n in S_{n+1} . (Dabei ist $\sigma_{n+1} = 1$.) Also ist mit (1.1.9) eine R -Basis von $S^\lambda \uparrow$ gegeben durch die Menge $\{\sigma_i \otimes e_t \mid 1 \leq i \leq n+1, t \in ST(\lambda)\}$.

Für $t \in T(\lambda)$ sei t^+ dasjenige (λ, Λ) -Tableau, das im Inneren mit t übereinstimmt. (Der Eintrag im zusätzlichen Knoten ist damit $n+1$.) Per Definition der σ_i folgt, dass $\sigma_i t^+ \in ST(\lambda, \Lambda)$ genau dann gilt, wenn $t \in ST(\lambda)$ ist. Da die guten (λ, Λ) -Polytabloide hier genau die Standard-Polytabloide sind, ist mit (1.2.21) eine R -Basis von $S^{(\lambda, \Lambda)}$ gegeben

durch die Menge $\{\sigma_i e_{t+}^\lambda \mid 1 \leq i \leq n+1, t \in ST(\lambda)\}$. Damit erhalten wir einen R -Modul-Isomorphismus, definiert durch:

$$\varphi : S^{(\lambda, \Lambda)} \longrightarrow S^\lambda \uparrow, \quad \sigma_i e_{t+}^\lambda \mapsto \sigma_i \otimes e_t, \quad 1 \leq i \leq n+1, t \in ST(\lambda).$$

Für $\pi \in S_{n+1}$ und $1 \leq i \leq n+1$ ist $\sigma_{\pi i}^{-1} \pi \sigma_i \in S_n$. Für $t \in ST(\lambda)$ schreibe $\sigma_{\pi i}^{-1} \pi \sigma_i e_t := \sum_{t' \in ST(\lambda)} a_{t'} e_{t'}$ als R -Linearkombination. Dann ist $\sigma_{\pi i}^{-1} \pi \sigma_i e_{t+}^\lambda = \sum_{t' \in ST(\lambda)} a_{t'} e_{t'+}^\lambda$ als R -Linearkombination in $S^{(\lambda, \Lambda)}$. Damit erhalten wir:

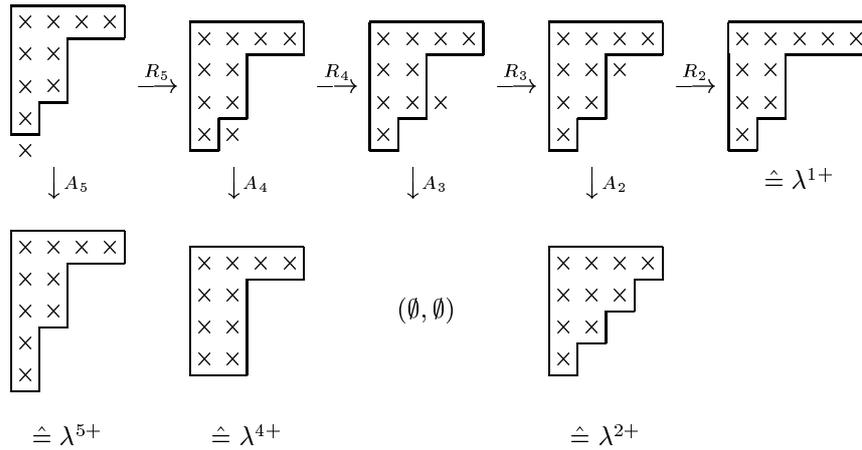
$$\begin{aligned} \varphi(\pi(\sigma_i e_{t+}^\lambda)) &= \varphi(\sigma_{\pi i}(\sigma_{\pi i}^{-1} \pi \sigma_i e_{t+}^\lambda)) = \varphi\left(\sum_{t' \in ST(\lambda)} a_{t'} \sigma_{\pi i} e_{t'+}^\lambda\right) \\ &= \sum_{t' \in ST(\lambda)} a_{t'} (\sigma_{\pi i} \otimes e_{t'}) = \sigma_{\pi i} \otimes (\sigma_{\pi i}^{-1} \pi \sigma_i e_t) = \pi \sigma_i \otimes e_t = \pi \varphi(\sigma_i e_{t+}^\lambda). \end{aligned}$$

Damit ist φ ein RS_{n+1} -Modul-Isomorphismus. □

1.2.39 Folgerung

Aus (1.2.37) und (1.2.38) folgt die in (1.2.31 (b)) formulierte Variante der Branching Rule. Die Reihenfolge der Spechtmodul ergibt sich dabei unmittelbar aus der Konstruktion der Induktion im Beweis von (1.2.37).

Beispiel: Spechtreihe für $S^{(4,2^2,1)} \uparrow \cong S^{((4,2^2,1), (4,2^2,1^2))}$



1.3 Endlich präsentierte Gruppen

1.3.1 Definition und Bemerkung

- (a) Es sei F eine Gruppe und $X \subseteq F$. F heißt **freie Gruppe auf X** , falls gilt: Zu jeder Gruppe H und jeder Abbildung $f : X \rightarrow H$ existiert genau ein Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow H$ mit $\varphi|_X = f$. In diesem Fall heißt X auch **freies Erzeugendensystem von F** (denn $\langle X \rangle = F$).

Zu jeder Menge X existiert eine freie Gruppe auf X (siehe [Su82], Theorem 6.4).

- (b) Es sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$. Dann heißt $\langle\langle S \rangle\rangle := \bigcap_{N \trianglelefteq G, S \subseteq N} N$ **normaler Abschluss von S in G** . Es ist $\langle\langle S \rangle\rangle = \langle g^{-1} s g \mid g \in G, s \in S \rangle$ der (eindeutige) kleinste Normalteiler von G , der S enthält.

- (c) Eine **Präsentation** einer Gruppe G ist eine zu G isomorphe Gruppe $\langle X | R \rangle$, definiert durch eine Menge X , der freien Gruppe F auf X , $R \subseteq F$ und $\langle X | R \rangle := F / \langle\langle R \rangle\rangle$.

Die Gruppe $\langle X | R \rangle$ heißt eine **endliche Präsentation**, falls X und R endlich sind. Besitzt G eine endliche Präsentation, dann heißt G **endlich präsentiert**.

1.3.2 Bemerkung

- (a) Es sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ mit $\langle S \rangle = G$. Dann existiert eine Menge X , eine Bijektion $f : X \rightarrow S$ und eine Präsentation $G \cong \langle X | R \rangle$ (siehe [Su82], Theorem 6.6, Corollary 2). Ist G endlich, dann ist G endlich präsentiert (siehe [Su82], Theorem 6.9, Corollary 2).

- (b) Es seien G und H Gruppen und $G \cong \langle X | R \rangle$ eine Präsentation von G . Weiter sei $f : X \rightarrow H$ eine Abbildung und F die freie Gruppe auf X . Es sei $\varphi : F \rightarrow H$ der Homomorphismus mit $\varphi|_X = f$.

Wenn die Elemente $f(x) \in H$ für alle $x \in X$ die **Relationen R erfüllen**, das heißt, wenn $\varphi(r) = 1$ für alle $r \in R$, dann existiert ein Homomorphismus $\tilde{\varphi} : G \rightarrow H$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$, wobei π die Komposition aus der kanonischen Abbildung $F \rightarrow F / \langle\langle R \rangle\rangle$ und dem Isomorphismus zwischen der Präsentation und G ist.

Ist insbesondere $H = \langle f(x) | x \in X \rangle$, dann ist H isomorph zu einer Faktorgruppe von G .

Interpretation: $\langle X | R \rangle$ ist die größte Gruppe, die von einer Menge X erzeugt wird, deren Elemente die Relationen R erfüllen.

1.3.3 Definition und Bemerkung

- (a) Es sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Dann heißt $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ der **Kommutator von g und h** .

Falls $[g, h]^k = 1$ ist für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt auch $[h, g^{-1}]^k = [g^{-1}, h^{-1}]^k = [h^{-1}, g]^k = 1$.

- (b) Es sei $G' := \langle [g, h] | g, h \in G \rangle \trianglelefteq G$ die **Kommutatorgruppe von G** . Dann ist G/G' die größte abelsche Faktorgruppe von G und wird präsentiert durch $\bar{G} := \langle X | \bar{R} \rangle$ mit $\bar{R} := R \cup \{[x, y] | x, y \in X, x \neq y\}$ (siehe [CM72], 1.2).

1.3.4 Lemma

Es sei $G \cong \langle X | R \rangle$ endlich präsentiert mit $G/G' \cong \bar{G}$ endlich. Dann ist $|X| \leq |R|$. (Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn G endlich ist.)

Beweis:

Es sei $X := \{x_1, \dots, x_l\}$ und $R := \{r_1, \dots, r_m\}$. Für $1 \leq i \leq l$ und $1 \leq j \leq m$ seien $m_{i,j}$ die Summe der Exponenten von x_i in r_j und $s_j := \sum_{i=1}^l m_{i,j} e_i \in \mathbb{Z}^l$ mit Einheitsvektoren e_i . Weiter sei $S := \langle s_1, \dots, s_m \rangle_{\mathbb{Z}}$. Dann wird mit (1.3.2 (b)) durch

$$\varphi : F \longrightarrow \mathbb{Z}^l / S, \quad x_i \mapsto e_i + S \text{ für } 1 \leq i \leq l$$

ein Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{Z}^l / S$ induziert, denn es ist $\varphi([x_i, x_k]) = 0$ für alle $1 \leq i, k \leq l$, da \mathbb{Z}^l / S abelsch ist, und es ist $\varphi(r_j) = \sum_{i=1}^l m_{i,j} e_i + S = s_j + S = 0$. Da die $e_i + S$ die Faktorgruppe \mathbb{Z}^l / S erzeugen, ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Da \bar{G} endlich ist, ist auch $\text{Bild}(\tilde{\varphi}) = \mathbb{Z}^l / S$ endlich und damit $m \geq l$. \square

1.3.5 Beispiel

(a) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist eine Präsentation der S_n gegeben durch:

$$H_n := \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i^2 & \forall 1 \leq i \leq n-1, \\ (s_i s_{i+1})^3 & \forall 1 \leq i \leq n-2, \\ (s_i s_j)^2 & \forall 1 \leq i, j \leq n-1, j-i \geq 2 \end{array} \rangle.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ist eine Präsentation der S_n gegeben durch:

$$G_n := \langle a, b \mid a^2, b^n, (ab)^{n-1}, [a, b^j]^2 \quad \forall 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \rangle.$$

Beweis:

(a) Siehe [GP00] (1.4.1).

(b) Durch $a \mapsto (1, 2)$ und $b \mapsto (1, 2, \dots, n)$ wird ein Epimorphismus $\varphi : G_n \rightarrow S_n$ definiert, da $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ die Relationen von G_n erfüllen und S_n erzeugen.

Des Weiteren gibt es einen Homomorphismus $\psi : H_n \rightarrow G_n$, definiert durch $s_1 \mapsto a$ und $s_i \mapsto b^{i-1} a b^{-i+1}$ für $2 \leq i \leq n-1$, denn die $\psi(s_i)$ erfüllen die Relationen von H_n :

(i) Es ist $a^2 = 1$ und $(b^{i-1} a b^{-i+1})^2 = b^{i-1} a^2 b^{-i+1} = 1$ für $2 \leq i \leq n-1$.

(ii) Für $i = 1$ ist $\psi((s_i s_{i+1})^3) = (a(bab^{n-1}))^3 = 1$, denn:

$$\text{Für } n = 3 \text{ gilt: } (abab^{-1})^3 = (abab^2)^3 = ((ab)^2 b)^3 = b^3 = 1.$$

Für $n \geq 4$ ist $\frac{n}{2} \geq 2$, und es gilt:

Wegen (1.3.3 (a)) ist $[a, b^j]^2 = 1$ für alle $2 \leq j \leq n-2$. Somit folgt für alle $2 \leq j \leq n-2$ per Induktion, dass $1 = (ab^{-1})^{j-1} (b^{j+1} a b^{-j}) (ab)^{j-1} (bab^{-2})$ ist:

$$j = 2: (ab^{-1})^1 (b^3 a b^{-2}) (ab)^1 (bab^{-2}) = ab^2 a b^{-2} a b^2 a b^{-2} = [a, b^2]^2 = 1$$

$j \rightarrow j+1$ für $2 \leq j \leq n-3$:

$$\begin{aligned} 1 &= (ab^{-1})^{j-1} (b^{j+1} a b^{-j}) (ab)^{j-1} (bab^{-2}) \\ &= (ab^{-1})^{j-1} (a b^{j+1} a b^{-(j+1)}) a b^{j+1} b^{-j} (ab)^{j-1} (bab^{-2}) \\ &= (ab^{-1})^j (b^{j+2} a b^{-(j+1)}) (ab)^j (bab^{-2}) \end{aligned}$$

Mit $j = n-2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 1 &= (ab^{-1})^{n-3} (b^{n-1} a b^{-n+2}) (ab)^{n-3} (bab^{-2}) \\ &= (baba) (b^{-1} a b^2) (b^{-1} a b^{-1} a) (bab^{-2}) \\ &= babab^{-1} abab^{-1} abab^{-2} \end{aligned}$$

Daraus folgt $1 = b^{-1} b = (abab^{-1})^3$ und somit die gewünschte Aussage.

Außerdem ist $\psi((s_i s_{i+1})^3) = ((b^{i-1} a b^{-i+1}) (b^i a b^{-i}))^3 = b^{i-1} (abab^{-1})^3 b^{-i+1} = b^{i-1} b^{-i+1} = 1$ für alle $2 \leq i \leq n-2$

(iii) Es ist einerseits $(a(b^{j-1} a b^{-j+1}))^2 = 1$ für alle $3 \leq j \leq n-1$ und andererseits $((b^{i-1} a b^{-i+1}) (b^{j-1} a b^{-j+1}))^2 = 1$ für alle $2 \leq i, j \leq n-1$ mit $j-i \geq 2$. Letzteres ist äquivalent zu $(ab^{j-i} a b^{-j+i})^2 = [a, b^{j-i}]^2 = 1$. Dies gilt, weil $j-i \geq 2$ ist.

Damit ist ψ also ein Homomorphismus. Wegen $\psi(s_1) = a$ und $\psi(s_1 s_2 \dots s_{n-1}) = a(bab^{-1})(b^2 a b^{-2}) \dots (b^{n-2} a b^{-n+2}) = (ab)^{n-2} a b^{-n+2} = (ab)^{n-1} b^{-n+1} = b$ ist ψ surjektiv.

Insgesamt folgt nun die Aussage (b): Da nach (a) $S_n \cong H_n$ ist, existieren ein Epimorphismus von S_n nach G_n und einer von G_n nach S_n . Da S_n endlich ist, folgt die Behauptung. \square

1.4 Kohomologie von Gruppen

Die Grundlagen aus der homologischen Algebra sollen hier relativ knapp behandelt werden. Das heißt insbesondere, dass allgemeine Aussagen zu abelschen Kategorien hier nur für die Kategorien der R -Moduln über beliebigen Ringen R formuliert werden. Außerdem beschränken wir uns auf Aussagen zur Kohomologie und verzichten auf die dualen Aussagen zur Homologie, auch wenn einige Referenzen auf Beweise verweisen, die auf dieser Dualität basieren.

Grundbegriffe der Kategorientheorie finden sich zum Beispiel in [We94], Appendix A.

1.4.1 Definition

Ein **Komplex** $C := \{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine Familie von R -Moduln zusammen mit Abbildungen $d^n := d_C^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$, so dass $d^{n+1} \circ d^n = 0$ ist. Weiter bezeichne:

- $Z^n(C) := \text{Kern}(d^n) \subseteq C^n$ die Menge der n -**Cozykel**,
- $B^n(C) := \text{Bild}(d^{n-1}) \subseteq C^n$ die Menge der n -**Coränder** und
- $H^n(C) := Z^n(C)/B^n(C)$ den n -**ten Kohomologie-Modul** von C .

Beachte dabei, dass $B^n(C) \subseteq Z^n(C)$ ist wegen $d^n \circ d^{n-1} = 0$.

1.4.2 Definition und Bemerkung

- (a) Eine Folge $(M_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln M_i und R -Modul-Homomorphismen $\varphi_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ heißt eine (**lange**) **exakte Sequenz**, falls $\text{Bild}(\varphi_i) = \text{Kern}(\varphi_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
- (b) Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine exakte Sequenz, bei der alle M_i bis auf höchstens drei aufeinanderfolgende trivial sind. Notation:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Dabei ist f injektiv wegen $\text{Kern}(f) = 0$, und g ist surjektiv wegen $\text{Bild}(g) = M''$. Damit ist $M' \cong \text{Bild}(f) = \text{Kern}(g)$ und $M/\text{Kern}(g) \cong \text{Bild}(g) = M''$. Insbesondere ist also für jeden Untermodul $U \leq M$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/U \longrightarrow 0$$

exakt, wobei f die Einbettung und g die kanonische Abbildung ist.

(Die Notation für beliebige exakte Sequenzen erfolgt analog. Wenn die Homomorphismen aus dem Zusammenhang klar oder nicht relevant sind, wird ihre Bezeichnung im Diagramm oft weggelassen.)

- (c) Eine exakte Sequenz von Komplexen ist eine Folge $(C_l, \varphi_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ von Komplexen $C_l := \{C_l^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ und Familien von Homomorphismen $\varphi_l := \{\varphi_l^n : C_l^n \rightarrow C_{l+1}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, so dass $(C_l^n, \varphi_l^n)_{l \in \mathbb{Z}}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine exakte Sequenz von R -Moduln ist, und so dass außerdem gilt: $\varphi_l^{n+1} \circ d_l^n = d_{l+1}^n \circ \varphi_l^n$.

Eine kurze exakte Sequenz von Komplexen ist dementsprechend eine exakte Sequenz von Komplexen, bei der alle C_l bis auf höchstens drei aufeinanderfolgende trivial sind.

1.4.3 Satz

Es sei $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Dann ist $f^n(Z^n(C)) \subseteq Z^n(D)$ und $f^n(B^n(C)) \subseteq B^n(D)$, und damit sind die Abbildungen

$$\tilde{f}^n : H^n(C) \longrightarrow H^n(D), \quad c + B^n(C) \mapsto f^n(c) + B^n(D)$$

R -Modul-Homomorphismen für alle $n \in \mathbb{Z}$. Analog lassen sich R -Modul-Homomorphismen \tilde{g}^n konstruieren. Des Weiteren existieren natürliche **verbindende Homomorphismen** $\delta^n : H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$, so dass

$$\dots \xrightarrow{\tilde{g}^{n-1}} H^{n-1}(C) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\tilde{f}^n} H^n(B) \xrightarrow{\tilde{g}^n} H^n(C) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{\tilde{f}^{n+1}} \dots$$

eine lange exakte Sequenz ist.

Beweis:

Für $c \in Z^n(C) = \text{Kern}(d_C^n)$ ist $0 = f^{n+1} \circ d_C^n(c) = d_D^n \circ f^n(c)$ und damit $f^n(c) \in \text{Kern}(d_D^n) = Z^n(D)$.

Für $c \in B^n(C) = \text{Bild}(d_C^{n-1})$ existiert ein $c' \in C^{n-1}$ mit $d_C^{n-1}(c') = c$. Damit ist $f^n(c) = f^n \circ d_C^{n-1}(c') = d_D^n \circ f^{n-1}(c') \in \text{Bild}(d_D^n) = B^n(D)$.

Damit sind die Abbildungen \tilde{f}^n (und analog die Abbildungen \tilde{g}^n) wohldefiniert. Per Konstruktion sind sie R -linear mit $\text{Bild}(\tilde{f}^n) = \text{Kern}(\tilde{g}^n)$.

Für die Definition der δ^n siehe [KS94] (1.5). Direktes Nachrechnen ergibt, dass $\text{Kern}(\delta^n) = \text{Bild}(\tilde{g}^n)$ und $\text{Bild}(\delta^n) = \text{Kern}(f^{n+1})$ ist. \square

1.4.4 Bemerkung

Die direkte Summe von Komplexen C_l sei definiert durch:

$$\bigoplus_{l=1}^m C_l := \left\{ \bigoplus_{l=1}^m C_l^n \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

zusammen mit den Abbildungen

$$d^n : \bigoplus_{l=1}^m C_l^n \longrightarrow \bigoplus_{l=1}^m C_l^{n+1}, \quad c_1 + \dots + c_m \mapsto d_{C_1}^n(c_1) + \dots + d_{C_m}^n(c_m).$$

Damit gilt:

$$\text{Kern}(d^n) = \bigoplus_{l=1}^m \text{Kern}(d_{C_l}^n) \quad \text{und} \quad \text{Bild}(d^{n-1}) = \bigoplus_{l=1}^m \text{Bild}(d_{C_l}^{n-1}),$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{l=1}^m H^i(C_l) &= \bigoplus_{l=1}^m (Z^i(C_l)/B^i(C_l)) \cong \bigoplus_{l=1}^m Z^i(C_l) / \bigoplus_{l=1}^m B^i(C_l) \\ &= Z^i\left(\bigoplus_{l=1}^m C_l\right) / B^i\left(\bigoplus_{l=1}^m C_l\right) = H^i\left(\bigoplus_{l=1}^m C_l\right). \end{aligned}$$

1.4.5 Definition

Ein additiver Funktor F auf R -Moduln heißt **links exakt**, wenn für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ die Sequenz $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$ exakt ist. (Im Allgemeinen ist dabei $F(B) \rightarrow F(C)$ nicht surjektiv.)

1.4.6 Definition und Bemerkung

Ein R -Modul I heißt **injektiv**, wenn für alle R -Moduln A und B mit einem injektiven Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ und einem Homomorphismus $\alpha : A \rightarrow I$ ein Homomorphismus $\beta : B \rightarrow I$ existiert, so dass $\alpha = \beta \circ f$.

Zu jedem R -Modul M existiert ein injektiver Homomorphismus $M \rightarrow I$ in einen injektiven R -Modul I .

Beweis:

Siehe [Br73], Definition 27, Satz 21. □

Im Folgenden sei M ein R -Modul.

1.4.7 Definition und Bemerkung

Eine **Auflösung** von M ist ein Komplex I mit $I^n = 0$ für $n < 0$ zusammen mit einer Abbildung $d : M \rightarrow I^0$, so dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

exakt ist. Die Auflösung heißt **injektiv**, wenn jedes I^n injektiv ist.

Für jeden R -Modul M existiert eine injektive Auflösung.

Beweis:

Siehe [We94], Lemma 2.2.5, Lemma 2.3.4. □

1.4.8 Definition und Bemerkung

- (a) Es sei F ein links exakter Funktor auf R -Moduln. Wegen (1.4.7) können wir für jeden R -Modul M eine injektive Auflösung I wählen und damit den **rechtsabgeleiteten Funktor** $R^i F$ folgendermaßen definieren:

$$R^i F(M) := H^i(F(I)) \quad \text{für alle } R\text{-Moduln } M, i \in \mathbb{N}_0,$$

wobei der Komplex $F(I)$ definiert ist durch $\{F(I^n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Die Definition von $R^i F$ ist unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösung (siehe [We94], 2.5.1).

Da die Sequenz $0 \rightarrow F(M) \rightarrow F(I^0) \rightarrow F(I^1)$ nach Voraussetzung exakt ist, gilt immer $R^0 F(M) \cong F(M)$.

- (b) Für jeden R -Modul A ist $F := \text{Hom}_R(A, -)$ links exakt. Die **Ext-Gruppen** sind definiert durch:

$$\text{Ext}_R^i(A, M) := R^i \text{Hom}_R(A, -)(M) \quad \text{für alle } R\text{-Moduln } M, i \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist mit (a) $\text{Ext}_R^0(A, M) \cong \text{Hom}_R(A, M)$.

Im Folgenden sei G eine Gruppe und $R = \mathbb{Z}G$. Von nun an ist also M ein $\mathbb{Z}G$ -Modul.

1.4.9 Definition und Bemerkung

(a) Der Funktor $(-^G)$ auf $\mathbb{Z}G$ -Moduln sei definiert durch

$$M^G := \{m \in M \mid gm = m \forall g \in G\}.$$

Betrachte \mathbb{Z} als trivialen G -Modul, also mit $gz = z$ für alle $g \in G, z \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Abbildung $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \rightarrow M^G, \alpha \mapsto \alpha(1)$ ein $\mathbb{Z}G$ -Modul-Isomorphismus.

(b) Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei die i -te **Kohomologie-Gruppe von G mit Werten in M** definiert durch:

$$H^i(G, M) := R^i(-^G)(M).$$

Per Definition ist $H^0(G, M) = R^0(M^G) = M^G$. Weiter gilt mit (a), dass $H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, M)$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Es folgen einige wichtige Eigenschaften von Kohomologie-Gruppen:

1.4.10 Bemerkung

Mit $H^i(G, M) \cong H^i(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, I))$ und (1.4.4) gilt für alle $\mathbb{Z}G$ -Moduln M_l und alle $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\bigoplus_{l=1}^m H^i(G, M_l) \cong H^i(G, \bigoplus_{l=1}^m M_l)$$

1.4.11 Satz (Lemma von Shapiro)

Es sei $H \leq G$ mit $[G : H] < \infty$ und M ein $\mathbb{Z}H$ -Modul. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$:

$$H^i(H, M) \cong H^i(G, M \uparrow_H^G)$$

Beweis:

Das eigentliche Lemma von Shapiro ist für beliebige $H \leq G$ formuliert und lautet

$$H^i(H, M) \cong H^i(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M))$$

(siehe [We94], Lemma 6.3.2). Wenn allerdings $[G : H] < \infty$ ist, so gilt

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \cong M \uparrow_H^G$$

(siehe [We94], Lemma 6.3.4). Damit folgt die obige Version, die wir hier benötigen. \square

1.4.12 Satz

Ist G endlich und M ein $\mathbb{Q}G$ -Modul, so ist $H^i(G, M) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (nicht für $i = 0$).

Beweis:

Siehe [We94], Proposition 6.1.10. \square

1.4.13 Satz

Ist G endlich, dann ist $|G|H^i(G, M) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Siehe [We94], Theorem 6.5.8. \square

1.4.14 Definition und Lemma

Es sei $H \leq G$ mit $[G : H] =: l < \infty$ und $\{g_1, \dots, g_l\}$ ein Repräsentantensystem von G/H .

- (a) Die natürliche Injektion $M^G \rightarrow (M \downarrow_H^G)^H$ induziert für alle $i \in \mathbb{N}_0$ einen Homomorphismus

$$\text{res}_H^G : H^i(G, M) \rightarrow H^i(H, M \downarrow_H^G).$$

Wir nennen ihn **Restriktion** (siehe [We94], Definition 6.7.1).

- (b) Es sei $g \in G$ und $m \in (M \downarrow_H^G)^H$. Dann existieren für alle $1 \leq j \leq l$ gewisse $h_j \in H$, so dass gilt:

$$g \sum_{j=1}^l g_j m = \sum_{j=1}^l g_j h_j m = \sum_{j=1}^l g_j m.$$

Es ist also $\sum_{j=1}^l g_j m \in M^G$, und die Abbildung $(M \downarrow_H^G)^H \rightarrow M^G, m \mapsto \sum_{j=1}^l g_j m$ ist ein $\mathbb{Z}H$ -Modul-Homomorphismus. Dieser induziert für alle $i \in \mathbb{N}_0$ einen Homomorphismus

$$\text{tr} : H^i(H, M \downarrow_H^G) \rightarrow H^i(G, M).$$

Wir nennen ihn **Transfer** (siehe [We94], Transfer Maps 6.7.16).

- (c) Es ist $\text{tr} \circ \text{res}_H^G = [G : H] \cdot \text{id}_{H^i(G, M)}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Siehe [We94], Lemma 6.7.17. □

1.4.15 Bemerkung

Es sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}G$ -Moduln. Mit $H^i(G, M) \cong H^i(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, I))$ und (1.4.3) existieren verbindende Homomorphismen δ_n , so dass

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, B) \rightarrow H^0(G, C) \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, A) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H^{n-1}(G, C) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(G, A) \rightarrow H^n(G, B) \rightarrow H^n(G, C) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(G, A) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

eine lange exakte Sequenz ist.

1.4.16 Definition

Zwei wichtige Arten von verbindenden Homomorphismen sind die sogenannten **Bockstein-Homomorphismen**. Sie gehören zu den beiden kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{Z}^k \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k/p^2\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1.4.17 Lemma

Mit (1.1.5) induziert eine Operation von G auf \mathbb{Z}^k eine Operation auf $\mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{F}_p^k$ für jede Primzahl p . Damit gilt:

Falls $H^n(G, \mathbb{Z}^k)$ endlich ist und $p \mid |H^n(G, \mathbb{Z}^k)|$, so sind $H^n(G, \mathbb{F}_p^k)$ und $H^{n-1}(G, \mathbb{F}_p^k)$ nicht trivial.

Beweis:

Es sei $H^n(G, \mathbb{F}_p^k) = 0$. Da die Sequenz $H^n(G, \mathbb{Z}^k) \xrightarrow{p} H^n(G, \mathbb{Z}^k) \rightarrow H^n(G, \mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k) \cong H^n(G, \mathbb{F}_p^k) = 0$ exakt ist, ist die Multiplikation mit p surjektiv und damit ein Isomorphismus. Also kann p die Gruppenordnung nicht teilen.

Nun sei $H^{n-1}(G, \mathbb{F}_p^k) = 0$. Da die Sequenz $0 = H^{n-1}(G, \mathbb{F}_p^k) \cong H^{n-1}(G, \mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k) \rightarrow H^{n-1}(G, \mathbb{Z}^k) \xrightarrow{p} H^{n-1}(G, \mathbb{Z}^k)$ exakt ist, ist die Multiplikation mit p injektiv und damit ein Isomorphismus. Also kann p auch hier die Gruppenordnung nicht teilen, und somit folgt insgesamt die Behauptung. \square

1.4.18 Satz

Es sei G endlich und $M = \mathbb{Z}^k$. Gemäß (1.1.5) sind dann auch \mathbb{Q}^k und $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$ $\mathbb{Z}G$ -Moduln, und es gilt: $H^i(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) \cong H^{i+1}(G, \mathbb{Z}^k)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Q}^k \rightarrow \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k \rightarrow 0$ erhält man die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\cdots \rightarrow H^i(G, \mathbb{Q}^k) \rightarrow H^i(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) \rightarrow H^{i+1}(G, \mathbb{Z}^k) \rightarrow H^{i+1}(G, \mathbb{Q}^k) \rightarrow \cdots$$

Mit (1.4.12) ist $H^i(G, \mathbb{Q}^k) = 0 = H^{i+1}(G, \mathbb{Q}^k)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit sind die verbindenden Homomorphismen Isomorphismen. \square

1.4.19 Lemma

Es sei $0 =: M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_q := M$ eine Folge von $\mathbb{Z}G$ -Untermoduln von M , so dass $H^i(G, M_j)$ und $H^i(G, M_j/M_{j-1})$ für alle $1 \leq j \leq q$ endlich sind. Weiter sei p ein Primteiler von $|H^i(G, M)|$. Dann existiert ein $1 \leq j \leq q$ mit $p \mid |H^i(G, M_j/M_{j-1})|$.

Beweis:

Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow M_j/M_{j-1} \rightarrow 0$ erhalten wir für alle $1 \leq j \leq q$ die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H^i(G, M_{j-1}) \xrightarrow{\alpha_j} H^i(G, M_j) \xrightarrow{\beta_j} H^i(G, M_j/M_{j-1}) \rightarrow \cdots$$

Wir beginnen bei $j = q$. Nach Voraussetzung gilt dann $p \mid |H^i(G, M_j)|$.

1. Fall: $p \mid |\text{Bild}(\beta_j)|$

Dann ist $p \mid |H^i(G, M_j/M_{j-1})|$, und es folgt die Behauptung.

2. Fall: $p \nmid |\text{Bild}(\beta_j)|$

Dann ist $p \mid |\text{Kern}(\beta_j)| = |\text{Bild}(\alpha_j)|$, und es folgt: $p \mid |H^i(G, M_{j-1})|$.

Also können wir im zweiten Fall für $j = q - 1$ analog argumentieren. Wir iterieren dieses Verfahren so lange, bis der erste Fall eintritt. Dies geschieht spätestens bei $j = 1$, da $M_0 = 0$ ist und damit $p \nmid |\text{Kern}(\beta_1)| = 1$. Damit folgt die Behauptung. \square

Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Zassenhaus-Verfahren dient der Ermittlung bestimmter erster Kohomologie-Gruppen. Dabei ist, gerade auch im Hinblick auf eine Implementierung in GAP, die Charakterisierung über Derivationen sehr nützlich.

1.4.20 Definition und Bemerkung

- (a) Eine Abbildung $\delta : G \rightarrow M$ mit $\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) + g_1 \delta(g_2)$ für $g_1, g_2 \in G$ heißt **Derivation von G mit Werten in M** . Die Menge aller Derivationen von G mit Werten in M bezeichnen wir mit $Z^1(G, M)$.
- (b) Es sei $m \in M$. Eine Abbildung der Form $\delta_m : G \rightarrow M, g \mapsto gm - m$ heißt **innere Derivation von G mit Werten in M** . Die Menge aller inneren Derivationen von G mit Werten in M bezeichnen wir mit $B^1(G, M)$.

$Z^1(G, M)$ ist eine abelsche Gruppe mit punktweiser Addition und es gilt: $B^1(G, M) \leq Z^1(G, M)$. Des Weiteren ist $H^1(G, M) \cong Z^1(G, M)/B^1(G, M)$.

Beweis:

Siehe [We94], Theorem 6.4.5 □

1.4.21 Bemerkung

Jede Derivation ist durch die Bilder der Elemente einer Erzeugermenge von G eindeutig festgelegt. Falls G eine freie Gruppe ist, definiert jede beliebige Wahl von Bildern der Elemente einer Erzeugermenge von G eine Derivation.

Diese Eigenschaft machen wir uns unter anderem zu Nutze bei der Definition der sogenannten Fox-Derivationen, die beim Zassenhaus-Verfahren eine wichtige Rolle spielen:

1.4.22 Definition

Es sei $F := \langle x_1, \dots, x_l \rangle$ die freie Gruppe auf l Erzeugern. Für $1 \leq i \leq l$ heißt die Abbildung $\delta_i \in Z^1(F, \mathbb{Z}F)$, definiert durch $\delta_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta) für $1 \leq j \leq l$, die **i -te Fox-Derivation von F** . (Dabei operiert F auf $\mathbb{Z}F$ durch Linksmultiplikation.)

1.4.23 Lemma

Es sei $F := \langle x_1, \dots, x_l \rangle$ die freie Gruppe auf l Erzeugern und $\delta_i \in Z^1(F, \mathbb{Z}F)$ die i -te Fox-Derivation von F ($1 \leq i \leq l$).

- (a) Für alle $f \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\delta_i(f^n) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k \delta_i(f).$$

Insbesondere gilt: $\delta_i(x_i^n) = \sum_{k=0}^{n-1} x_i^k$ und $\delta_i(x_j^n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \neq j \leq l$

- (b) Für alle $f \in F, n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \neq j \leq l$ gilt:

$$\delta_i(x_i^n f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_i^k + x_i^n \delta_i(f) \quad \text{und} \quad \delta_i(x_j^n f) = x_j^n \delta_i(f).$$

Beweis:

$$(a) \quad n \rightarrow n+1: \quad \delta_i(f^{n+1}) = \delta_i(f) + f\delta_i(f^n) = \delta_i(f) + f \sum_{k=0}^{n-1} f^k \delta_i(f) = \sum_{k=0}^n f^k \delta_i(f).$$

(b) Dies folgt aus der Definition von Derivationen und aus (a). \square

1.4.24 Lemma

Es sei $F := \langle x_1, \dots, x_l \rangle$ die freie Gruppe auf l Erzeugern und M ein $\mathbb{Z}F$ -Modul. Weiter sei $\delta_i \in Z^1(F, \mathbb{Z}F)$ die i -te Fox-Derivation von F ($1 \leq i \leq l$) und $\hat{\delta} \in Z^1(F, M)$. Dann gilt:

$$\hat{\delta}(f) = \sum_{i=1}^l \delta_i(f) \hat{\delta}(x_i) \quad \forall f \in F.$$

Beweis:

Wir führen eine Induktion über die Wortlänge von f durch:

$$(a) \quad \hat{\delta}(x_j) = \delta_j(x_j) \hat{\delta}(x_j) = \sum_{i=1}^l \delta_i(x_j) \hat{\delta}(x_i) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq l$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \hat{\delta}(x_j f) &= \hat{\delta}(x_j) + x_j \hat{\delta}(f) = \hat{\delta}(x_j) + x_j \sum_{i=1}^l \delta_i(f) \hat{\delta}(x_i) \\ &= \delta_j(x_j) \hat{\delta}(x_j) + \sum_{i=1}^l [x_j \delta_i(f)] \hat{\delta}(x_i) = \sum_{i=1}^l [\delta_i(x_j) + x_j \delta_i(f)] \hat{\delta}(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^l \delta_i(x_j f) \hat{\delta}(x_i) \quad \text{für alle } f \in F, 1 \leq j \leq l \end{aligned} \quad \square$$

Man kann für alle $n \in \mathbb{N}$ allgemein $Z^n(G, M)$ und $B^n(G, M)$ definieren; dann ist jeweils auch $H^n(G, M) \cong Z^n(G, M)/B^n(G, M)$ (siehe [We94], Application 6.5.5). Analog zu (1.4.1) heißen Elemente von $Z^n(G, M)$ n -Cozykel und die Elemente von $B^n(G, M)$ n -Coränder. Im Fall von $n = 2$ spricht man auch von Faktorensystemen:

1.4.25 Definition

(a) Ein **Faktorensystem von G mit Werten in M** ist eine Abbildung $\alpha : G \times G \rightarrow M$, für die gilt:

- (i) $\alpha(g_1 g_2, g_3) + \alpha(g_1, g_2) = \alpha(g_1, g_2 g_3) + g_1 \alpha(g_2, g_3)$ für $g_1, g_2, g_3 \in G$,
- (ii) $\alpha(g, 1) = 0 = \alpha(1, g)$ für alle $g \in G$.

Die Menge aller Faktorensysteme von G mit Werten in M bezeichnen wir mit $Z^2(G, M)$.

(b) Es sei $\rho : G \rightarrow M$ eine Abbildung mit $\rho(1) = 0$. Eine Abbildung der Form

$$\alpha_\rho : G \times G \longrightarrow M, (g_1, g_2) \mapsto \rho(g_1) + g_1 \rho(g_2) - \rho(g_1 g_2)$$

heißt **prinzipales Faktorensystem von G mit Werten in M** . Die Menge aller prinzipialen Faktorensysteme von G mit Werten in M bezeichnen wir mit $B^2(G, M)$.

1.4.26 Definition und Satz (Hauptsatz der Erweiterungstheorie)

Im Folgenden betrachten wir M als abelsche Gruppe. Eine **Erweiterung von M mit G** ist eine Gruppe Γ , für die eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} \Gamma \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 1$$

existiert. (Exakte Sequenzen von Gruppen sind analog zu exakten Sequenzen von R -Moduln definiert.)

Zwei Erweiterungen Γ und Γ' von M mit G heißen **äquivalent**, wenn ein Isomorphismus $\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma & \xrightarrow{\psi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \mu & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi'} & \Gamma' & \xrightarrow{\psi'} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

kommutiert. Jede Erweiterung Γ ist äquivalent zu einer Erweiterung Γ_α mit $\alpha \in Z^2(G, M)$, definiert durch $\Gamma_\alpha := G \times M$, zusammen mit der Verknüpfung

$$(g, m)(\hat{g}, \hat{m}) := (g\hat{g}, m + g\hat{m} + \alpha(g, \hat{g})).$$

In diesem Fall ist $\varphi(m) := (1, m)$ und $\psi((g, m)) := g$. Die Operation von G auf M kann man interpretieren als Konjugation in Γ_α :

$$(g, 0)(1, m)(g, 0)^{-1} = (g, gm)(g, 0)^{-1} = (1, gm)(g, 0)(g, 0)^{-1} = (1, gm).$$

Zwei Erweiterungen Γ_α und Γ_β sind genau dann äquivalent, wenn $\alpha + B^2(G, \mathbb{Z}^k) = \beta + B^2(G, \mathbb{Z}^k)$ ist. In diesem Sinne klassifiziert $H^2(G, M)$ die Äquivalenzklassen von Erweiterungen von M mit G .

Beweis:

Siehe [We94], Classification Theorem 6.6.3. □

1.5 Das Zassenhaus-Verfahren

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren wurde von Zassenhaus ursprünglich zur Bestimmung von Raumgruppen konzipiert (siehe [Za48]). Hier wird es unter Verwendung eines anderen Vokabulars übersetzt in einen Algorithmus zur Bestimmung von $H^1(G, \mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k)$.

Zunächst aber betrachten wir ein weitgehend analoges Verfahren zur Bestimmung von $H^1(G, R^k)$. Dabei sei $k \in \mathbb{N}$, R ein Integritätsbereich und G eine Gruppe, die auf R^k operiert. Damit können wir R^k als $\mathbb{Z}G$ -Modul betrachten.

Für G sei eine endliche Präsentation gegeben durch $G := \langle g_1, \dots, g_l \rangle \cong \langle x_1, \dots, x_l \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, wobei die $g_i \in G$ den Erzeugern x_i der Präsentation entsprechen. Ferner sei $F := \langle x_1, \dots, x_l \rangle$ die zugehörige freie Gruppe.

Es sei $\Phi : RG \rightarrow R^{k \times k}$ die durch die Operation von G auf R^k bewirkte Matrixdarstellung von G bezüglich der Standard-Basis $\{e_1, \dots, e_k\}$ von R^k (siehe 1.1.4). Damit wird die Operation von G auf R^k beschrieben durch $gv := (\Phi(g))v$ für $g \in \mathbb{Z}G, v \in R^k$.

Definiere nun $\varphi : F \rightarrow G$ durch $x_i \mapsto g_i$. Die kanonische Fortsetzung zur Abbildung

$RF \rightarrow RG$ sei ebenfalls mit φ bezeichnet. Dann wird R^k analog zu oben zu einem RF -Modul vermöge φ (bzw. vermöge $\Phi \circ \varphi$). Die Derivationen von F mit Werten in R^k sind nun aber bekannt, da jede beliebige Wahl von Bildern der x_i eine solche Derivation definiert (siehe 1.4.21). Die Idee des Zassenhaus-Verfahrens besteht darin, diejenigen Derivationen von F zu ermitteln, die eine Derivation von G induzieren.

1.5.1 Lemma

Für dieses Lemma sei $\varphi : F \rightarrow G$ wie oben.

- (a) Für alle Derivationen $\delta \in Z^1(G, R^k)$ ist $\delta \circ \varphi$ eine Derivation in $Z^1(F, R^k)$.
- (b) Es sei $\hat{\delta} \in Z^1(F, R^k)$ eine Derivation. Dann existiert eine Derivation $\delta \in Z^1(G, R^k)$ mit $\hat{\delta} = \delta \circ \varphi$ genau dann, wenn $\hat{\delta}(r_j) = 0$ ist für alle $1 \leq j \leq m$. Das heißt, in diesem Fall induziert $\hat{\delta}$ eine Derivation $\delta \in Z^1(G, R^k)$, die durch $\delta(g_i) := \hat{\delta}(x_i)$ für alle $1 \leq i \leq l$ eindeutig festgelegt ist.

Beweis:

- (a) Für alle $f, f' \in F$ gilt:

$$\delta \circ \varphi(ff') = \delta(\varphi(f)\varphi(f')) = \delta(\varphi(f)) + \varphi(f)\delta(\varphi(f')) = \delta \circ \varphi(f) + f(\delta \circ \varphi(f')).$$
- (b) „ \Rightarrow “: $\hat{\delta}(r_j) = \delta \circ \varphi(r_j) = \delta(1) = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$.
 „ \Leftarrow “: Definiere δ durch $g \mapsto \hat{\delta}(f)$ für jeweils ein beliebiges $f \in \varphi^{-1}(g) \neq \emptyset$. Falls δ dann wohldefiniert ist, ist es automatisch eine Derivation. Zu zeigen ist also, dass $\hat{\delta}(f) = \hat{\delta}(f')$ für $f, f' \in \varphi^{-1}(g)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\hat{\delta}(f) = 0$ ist für alle $f \in \text{Kern}(\varphi) = \langle\langle r_j \mid 1 \leq j \leq m \rangle\rangle = \langle x^{-1}r_jx \mid 1 \leq j \leq m, x \in F \rangle$ (siehe 1.3.1). Dies ist aber richtig, denn es gilt für $x \in F$ und $1 \leq j \leq m$:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x^{-1}r_jx) &= \hat{\delta}(x^{-1}) + x^{-1}(\hat{\delta}(r_j) + r_j\hat{\delta}(x)) = \hat{\delta}(x^{-1}) + x^{-1}(0 + \varphi(r_j)\hat{\delta}(x)) \\ &= \hat{\delta}(x^{-1}) + x^{-1}\hat{\delta}(x) = \hat{\delta}(x^{-1}x) = \hat{\delta}(1) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

1.5.2 Folgerung und Definition

Wie bereits erwähnt, kann man durch eine beliebige Wahl von $v_1, \dots, v_l \in R^k$ eine Derivation $\hat{\delta} \in Z^1(F, R^k)$ durch $\hat{\delta}(x_i) := v_i$ ($1 \leq i \leq l$) eindeutig definieren. Gesucht sind nun diejenigen $v_1, \dots, v_l \in R^k$, für die $\delta(g_i) := v_i$ ($1 \leq i \leq l$) eine Derivation aus $Z^1(G, R^k)$ definiert. Diese erhält man folgendermaßen:

Für $1 \leq i \leq l$ seien $\delta_i \in Z^1(F, \mathbb{Z}F)$ die i -ten Fox-Derivationen auf F . Weiter sei $\hat{\delta} \in Z^1(F, R^k)$ durch $v_1, \dots, v_l \in R^k$ definiert. Gemäß (1.4.24) und der Definition von Φ und φ gilt dann:

$$\hat{\delta}(r_j) = \sum_{i=1}^l \delta_i(r_j)v_i = \sum_{i=1}^l (\Phi \circ \varphi)(\delta_i(r_j))v_i$$

Daraus folgt mit

$$A_{G,R,k} := \begin{pmatrix} (\Phi \circ \varphi)(\delta_1(r_1)) & \cdots & (\Phi \circ \varphi)(\delta_l(r_1)) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Phi \circ \varphi)(\delta_1(r_m)) & \cdots & (\Phi \circ \varphi)(\delta_l(r_m)) \end{pmatrix} \in R^{k \times m \times kl} \quad \text{und}$$

$$v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} \in R^{kl} \quad \text{mit} \quad v_i = \begin{pmatrix} v_{k(i-1)+1} \\ \vdots \\ v_{ki} \end{pmatrix} \in R^k \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq l,$$

dass $\hat{\delta}(r_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$ genau dann gilt, wenn $A_{G,R,k}v = 0 \in R^{km}$ ist. In diesem Fall definiert v gemäß (1.5.1) eine Derivation von G . Damit ist die Abbildung

$$\psi : \text{Kern}(A_{G,R,k}) \longrightarrow Z^1(G, R^k), v \mapsto (\delta : G \rightarrow R^k, g_i \mapsto v_i \forall 1 \leq i \leq l)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Matrizen der Form $A_{G,R,k}$ seien als **Zassenhaus-Matrizen** bezeichnet.

1.5.3 Bemerkung

Es sei $I_{G,R,k} := \begin{pmatrix} \Phi(g_1) - 1 \\ \vdots \\ \Phi(g_l) - 1 \end{pmatrix} \in R^{kl \times k}$ und $Sp(I_{G,R,k})$ der von den Spalten von $I_{G,R,k}$

erzeugte freie R -Modul.

Das Urbild einer inneren Derivation $\delta_a : G \rightarrow R^k, g \mapsto ga - a$ bezüglich ψ ist wegen $\delta_a(g_i) = g_i a - a = (\Phi(g_i) - 1)a$ für $1 \leq i \leq l$ gegeben durch $\psi^{-1}(\delta_a) = I_{G,R,k}a \in R^{kl}$ für alle $a \in R^k$. Damit ist $Sp(I_{G,R,k}) \leq \text{Kern}(A_{G,R,k})$, und es sind $Sp(I_{G,R,k})$ und $B^1(G, R^k)$ isomorph als abelsche Gruppen vermöge $\psi|_{Sp(I_{G,R,k})}$.

1.5.4 Folgerung

Mit (1.5.2) und (1.5.3) erhalten wir die folgende Isomorphie abelscher Gruppen:

$$H^1(G, R^k) \cong Z^1(G, R^k)/B^1(G, R^k) \cong \text{Kern}(A_{G,R,k})/Sp(I_{G,R,k}).$$

1.5.5 Bemerkung

Für $R = \mathbb{Q}$ ist $\text{Kern}(A_{G,\mathbb{Q},k}) = Sp(I_{G,\mathbb{Q},k})$, denn gemäß (1.4.12) ist $H^1(G, \mathbb{Q}^k) = 0$.

Das eigentliche Zassenhaus-Verfahren entspricht, wie oben erwähnt, der Bestimmung von $H^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k)$. Das ist kein Spezialfall des Bisherigen, da \mathbb{Q}/\mathbb{Z} kein Ring ist. Es liegt aber das gleiche Prinzip zugrunde.

Wir betrachten wieder eine Operation von G auf \mathbb{Z}^k mit zugehöriger Matrixdarstellung Φ . Dann wird $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$ durch die induzierte Operation (siehe 1.1.5) zum $\mathbb{Z}G$ -Modul. Analog zu (1.5.2) erhalten wir: $v + \mathbb{Z}^{kl}$ mit $v \in \mathbb{Q}^{kl}$ definiert genau dann eine Derivation von G mit Werten in $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$, wenn $A_{G,\mathbb{Z},k}v + \mathbb{Z}^{km} = 0 \in \mathbb{Q}^{km}/\mathbb{Z}^{km}$ ist, oder anders ausgedrückt: wenn $A_{G,\mathbb{Z},k}v \in \mathbb{Z}^{km}$ ist.

Es sei also $D := \{v \in \mathbb{Q}^{kl} \mid A_{G,\mathbb{Z},k}v \in \mathbb{Z}^{km}\}$. Dann ist die Abbildung

$$\psi : D \longrightarrow Z^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k), v \mapsto [\delta : G \rightarrow \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k, g_i \mapsto v_i + \mathbb{Z}^k \quad \forall 1 \leq i \leq l]$$

ein Epimorphismus abelscher Gruppen. Der Kern von ψ ist gleich $\mathbb{Z}^{kl} \leq D$. Daher erhalten wir einen Isomorphismus:

$$\tilde{\psi} : D/\mathbb{Z}^{kl} \longrightarrow Z^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k), v + \mathbb{Z}^{kl} \mapsto \psi(v).$$

Mit $Sp(I_{G,\mathbb{Q},k})$, definiert wie in (1.5.3), und $a \in \mathbb{Q}^{kl}$ ist $\tilde{\psi}(a + \mathbb{Z}^{kl}) \in B^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k)$ genau dann, wenn $a \in Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl}$ ist. Es sind also $B^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k)$ und $(Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl})/\mathbb{Z}^{kl}$ isomorph als abelsche Gruppen. Damit erhalten wir:

1.5.6 Lemma

$$\begin{aligned} H^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) &\cong Z^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k)/B^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) \\ &\cong (D/\mathbb{Z}^{kl}) / ((Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl})/\mathbb{Z}^{kl}) \\ &\cong D/(Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl}) \end{aligned}$$

1.5.7 Bemerkung

Es sei $r := \text{Rang}(A_{G,\mathbb{Z},k})$, und es seien $S \in GL_{km}(\mathbb{Z})$ und $T \in GL_{kl}(\mathbb{Z})$ mit

$$SA_{G,\mathbb{Z},k}T := \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ \hline & & & \mathbf{0} \end{array} \right),$$

so dass d_1, \dots, d_r die (normierten) Invariantenteiler von $A_{G,\mathbb{Z},k}$ sind.

(a) Wegen $Sw \in \mathbb{Z}^{km} \Leftrightarrow w \in \mathbb{Z}^{km}$ für $w \in \mathbb{Q}^{km}$ gilt:

$$\{v \in \mathbb{Q}^{kl} \mid SA_{G,\mathbb{Z},k}TT^{-1}v \in \mathbb{Z}^{km}\} = D \cong T^{-1}D = \{v' \in \mathbb{Q}^{kl} \mid SA_{G,\mathbb{Z},k}Tv' \in \mathbb{Z}^{km}\}.$$

Damit ist $T^{-1}D$ das \mathbb{Z} -Modul-Erzeugnis von

$$\left\{ \frac{1}{d_i}e_i \mid 1 \leq i \leq r \right\} \cup \{qe_i \mid q \in \mathbb{Q}, r+1 \leq i \leq kl\} \quad (\text{mit Einheitsvektoren } e_1, \dots, e_{kl}).$$

(b) Für $v \in \mathbb{Q}^{kl}$ ist $A_{G,\mathbb{Z},k}v = 0$ genau dann, wenn $SA_{G,\mathbb{Z},k}TT^{-1}v = 0$. Fassen wir nun $A_{G,\mathbb{Z},k} =: A_{G,\mathbb{Q},k}$ als Matrix über \mathbb{Q} auf, dann gilt mit (1.5.5):

$$T^{-1}Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) = T^{-1}\text{Kern}(A_{G,\mathbb{Q},k}) = \text{Kern}(SA_{G,\mathbb{Q},k}T) = \langle e_i \mid r+1 \leq i \leq kl \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Daraus ergibt sich, dass $T^{-1}(Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl}) = T^{-1}Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl}$ das \mathbb{Z} -Modul-Erzeugnis von $\{e_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{qe_i \mid q \in \mathbb{Q}, r+1 \leq i \leq kl\}$ ist.

1.5.8 Satz

Die Gruppe G operiere auf \mathbb{Z}^k . Es sei $r = \text{Rang}(A_{G,\mathbb{Z},k})$, und d_{i_0}, \dots, d_r seien die von 1 verschiedenen (normierten) Invariantenteiler von $A_{G,\mathbb{Z},k}$. Mit der induzierten Operation von G auf $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$ gilt:

$$H^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) \cong \bigoplus_{i=i_0}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

Beweis:

Mit T wie oben folgt aus (1.5.6) und (1.5.7):

$$H^1(G, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) \cong T^{-1}D/(T^{-1}Sp(I_{G,\mathbb{Q},k}) + \mathbb{Z}^{kl}) \cong \langle \frac{1}{d_i}e_i \mid 1 \leq i \leq r \rangle_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}^r$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Kapitel 2

Die Bestimmung von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash n$ eine Partition von n und $k := \text{Rang}(S^\lambda)$ der Rang des zugehörigen Spechtmoduls.

Wie der Satz (1.4.26) zeigt, ist die Bestimmung von $H^2(S_n, S^\lambda)$ im Zusammenhang mit der Erweiterungstheorie interessant:

Es sei zunächst K ein Körper der Charakteristik 0. Dann ist jeder Spechtmodul S_K^λ ein \mathbb{Q} -Vektorraum, und mit (1.4.12) ist $H^2(S_n, S_K^\lambda) = 0$.

Bei Spechtmoduln über Körpern mit positiver Charakteristik ist über die zweite Kohomologie wenig bekannt. In diesem Zusammenhang verweise ich auf den Artikel [BKM96] von Burichenko, Kleshchev und Martin. Er befasst sich hauptsächlich mit den ersten und zweiten Kohomologiegruppen von dualen Spechtmoduln über Körpern der Charakteristik $p > 2$. Für bestimmte Partitionen λ finden sich in dem Artikel aber außerdem Aussagen über $H^2(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda)$ für Primzahlen $p \neq 2$. Darauf werden wir in (2.3.2) noch einmal zurückkommen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Bestimmung von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$. Dies ist einerseits wegen der im Vorwort vorgestellten Vermutung von Szczepański (siehe [Sz03]) von Interesse, andererseits wegen des Zusammenhangs zwischen $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ und $H^2(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda)$ (siehe 1.4.17).

Zur Bestimmung von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ wollen wir das Zassenhaus-Verfahren verwenden. Primär geht es dabei um die Implementation in GAP; für einige wenige Partitionen kann man allerdings mit Hilfe des Zassenhaus-Verfahrens auch theoretische Aussagen über $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ treffen.

Es sei $\Phi_\lambda : \mathbb{Z}S_n \rightarrow \mathbb{Z}^{k \times k}$ die durch den Spechtmodul $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$ bewirkte Matrixdarstellung von S_n bezüglich der Standardbasis $SP(\lambda)$ von $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$. Dann wird \mathbb{Z}^k zum $\mathbb{Z}S_n$ -Modul via $gv := (\Phi_\lambda(g))v$ für alle $g \in \mathbb{Z}S_n, v \in \mathbb{Z}^k$.

Des Weiteren sei die Zassenhaus-Matrix $A_\lambda(P) := A_{S_n, \mathbb{Z}, k} \in \mathbb{Z}^{km \times kl}$ bezüglich einer Präsentation P von S_n mit l Erzeugern und m Relationen definiert wie in (1.5.2). Es sei $r := \text{Rang}(A_\lambda(P))$, und d_{i_0}, \dots, d_r seien die von 1 verschiedenen (normierten) Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$. Dann erhalten wir mit (1.4.18) und (1.5.8):

$$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong H^2(S_n, \mathbb{Z}^k) \cong H^1(S_n, \mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k) \cong \bigoplus_{i=i_0}^r \mathbb{Z} / d_i \mathbb{Z}.$$

$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ ist also eine endliche abelsche Gruppe, deren Isomorphietyp sich folgendermaßen bestimmen lässt:

- (a) Wähle eine endliche Präsentation P von S_n .
- (b) Bestimme die Bilder der zur Präsentation gehörigen Erzeuger von S_n unter der Darstellung Φ_λ .
- (c) Berechne die Matrix $A_\lambda(P)$.
- (d) Bestimme die Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$.

Die Wahl der Präsentation ist theoretisch beliebig, beeinflusst aber die Größe und Komplexität der zugehörigen Zassenhaus-Matrizen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir die beiden Präsentationen G_n und H_n aus (1.3.5).

In [CM72] finden sich Beispiele für weitere Präsentationen. Die meisten davon sind sehr ähnlich zu G_n , besitzen aber mehr Relationen. Daher verzichten wir hier darauf, Zassenhaus-Matrizen bezüglich dieser Präsentationen zu untersuchen.

2.1 Zassenhaus-Matrizen zu $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$

Der Fall $n = 1$ ist trivial. Im Folgenden sei immer $n \geq 2$.

Bevor wir die konkreten Präsentationen G_n und H_n betrachten, folgt zunächst eine allgemeine Überlegung zum Rang von Zassenhaus-Matrizen.

2.1.1 Lemma

- (a) Es sei $I_\lambda(P) := I_{S_n, \mathbb{Z}, k} = \begin{pmatrix} \Phi_\lambda(g_1) - 1 \\ \vdots \\ \Phi_\lambda(g_l) - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{kl \times k}$ bezüglich einer Präsentation P von S_n (siehe 1.5.3). Dann ist $I_\lambda(P) = 0$ für $\lambda = (n)$, ansonsten ist $\text{Rang}(I_\lambda(P)) = k$.
- (b) Für $\lambda = (n)$ ist $\text{Rang}(A_\lambda(P)) = kl$, ansonsten ist $\text{Rang}(A_\lambda(P)) = k(l - 1)$.

Beweis:

- (a) Die triviale Darstellung wird durch $\lambda = (n)$ beschrieben. Damit ist $I_{(n)}(P) = 0$ für alle n und alle Präsentationen P .
Die alternierende Darstellung wird durch $\lambda = (1^n)$ beschrieben. Damit ist $k = 1$. Jede Erzeugermenge von S_n muss mindestens ein Element mit Signum -1 enthalten. Daher ist mindestens ein Eintrag in $I_{(1^n)}(P)$ gleich -2 für alle Präsentationen P . Somit hat $I_{(1^n)}$ vollen Rang.
Sei nun $\lambda \notin \{(n), (1^n)\}$. Dann ist $k \geq 2$ (siehe 1.2.22). Per Konstruktion der Spechtmoduln liefert $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$ die gleiche Matrix-Darstellung wie $S_{\mathbb{Q}}^\lambda$. Damit ist die zugehörige Matrix $I_{S_n, \mathbb{Q}, k} = I_\lambda(P)$.
Angenommen, $\text{Rang}(I_{S_n, \mathbb{Q}, k}) < k$. Dann existiert ein $0 \neq a := (a_1, \dots, a_k)^{tr} \in \mathbb{Q}^k$ mit $I_{S_n, \mathbb{Q}, k} a = 0$. Damit ist dieses a für alle $1 \leq i \leq l$ ein Eigenvektor von $\Phi_\lambda(g_i)$ zum Eigenwert 1. Daraus folgt, dass $\sum_{i=1}^k a_i e_i \in S_{\mathbb{Q}}^\lambda$ von allen Erzeugern und damit von ganz S_n festgelassen wird. Somit hätte $S_{\mathbb{Q}}^\lambda$ einen S_n -invarianten Untermodul

vom Rang 1. Dies ist aber ein Widerspruch, da $S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}$ ein einfacher S_n -Modul ist (siehe 1.2.25). Also ist $\text{Rang}(I_{S_n, \mathbb{Q}, k}) = \text{Rang}(I_{\lambda}(P)) = k$.

- (b) Da die symmetrischen Gruppen endlich sind, ist in jeder Präsentation $l \leq m$ (siehe 1.3.4). Damit ist $\text{Rang}(A_{\lambda}(P)) \leq kl$. Mit (1.5.5) ist $\dim(\text{Kern}(A_{\lambda}(P))) = \text{Rang}(I_{\lambda}(P))$. Also folgt mit (a) die Behauptung. \square

Kommen wir nun zur Präsentation H_n von S_n aus (1.3.5 (a)). Zunächst ordnen wir deren Relationen in einer anderen Reihenfolge an:

Es sei $F := \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ die freie Gruppe auf $n - 1$ Erzeugern. Für $1 \leq i \leq n - 1$ sei $\mathcal{R}(i)$ die Menge der Relationen $\{(s_1 s_i)^2, \dots, (s_{i-2} s_i)^2, (s_{i-1} s_i)^3, s_i^2\}$ auf den freien Erzeugern s_1, \dots, s_{n-1} . Insbesondere ist $\mathcal{R}(1) = \{s_1^2\}$ und $\mathcal{R}(2) = \{(s_1 s_2)^3, s_2^2\}$. Dann ist

$$H_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \mathcal{R}(1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(n-1) \rangle.$$

Diese Anordnung der Relationen hat per Konstruktion die schöne Eigenschaft, dass man H_n aus H_{n+1} erhält, indem man den Erzeuger s_n und die Relationen $\mathcal{R}(n)$ weglässt. Außerdem bekommt die zugehörige Zassenhaus-Matrix eine schöne Struktur, wie wir unten sehen werden.

Für $1 \leq i \leq n - 1$ seien $\delta_i \in Z^1(F, \mathbb{Z}F)$ die zu F gehörigen Fox-Derivationen, also definiert durch $\delta_i(s_j) := \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta). Bestimme nun $\delta_i(r)$ für alle $1 \leq i \leq n - 1$ und alle Relationen $r \in \mathcal{R}(1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(n - 1)$ mit Hilfe der Regeln aus (1.4.23). Dazu sei $1 \leq j \leq n - 1$. Dann gilt:

- (a) $\delta_i(s_i^2) = 1 + s_i$
 $\delta_j(s_i^2) = 0$ für $j \neq i$
- (b) $\delta_i((s_{i-1} s_i)^3) = s_{i-1} + s_{i-1} s_i s_{i-1} + s_i$
 $\delta_{i-1}((s_{i-1} s_i)^3) = 1 + s_{i-1} s_i + s_i s_{i-1}$
 $\delta_j((s_{i-1} s_i)^3) = 0$ für $j \neq i - 1, i$
- (c) Sei $1 \leq q \leq i - 2$
 $\delta_i((s_q s_i)^2) = s_q + s_i$
 $\delta_q((s_q s_i)^2) = 1 + s_q s_i$
 $\delta_j((s_q s_i)^2) = 0$ für $j \neq i, q$

Wir setzen $\Sigma_i := \Phi_{\lambda}(s_i)$ für $1 \leq i \leq n - 1$ und definieren damit zunächst Matrizen $A(i) \in \mathbb{Z}^{ki \times ki}$ durch:

$$A(i) := \begin{pmatrix} 1 + \Sigma_1 \Sigma_i & & & & \Sigma_1 + \Sigma_i \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 + \Sigma_{i-2} \Sigma_i & & \Sigma_{i-2} + \Sigma_i \\ & & & 1 + \Sigma_{i-1} \Sigma_i + \Sigma_i \Sigma_{i-1} & \Sigma_{i-1} + \Sigma_{i-1} \Sigma_i \Sigma_{i-1} + \Sigma_i \\ & & & & \Sigma_i + 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \delta_a((ab)^{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i \delta_a(ab) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i (1+0) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i$$

$$\delta_b((ab)^{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i \delta_b(ab) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i (0+a) = \sum_{i=0}^{n-2} (ab)^i a$$

(d) Für $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \delta_a((ab^j ab^{n-j})^2) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) \delta_a(ab^j ab^{n-j}) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) (1 + a \delta_a(b^j ab^{n-j})) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) (1 + ab^j \delta_a(ab^{n-j})) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) (1 + ab^j (1 + a \delta_a(b^{n-j}))) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) (1 + ab^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_b((ab^j ab^{n-j})^2) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) \delta_b(ab^j ab^{n-j}) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) a \delta_b(b^j ab^{n-j}) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) a \left(\sum_{i=0}^{j-1} b^i + b^j \delta_b(ab^{n-j}) \right) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) a \left(\sum_{i=0}^{j-1} b^i + b^j a \delta_b(b^{n-j}) \right) \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) a \left(\sum_{i=0}^{j-1} b^i + b^j a \sum_{i=0}^{n-j-1} b^i \right) \end{aligned}$$

Damit ist die zugehörige Zassenhaus-Matrix bestimmt:

2.1.3 Lemma

Es sei $n \geq 3$ und $A := \Phi_{\lambda}(a), B := \Phi_{\lambda}(b) \in \mathbb{Z}^{k \times k}$. Dann ist die Zassenhaus-Matrix zu $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$ bezüglich G_n gegeben durch die Blockmatrix:

$$A_{\lambda}(G_n) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + A & 0 \\ \hline 0 & \sum_{i=0}^{n-1} B^i \\ \hline \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i & \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i A \\ \hline (1 + AB^j AB^{n-j})(1 + AB^j) & (1 + AB^j AB^{n-j}) A \left(\sum_{i=0}^{j-1} B^i + B^j A \sum_{i=0}^{n-j-1} B^i \right) \\ \hline 2 \leq j \leq \frac{n}{2} & 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{array} \right)$$

(Die unteren beiden Blöcke sind so zu lesen, dass es für jedes $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$ eine Blockzeile dieser Gestalt gibt.)

Ihr Rang ist gemäß (2.1.1) gleich 2 für $\lambda = (n)$, ansonsten gleich k . \square

2.1.4 Bemerkung

Zur Berechnung von $A_{\lambda}(G_n)$ und $A_{\lambda}(H_n)$ mit GAP (siehe A.1, A.2) benötigen wir zunächst die erzeugenden Matrizen A und B (siehe 2.1.3), beziehungsweise Σ_i (siehe 2.1.2). Für die Matrizen A und B können wir dabei auf die von Dr. Lübeck erstellte Bibliothek `spechtmats.g` zurückgreifen. Der Aufruf `SpechtMatrices(λ)` liefert eine Liste der Form $[B, A]$. Im Fall $n \leq 20$ und $k \leq 8000$ sind die betreffenden Matrizen bereits berechnet und gespeichert, so dass hier kein zusätzlicher Rechenaufwand nötig ist. Aus diesen beiden Matrizen lassen sich die Σ_i mit geringem Aufwand bestimmen, da $\Sigma_1 = A$ und $\Sigma_{i+1} = B\Sigma_i B^{-1}$ ist für alle $1 \leq i \leq n-2$.

Die Matrix $A_{\lambda}(H_n)$ ist um ein Vielfaches größer als die entsprechende Matrix $A_{\lambda}(G_n)$, daher dauert ihre Berechnung wesentlich länger. Da $A_{\lambda}(H_n)$ dünner besetzt ist und ihre $(k \times k)$ -Blöcke eine einfachere Struktur besitzen, könnte man die Berechnung beschleunigen, indem man ein Format wählt, in dem die Null-Einträge nicht explizit gespeichert werden. In unserem Fall jedoch ist eine derartige Methode für die weitere Bearbeitung nicht geeignet.

2.2 Invariantenteiler von Zassenhaus-Matrizen

Zur Bestimmung von Invariantenteilern bietet GAP die Funktion `ElementaryDivisorsMat` an. Diese ist allerdings in der vorliegenden Situation nicht mächtig genug. Statt dessen verwenden wir die Funktion `ElementaryDivisorsPPartRk` aus dem von Dr. Lübeck implementierten GAP-Paket `edim` (Abkürzung für „elementary divisors of integer matrices“). Diese Funktion berechnet zu einer vorgegebenen Primzahl p die zugehörigen Elementarteiler einer Matrix, also die p -Anteile der Invariantenteiler. Das genügt, da die 1 als Invariantenteiler in diesem Zusammenhang ohnehin nicht von Interesse ist (siehe 1.5.7). Zudem kommt in der vorliegenden Situation nur eine begrenzte Anzahl von Primzahlen überhaupt in Frage: Gemäß (1.4.13) ist $|S_n|H^1(S_n, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k) = 0$. Also können die Ordnung von $H^1(S_n, \mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k)$ und damit die Invariantenteiler von $A_{\lambda}(P)$ nur Primteiler von $n!$ besitzen. Das heißt, wir brauchen nur für Primzahlen $p \leq n$ nach zugehörigen Elementarteilern zu suchen.

Schließlich ist noch anzumerken, dass `ElementaryDivisorsPPartRk` neben der Matrix und der Primzahl p auch den Rang der Matrix als Eingabe benötigt. Dieser ist in unserem Fall aber bekannt (siehe 2.1.1).

In der Dokumentation zum Paket `edim` (siehe [Lü06]) heißt es, dass mit der Funktion `ElementaryDivisorsPPartRk` bereits Matrizen von Dimensionen größer als 11000 bearbeitet wurden, die viele nichttriviale Invariantenteiler, bestehend aus Produkten vieler kleiner Primzahlen, besitzen. Da die hier betrachteten Matrizen (zumindest für kleine n) nur wenige Elementarteiler besitzen (siehe B.1), können hier Matrizen von Dimensionen in einer Größenordnung von $1,8 \cdot 10^8$ noch bearbeitet werden.

Die Funktion `CohoSpecht` ermöglicht es, die Invariantenteiler von Zassenhausmatrizen sowohl von der Form $A_{\lambda}(G_n)$ als auch von der Form $A_{\lambda}(H_n)$ zu bestimmen (siehe A.3). Es empfiehlt sich aber die Verwendung von $A_{\lambda}(G_n)$, da `ElementaryDivisorsPPartRk` auf den deutlich größeren Matrizen $A_{\lambda}(H_n)$ viel langsamer arbeitet.

Im Folgenden betrachten wir einige Fälle, in denen man die Invariantenteiler der Zassenhaus-Matrizen auch ohne Zuhilfenahme eines Rechners berechnen kann. Um weiter unten zusätzliche Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei zunächst $n = 2$.

2.2.1 Lemma

Verwende die Präsentation $H_2 = \langle s_1 \mid s_1^2 \rangle$. Da es nur einen Erzeuger gibt, gibt es auch nur eine Fox-Derivation δ_1 .

(a) Für $\lambda = (2)$ gilt mit (1.2.24 (a)):

$$A_\lambda(H_2) = (\Phi_\lambda \circ \varphi(\delta_1(s_1^2))) = (\Phi_\lambda(1 + (1, 2))) = (1) + (1) = (2).$$

(b) Für $\lambda = (1^2)$ gilt mit (1.2.24 (b)):

$$A_\lambda(H_2) = (\Phi_\lambda \circ \varphi(\delta_1(s_1^2))) = (\Phi_\lambda \circ \varphi(1 + s_1)) = (\Phi_\lambda(1 + (1, 2))) = (1) + (-1) = (0).$$

Es ist also $H^2(S_2, S_{\mathbb{Z}}^{(2)}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $H^2(S_2, S_{\mathbb{Z}}^{(1^2)}) = 0$. \square

Im Folgenden sei immer $n \geq 3$.

2.2.2 Lemma

Es sei $A_\lambda := A_\lambda(G_n)$. Für $\lambda = (n)$ ist die Invariantenteilerform von A_λ : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Es ist also $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{(n)}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis:

Aus (1.2.24 (a)) wissen wir, dass für $\lambda = (n)$ gilt, dass $A = B = (1) \in \mathbb{Z}^{1 \times 1}$ ist. Mit (2.1.3) erhält man die Zassenhaus-Matrix:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & n \\ n-1 & n-1 \\ 4 & 2n \\ \vdots & \vdots \\ 4 & 2n \end{pmatrix}$$

Die Zeilen der Form $(4 \ 2n)$ existieren nur für $n \geq 4$, und dann sind sie jeweils eine \mathbb{Z} -Linearkombination der ersten beiden Zeilen. Es genügt also, den obersten (3×2) -Block zu betrachten:

- n ungerade:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(n-1)^2 & 2-n & n-1 \\ -\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1 & 3-n & n-2 \\ -\frac{1}{2}n(n-1) & 1-n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & n \\ n-1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- n gerade:

$$\begin{pmatrix} -n(\frac{n}{2}-1) & 2-n & n-1 \\ -\frac{1}{2}(n-1)(n-2) & 3-n & n-2 \\ -\frac{1}{2}n(n-1) & 1-n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & n \\ n-1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\square

2.2.3 Lemma

Es sei $A_\lambda := A_\lambda(G_n)$. Für $\lambda = (1^n)$ ist die Invariantenteilerform von A_λ entweder $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ (für $n \in \{3, 4\}$) oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ (für $n \geq 5$).

Es ist also $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{(1^n)}) \begin{cases} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{für } n \in \{3, 4\} \\ = 0 & \text{für } n \geq 5 \end{cases}$.

Beweis:

Aus (1.2.24 (b)) wissen wir, dass für $\lambda = (1^n)$ gilt, dass $A = (\text{sgn}(1, 2)) = (-1)$ ist und $B = (\text{sgn}(1, 2, \dots, n)) = ((-1)^{n-1}) \in \mathbb{Z}^{1 \times 1}$. Damit erhalten wir die folgenden Zassenhaus-Matrizen:

(a) Für $n = 3$ ist $A = (-1), B = (1)$ und damit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für $n = 4$ ist $A = B = (-1)$ und damit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $n \geq 5$, n ungerade, ist $A = (-1), B = (1)$ und damit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \\ 0 & 0 \\ 0 & 2n - 4 \cdot 2 \\ 0 & 2n - 4 \cdot 3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 2n - 4 \frac{n-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \\ 0 & 0 \\ 0 & 2n - 8 \\ 0 & 2n - 12 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Subtrahiert man das $\frac{n-1}{2}$ -fache der letzten Zeile von der zweiten, so wird diese zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, und man kann mit ihr die übrigen Zeilen ausräumen.

(d) Für $n \geq 5$, n gerade, ist $A = B = (-1)$. Also gilt:

$$1 + A = 0 = \sum_{i=0}^{n-1} B^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i = n - 1 = - \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i A$$

$$(1 + AB^j AB^{n-j})(1 + AB^j) = (1 + (-1)^{n+2})(1 + (-1)^{j+1}) = \begin{cases} 4 & \text{für } j \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } j \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + AB^j AB^{n-j})A \left(\sum_{i=0}^{j-1} B^i + B^j A \sum_{i=0}^{n-j-1} B^i \right) \\
&= (1 + (-1)^{n+2})(-1) \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i + \sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^{i+j+1} \right) \\
&= -2 \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i + \sum_{i=j+1}^n (-1)^i \right) = -2 \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i - (-1)^j \right) \\
&= -2(1 + (-1)^{j+1}) = \begin{cases} -4 & \text{für } j \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } j \text{ gerade} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Es genügt daher, die Matrix $\begin{pmatrix} n-1 & 1-n \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ zu betrachten. Deren Invariantenteilerform lautet:

- für $\frac{n}{2}$ ungerade: $\begin{pmatrix} -3 & n - \frac{n+2}{4} \\ -4 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 & 1-n \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- für $\frac{n}{2}$ gerade: $\begin{pmatrix} -1 & \frac{n}{4} \\ -4 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 & 1-n \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

2.2.4 Lemma

Es sei $n \geq 3$ und $\lambda := (n-1, 1)$. Dann ist $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) = 0$ für ungerades n und $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für gerades n .

Beweis:

Betrachtet man die Matrix-Darstellung zu $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$ (siehe 1.2.24 (c)), so sieht man, dass eine geschlossene Darstellung der Zassenhaus-Matrix unter Verwendung der Präsentation G_n eher schwierig ist. Unter Verwendung der Präsentation H_n ist dies zwar einfacher, die Bestimmung der Invariantenteiler jedoch ist ebenso unhandlich wie elementar. Daher spare ich den Beweis an dieser Stelle aus. Er findet sich im Anhang. □

2.3 Primteiler von $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$

Die Tabelle B.1 enthält jeweils für Partitionen $\lambda \vdash n \leq 20$ die von 1 verschiedenen Invariantenteiler von $A_\lambda(G_n)$, soweit ich sie berechnet habe. Für $n \leq 11$ ist die Liste vollständig. Für $n \geq 12$ werden die Zassenhaus-Matrizen teilweise zu groß.

Die Beispiele zeigen, dass zumindest in den betrachteten Fällen die Kohomologiegruppen $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ eine einfache Struktur haben. Mit wachsendem k steht der Rechenaufwand in keinem Verhältnis zur Einfachheit der Ergebnisse. Daher liegt der Gedanke nahe, nach Möglichkeiten zu suchen, auch ohne das Zassenhaus-Verfahren gewisse Aussagen über die gesuchten Isomorphietypen zu treffen. Das folgende Lemma zum Beispiel beschreibt einen Zusammenhang zwischen einer Partition λ und den Partitionen aus $\lambda+$ und $\lambda-$ bezüglich der Primteiler der zugehörigen Kohomologiegruppen.

2.3.1 Lemma

- (a) Es sei p eine Primzahl mit $p \mid |H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$. Dann existiert ein $\mu \in \lambda+$ mit $p \mid |H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}}^\mu)|$.
- (b) Es sei p eine Primzahl mit $p \mid |H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ und $p \nmid n$. Dann existiert ein $\mu \in \lambda-$ mit $p \mid |H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}}^\mu)|$.

Beweis:

- (a) Mit dem Lemma von Shapiro (1.4.11) ist $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}}^\lambda \uparrow)$. Es gilt also $p \mid |H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}}^\lambda \uparrow)|$.

Mit den Bezeichnungen aus (1.2.31 (b)) besitzt $S_{\mathbb{Z}}^\lambda \uparrow$ eine Filtrierung

$$0 =: Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_q := S_{\mathbb{Z}}^\lambda \uparrow$$

aus reinen $\mathbb{Z}S_{n+1}$ -Untergittern, so dass für alle $1 \leq j \leq q$ jeweils Z_j/Z_{j-1} und $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda^{ij+}}$ isomorph als $\mathbb{Z}S_{n+1}$ -Moduln sind.

Gemäß (1.4.18) und (1.5.8) sind $H^2(S_{n+1}, Z_j)$ und $H^2(S_{n+1}, Z_j/Z_{j-1})$ für alle $1 \leq j \leq q$ endlich. Daher folgt mit (1.4.19): Es existiert ein $1 \leq j \leq q$ mit $p \mid |H^2(S_{n+1}, Z_j/Z_{j-1})| = |H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda^{ij+}})|$.

- (b) Wegen $p \mid |H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ existiert ein $\alpha \in H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ mit der Ordnung p . Wegen $p \nmid n$ ist $\text{res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\alpha) \neq 0 \in H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}}^\mu)$, denn es gilt mit (1.4.14):

$$0 \neq n\alpha = [S_n : S_{n-1}]\alpha = \text{tr} \circ \text{res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\alpha).$$

Damit ist die Ordnung von $\text{res}_{S_{n-1}}^{S_n}(\alpha)$ gleich p , und es folgt $p \mid |H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}}^\lambda \downarrow)|$.

Mit der Filtrierung von $S_{\mathbb{Z}}^\lambda \downarrow$ aus (1.2.31 (a)) können wir nun den Beweis für (b) analog zum Beweis von (a) führen. \square

Das vorangegangene Lemma legt nahe, Partitionen, bei denen ein bestimmter Primteiler in der Ordnung der zugehörigen Kohomologiegruppe auftaucht, in gerichteten Graphen anzuordnen. Für eine Primzahl p definiere:

$$\mathcal{E}_p := \{ \lambda \vdash n \mid n \in \mathbb{N}, p \mid |H^2(S_n, S^\lambda)| \},$$

$$\mathcal{K}_p := \{ (\lambda, \mu) \in \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_p \mid \mu \in \lambda+ \}.$$

Dann definiert $\mathcal{D}_p := (\mathcal{E}_p, \mathcal{K}_p)$ einen gerichteten Graphen (oder: *Digraphen*) mit Ecken \mathcal{E}_p und Kanten \mathcal{K}_p . (Beispiele: siehe (B.2).) Für $(\lambda, \mu) \in \mathcal{K}_p$ heißt λ ein *Vorgänger* von μ und μ ein *Nachfolger* von λ .

Ein *Teil(di)graph* von \mathcal{D}_p ist ein Graph $(\mathcal{E}'_p, \mathcal{K}'_p)$ mit $\mathcal{E}'_p \subseteq \mathcal{E}_p$ und $\mathcal{K}'_p \subseteq \mathcal{K}_p \cap \mathcal{E}'_p \times \mathcal{E}'_p$. Ein *Weg* in \mathcal{D}_p sei hier definiert als ein Teilgraph, in dem eine Ecke keinen Vorgänger und genau einen Nachfolger besitzt, und in dem alle übrigen Ecken genau einen Vorgänger und genau einen Nachfolger besitzen.

In dieser Terminologie formuliert lauten die Aussagen aus (2.3.1): Für alle Primzahlen p besitzt jedes $\lambda \in \mathcal{E}_p$ einen Nachfolger in \mathcal{D}_p , und falls $\lambda \vdash n$ mit $p \nmid n$ ist, dann besitzt λ auch einen Vorgänger. Daraus ergeben sich weitere Fragen, zum Beispiel:

- Wie viele Vorgänger und Nachfolger in \mathcal{D}_p besitzt ein $\lambda \in \mathcal{E}_p$ genau?
- Wie schließt man auf die genauen Vorgänger und Nachfolger von λ in \mathcal{D}_p ?
- Existiert für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p|n$ immer ein $\lambda \vdash n$ mit $\lambda \in \mathcal{E}_p$, so dass λ keinen Vorgänger in \mathcal{D}_p besitzt?
- In welcher Vielfachheit tritt p als Primteiler von $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ auf?

Eine endgültige Beantwortung dieser Fragen liefert diese Arbeit nicht. Aber auf Basis der berechneten Ergebnisse lassen sich verschiedene begründete Vermutungen formulieren, die im Folgenden vorgestellt werden sollen. Als Vorbereitung darauf dient das nächste Lemma:

2.3.2 Lemma

Es sei p eine Primzahl mit $p \neq 2, p \nmid n$. Weiter sei $\lambda := (n - j, 1^j)$ für ein $1 \leq j \leq n$. Dann gilt:

- (a) Es ist $H^1(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda) = 0$, außer im Fall $p = 3, j = 3$.
- (b) Es ist $H^2(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda) = 0$, außer im Fall $p = 3, j \in \{3, 6\}$.

Beweis:

Siehe [BKM96], Proposition 5.2, Proposition 5.3. (Dort wird außerdem der Fall $p|n$ betrachtet, aber dann tritt ein anderer Modul an die Stelle von $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$.) \square

2.3.3 Folgerung

Es sei p eine Primzahl mit $p \neq 2, p \nmid n$. Weiter sei $\lambda := (n - j, 1^j)$ für ein $1 \leq j \leq n$ mit $j \neq 3$ im Fall $p = 3$. Dann folgt mit (2.3.2) und (1.4.17), dass $p \nmid |H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$. (Den Fall $j = 6$ (siehe 2.3.2 (b)) brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, da dann immer noch die erste Kohomologie über \mathbb{F}_p trivial ist. Dies genügt schon, um mit (1.4.17) $p \nmid |H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ zu folgern.)

Daraus wiederum folgt: Für $j \neq 3$ ist jeder ungerade Primteiler von $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ auch ein Primteiler von n . Für $j = 1$ besagen (2.2.1 (b)) und (2.2.4), dass $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)|$ gar keinen ungeraden Primteiler besitzt. Der Fall $j = 2$ wird durch Vermutung 1 genauer beschrieben, und für $j = 3$ siehe auch Vermutung 8.

Die ersten beiden Vermutungen werden durch die Tabelle B.1 für $n \leq 20$ belegt. Wenn sie zutreffen, folgen aus ihnen mehrere Teilaussagen der übrigen Vermutungen.

Vermutung 1

Es sei $n \geq 4, \lambda = (n - 2, 1^2)$.

- (a) Für ungerades n ist $H(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.
- (b) Für gerades n ist $H(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/\frac{n}{2}\mathbb{Z}$. \diamond

Vermutung 2

Es sei $n \geq 5$, $\lambda = (n - 3, 2, 1)$.

(a) Für $3 \nmid n - 1$ ist $H(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/(n - 1)\mathbb{Z}$.

(b) Für $3 \mid n - 1$ ist $H(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/\frac{n-1}{3}\mathbb{Z}$. \diamond

Es scheint so, dass zumindest für Primzahlen ungleich 2 im Regelfall λ in \mathcal{D}_p höchstens einen Vorgänger und genau einen Nachfolger besitzt. Für $p \geq 5$ gibt es bisher noch keine Ausnahmen, für $p = 3$ nur wenige (siehe auch Vermutung 8). Die vorliegende Datenmenge ist aber wohl zu gering, um eine wirklich verlässliche Vermutung abgeben zu können.

Der Graph \mathcal{D}_2 unterscheidet sich nicht nur in dieser Hinsicht deutlich von \mathcal{D}_p für $p \neq 2$. Daher empfiehlt es sich, die Primzahl 2 separat von den ungeraden Primzahlen zu betrachten.

Vermutung 3

Falls $n > 4$ und $\lambda \vdash n$, $\lambda \in \mathcal{D}_2$ ist, so hat λ mindestens einen Vorgänger.

Bemerkung:

Von den bisher berechneten Partitionen in \mathcal{D}_2 sind (2) , $(2, 1^2)$ und (2^2) die einzigen ohne Vorgänger (siehe B.2). \diamond

Vermutung 4

Bis auf Ausnahmefälle gilt, dass jedes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ ungerade und $\lambda_1 \neq 1$ eine Ecke in \mathcal{D}_2 ist.

Bemerkung:

Eine Spezifizierung der Ausnahmefälle ist auf Basis der vorliegenden Daten noch nicht möglich. Von den bisher berechneten Ergebnissen sind die einzigen Ausnahmen $(11, 4)$ und $(11, 5)$; die Kohomologie-Gruppen $H^2(S_{15}, S^{(11,4)})$ und $H^2(S_{16}, S^{(11,5)})$ sind trivial (siehe B.1). Man kann also davon ausgehen, dass mehrere, wenn nicht alle Partitionen der Form $(11, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ mit $\lambda_2 \geq 4$ keine Ecken in \mathcal{D}_2 sind.

Einen Spezialfall der Vermutung bilden die Partitionen $\lambda = (l, 1^{n-l})$ mit $3 \leq l < n$, l ungerade. (Für $l = 1$ gilt die Aussage wegen (2.2.3) nicht.) Diese Partitionen sind von den eben genannten Ausnahmen nicht betroffen. Für $l + 1 = n \geq 4$ gilt dieser Spezialfall wegen (2.2.4). Für $l + 2 = n \geq 4$ würde die Aussage aus Vermutung 1 folgen.

Für $m = 1$ entspricht die Vermutung dem Lemma (2.2.2) und gilt damit in dieser Variante für alle $n \geq 2$. \diamond

Vermutung 5

Jede Partition $\lambda := (2l, 2, 1^q) \vdash n := 2l + 2 + q \geq 4$ für $l \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0$ ist eine Ecke in \mathcal{D}_2 .

Bemerkung:

Diese Vermutung wird durch die Tabelle B.1 für $n \leq 12$, in etlichen Fällen auch für größere n belegt. Für $q = 1$ siehe auch Vermutung 2. \diamond

Es gibt in \mathcal{D}_2 darüber hinaus noch viele Partitionen von anderer Form als in den Vermutungen 4 und 5 beschrieben. Manche davon könnte man noch zusammenfassen, beispielsweise $\lambda := (3, 2^2, 1^{n-7})$ für $n \geq 8$ (belegt für $n \leq 15$). Aber eine Regel, die jede Partition in \mathcal{D}_2 erklären würde, ist auf Basis der vorliegenden Daten noch nicht zu erkennen.

Im Folgenden sei p eine Primzahl ungleich 2.

Vermutung 6

Es sei $p \mid n$. Dann gilt:

- (a) Es ist $\lambda := (n - 2, 1^2) \in \mathcal{E}_p$, und λ besitzt keinen Vorgänger.
- (b) Falls $n \geq 2p$ ist, dann ist $\mu := (n - p, p) \in \mathcal{E}_p$, und μ besitzt keinen Vorgänger.
- (c) Jede Partition in \mathcal{E}_p ohne Vorgänger besitzt eine Form wie in (a) oder (b).

Bemerkung:

Dass $\lambda \in \mathcal{E}_p$ ist, würde direkt aus Vermutung 1 folgen, da p ungerade ist. Wegen $p \mid n$ ist $p \nmid n - 1$. Daher würde die Aussage, dass λ keinen Vorgänger besitzt, mit $\lambda^- = \{(n - 3, 1^2), (n - 2, 1)\}$ aus (2.3.3) und (2.2.4) folgen.

Für das jeweilige n sind die genannten Partitionen lexikografisch groß, und damit ihre direkten Nachfolger ebenfalls. Das hat zur Folge, dass zu einem festen n diejenigen Partitionen, bei denen die Ordnung der jeweils zugehörigen Kohomologiegruppe einen großen Primteiler besitzt, vorwiegend unter den lexikografisch großen Partitionen zu finden sind. So kommt es, dass für ein $\lambda \in \mathcal{E}_p$ die konjugierte Partition λ' nur selten auch in \mathcal{E}_p ist. Tatsächlich sind (abgesehen von den Fällen mit $\lambda = \lambda'$) die Partitionen $(2^3, 1^3)$ und $(6, 3)$ sowie $(2^3, 1^4)$ und $(7, 3)$ bisher die einzigen Paare von konjugierten Partitionen mit dieser Eigenschaft; sie liegen beide in \mathcal{E}_3 . Es besteht auf Basis der vorliegenden Daten allerdings noch kein Grund zur Annahme, dass es bei diesen Ausnahmen bleiben sollte.

Für $p = 2$ ist ein derartiger Zusammenhang zwischen konjugierten Partitionen noch weniger zu erwarten. Es gibt bereits viele Beispiele sowohl dafür, dass zwei konjugierte Partitionen in \mathcal{E}_2 liegen, als auch dafür, dass das nur auf eine von beiden zutrifft. \diamond

Vermutung 7

In \mathcal{D}_p gibt es einen Weg, der folgendermaßen beschrieben wird:

- $(p - 2, 1^2) \quad \vdash \quad p$ (siehe Vermutung 6(a))
- $(p - 2, 1 + j, 1) \quad \vdash \quad p + j$ für $1 \leq j \leq p - 3$
- $((p - 2)^2, 1^2) \quad \vdash \quad 2p - 2$
- $(p - 1, p - 2, 1^2) \quad \vdash \quad 2p - 1$

Anschaulich gesprochen wird im Young-Diagramm zu $(p - 2, 1^2)$ zunächst die vorletzte Zeile „aufgefüllt“. Der nächste neue Knoten wird in der ersten Spalte ergänzt und erzeugt so eine neue Zeile. Anschließend wird ein neuer Knoten in der nunmehr viertletzten ergänzt. Dieser Vorgang wird nun iteriert, das heißt, für $q \geq 2$ wird der Weg folgendermaßen fortgesetzt:

- $((p - 1)^{q-1}, p - 2, 1 + j, 1) \quad \vdash \quad q(p - 1) + 1 + j$ für $1 \leq j \leq p - 3$
- $((p - 1)^{q-1}, (p - 2)^2, 1^2) \quad \vdash \quad (q + 1)(p - 1)$
- $((p - 1)^q, p - 2, 1^2) \quad \vdash \quad (q + 1)(p - 1) + 1$

Bemerkung:

Für $p = 3$ entfällt der Schritt des „Auffüllens“ der vorletzten Zeile, weil die drittletzte Zeile schon die Länge 1 hat. Dadurch besteht der betreffende Weg in \mathcal{D}_3 aus den Partitionen:

- $(2^{\frac{n-3}{2}}, 1^3)$ für $3 \leq n$ ungerade,
- $(2^{\frac{n-4}{2}}, 1^4)$ für $3 \leq n$ gerade. ◇

Vermutung 8

Für alle $\lambda \in \mathcal{E}_p$ von einer Form wie in Vermutung 7 und alle $l \in \mathbb{N}$ ist $(\underbrace{(\lambda^{1+}) \dots (\lambda^{1+})}_{l \cdot p \text{ mal}}) \in \mathcal{E}_p$.

Bemerkung:

Mit den Partitionen aus Vermutung 6 (a) beginnt also jeweils ein Weg in \mathcal{D}_p , der analog zu Vermutung 7 beschrieben wird. (Dabei heißt „analog“, dass in der zweiten Reihe der zugehörigen Young-Diagramme sukzessive $p - 3$ Knoten ergänzt werden, nicht etwa $l \cdot p - 3$.)

Insbesondere ist $(l \cdot p - 2, 2, 1) \in \mathcal{E}_p$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Für $p > 3$ ergibt sich das schon aus der Vermutung 2. Für $p = 3$ besagen die Vermutungen 2 und 8, dass die Partitionen $(3l - 2, 1^2)$ für $3 \mid l$ zwei Nachfolger in \mathcal{D}_3 haben, nämlich $(3l - 2, 2, 1)$ und $(3l - 2, 1^3)$.

Des Weiteren bedeutet die Vermutung 8, dass für $p = 3 \nmid n$ die Partitionen $(n - 3, 1^3) \in \mathcal{E}_3$ sind. Dies deckt sich wegen (1.4.17) mit der Teilaussage aus (2.3.2), die besagt, dass $H^1(S_n, S_{\mathbb{F}_3}^{(n-3, 1^3)})$ und $H^2(S_n, S_{\mathbb{F}_3}^{(n-3, 1^3)})$ für $3 \nmid n$ nicht trivial sind. ◇

Über Vielfachheiten von Primteilern lässt sich bislang nur wenig sagen. Am häufigsten scheinen Primteiler mit einfacher Vielfachheit aufzutreten. Folgende Ausnahmen gibt es: Falls $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ nicht zyklisch ist, muss mindestens ein Primteiler mehr als einmal auftreten. Für kleine n gibt es allerdings nur wenige nicht-zyklische Kohomologiegruppen. Die Gemeinsamkeit der berechneten Fälle ist, dass sie alle von der Form $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ für ein ungerades l sind. Die betreffenden Partitionen sind (siehe B.1):

- $(3^2, 1^j) \vdash 6 + j$ für $2 \leq j \leq 10$
- $(5, 3, 2) \vdash 10, (5, 3^2) \vdash 11$
- $(3^3, 1^2) \vdash 11, (3^3, 1^3) \vdash 12$
- $(7, 3, 1) \vdash 11, (7, 3, 1^2) \vdash 12$
- $(9, 4) \vdash 13, (9, 5) \vdash 14$

Die Eigenschaft von Partitionen, dass die zugehörigen Kohomologiegruppen nicht zyklisch sind, wird also möglicherweise entlang von Wegen innerhalb von \mathcal{D}_2 vererbt. In diesem Sinne gibt \mathcal{D}_2 hier gewissermaßen Auskunft über die Vielfachheit von 2 in den entsprechenden Gruppenordnungen.

Des Weiteren kann es vorkommen, dass ein Primteiler innerhalb eines Invariantenteilers in höherer Potenz auftritt. Manche dieser Fälle werden durch die Vermutungen 1 und 2 für geeignete n beschrieben. Außerdem sind folgende Partitionen betroffen (siehe B.1):

- $p = 2$: $(2^2, 1^2), (6, 2, 1^2), (6, 4, 1), (6, 4, 2), (7, 2^2, 1), (10, 2, 1^2)$
- $p = 3$: $(7, 3, 1)$

Wenn man die betroffenen Partitionen hinzunimmt, die durch die Vermutungen 1 und 2 erklärt würden, so kann man vermuten, dass man diese Art der höheren Vielfachheit eines Primteilers immer auch bei einem Vorgänger oder einem Nachfolger findet. Aber eine Vererbung entlang eines ganzen Weges findet im Allgemeinen offenbar nicht statt.

Damit schließe ich den Abschnitt über meine Beobachtungen. Im Anhang folgen nun die berechneten Invariantenteiler sowie die dazu verwendeten GAP-Routinen.

Anhang A

GAP-Routinen

A.1 Zur Berechnung von $A_\lambda(G_n)$

Programm: `ZasMatGn`

Eingabe: eine Partition $\lambda \vdash n$

Ausgabe: eine Liste $[A_\lambda(G_n), \text{Rang}(A_\lambda(G_n))]$

Die Routine `ZasMatGn` erfordert (wie auch `ZasMatHn`) die Einbindung der Bibliothek `spechtmats.g`. Dann liefert die Funktion `SpechtMatrices` eine Liste $[B, A]$ mit den erzeugenden Matrizen A und B (siehe 2.1.4). Zur Beschleunigung der Matrixmultiplikationen werden die Matrizen B^{2^l} für hinreichend viele $l \geq 2$ zuvor abgespeichert. Die Unteroutine `MatPot` errechnet dann bei Eingabe einer natürlichen Zahl j die Matrix B^j , indem sie zunächst mit Hilfe der Unteroutine `Binary` die Binärdarstellung von j als Liste von Einsen und Nullen erzeugt und dann die gespeicherten Matrizen B^{2^l} , für die der l -te Eintrag in der Binärdarstellung eine Eins ist, miteinander multipliziert.

Der Rang der berechneten Zassenhausmatrix wird hier wie auch bei `ZasMatHn` mit ausgegeben, weil er bei der Bestimmung der Elementarteiler in `CohoSpecht` benötigt wird. Zur Bestimmung dieses Rangs muss man den Rang des Spechtmoduls S^λ kennen (siehe 2.1.1). Dieser wird bei der Bestimmung von A und B automatisch mitgeliefert und braucht daher später nicht noch einmal berechnet zu werden.

```
ZasMatGn := function(lambda)
local c, e, i, j, k, m, n, erz, sum, plist, Binary, MatPot;

  Binary := function(l)
    local bin;
    bin := [];
    while l>0 do
      if l mod 2 = 1
        then Add(bin,1); l := (l-1)/2;
        else Add(bin,0); l := l/2;
      fi;
    od;
    return bin;
  end;
```

```

MatPot := function(l)
  local bin, mat, exp;
  bin := Binary(l);
  mat := e;
  for exp in [1..Length(bin)] do
    if bin[exp]=1 then mat := mat*plist[exp]; fi;
  od;
  return mat;
end;

n := Sum(lambda);
erz := SpechtMatrices(lambda);
k := Length(erz[1]);

e := IdentityMat(k);
plist := [erz[1]];
for i in [2..Length(Binary(n-1))] do
  plist[i] := plist[i-1]^2;
od;

c := erz[2]*erz[1];
sum := e;
for i in [1..n-2] do
  sum := e + c*sum;
od;

m := [];
for i in [1..k*(EuclideanQuotient(n,2)+2)] do
  Add(m, []);
od;

m{[1..k]}{[1..k]} := e+erz[2];
m{[1..k]}{[k+1..2*k]} := NullMat(k,k);
m{[k+1..2*k]}{[1..k]} := NullMat(k,k);
m{[k+1..2*k]}{[k+1..2*k]} := e+Sum([1..n-1], i->MatPot(i));
m{[2*k+1..3*k]}{[1..k]} := sum;
m{[2*k+1..3*k]}{[k+1..2*k]} := sum*erz[2];

for i in [2..EuclideanQuotient(n,2)] do
  m{[(i+1)*k+1..(i+2)*k]}{[1..k]}
    := e + MatPot(i)*erz[2] + erz[2]*MatPot(i)*(e+erz[2]*MatPot(n-i));
  m{[(i+1)*k+1..(i+2)*k]}{[k+1..2*k]}
    := (erz[2]+MatPot(i)*erz[2]*MatPot(n-i))
      * (e+Sum([1..i-1], j->MatPot(j))+MatPot(i)*erz[2]
        *(e+Sum([1..n-i-1], j->MatPot(j))));
od;

```

```

if Length(lambda) = 1
  then return [ m, 2 ];
  else return [ m, k ];
fi;
end;

```

A.2 Zur Berechnung von $A_\lambda(H_n)$

Programm: ZasMatHn

Eingabe: eine Partition $\lambda \vdash n$

Ausgabe: eine Liste $[A_\lambda(H_n), \text{Rang}(A_\lambda(H_n))]$

Die Matrizen Σ_i aus (2.1.2) werden wie in (2.1.4) berechnet und zur Beschleunigung der folgenden Matrixmultiplikationen in der Liste **erz** gespeichert.

```

ZasMatHn := function(lambda)
local e, i, j, k, m, n, erz, erz0, inv;

n := Sum(lambda);
erz0 := SpechtMatrices(lambda);
k := Length(erz0[1]);
e := IdentityMat(k);

inv := Inverse(erz0[1]);
erz := [erz0[2]];
for i in [2..n-1] do
  Add(erz, erz0[1]*erz[i-1]*inv);
od;

m := NullMat(k*n*(n-1)/2, k*(n-1));
for i in [1..n-1] do
  for j in [1..i-2] do
    m{[k*(i*(i-1)/2+(j-1))+1..k*(i*(i-1)/2+j)]}{[k*(j-1)+1..k*j]}
      := e+erz[j]*erz[i];
    m{[k*(i*(i-1)/2+(j-1))+1..k*(i*(i-1)/2+j)]}{[k*(i-1)+1..k*i]}
      := erz[j]+erz[i];
  od;
  if i>1 then
    m{[k*(i*(i-1)/2+(i-2))+1..k*(i*(i-1)/2+i-1)]}{[k*(i-2)+1..k*(i-1)]}
      := e+erz[i-1]*erz[i]+erz[i]*erz[i-1];
    m{[k*(i*(i-1)/2+(i-2))+1..k*(i*(i-1)/2+i-1)]}{[k*(i-1)+1..k*(i) ]}
      := erz[i-1]+erz[i]*erz[i-1]*erz[i]+erz[i];
  fi;
  m{[k*(i*(i-1)/2+(i-1))+1..k*(i*(i-1)/2+i)]}{[k*(i-1)+1..k*i]}
    := erz[i]+e;
od;

```

```

if Length(lambda) = 1
  then return [ m, k*(n-1) ];
  else return [ m, k*(n-2) ];
fi;
end;

```

A.3 Zur Berechnung der Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$

Programm: `CohoSpecht`

Eingabe: eine Partition $\lambda \vdash n$
 eine Liste von Primzahlen
 eine Nummer 1 oder 2

Ausgabe: bei Eingabe der Primzahlliste `Primes`:
 eine Liste der von 1 verschiedenen Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$
 bei Eingabe der leeren Liste:
 eine Liste aller Primteiler der Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$
 bei Eingabe einer sonstigen Liste:
 für jede darin enthaltene Primzahl p eine Liste der zugehörigen
 Elementarteiler von $A_\lambda(P)$

Die dritte Eingabe entscheidet, mit welcher Präsentation gearbeitet wird: Bei 1 wird $A_\lambda(G_n)$ und bei 2 wird $A_\lambda(H_n)$ berechnet. Die von 1 verschiedenen Invariantenteiler und damit auch die Elementarteiler sind in beiden Fällen natürlich die gleichen.

Die Funktionsweise von `ElementaryDivisorsPPartRk` wurde in (2.2) erläutert. Statt die Funktion mit allen Primzahlen $p \leq n$ auszuführen, testet man zunächst, ob es überhaupt einen p -Anteil gibt. Dazu nimmt man die Matrix modulo p und prüft, ob nun der Rang kleiner ist als der der ganzzahligen Matrix. Genau dann gibt es einen p -Anteil, und nur dann muss er wirklich bestimmt werden. (Dieser Umstand wird unmittelbar klar, wenn man sich die Invariantenteilerform der betreffenden Matrix anschaut.) Letzteres ist in manchen Fällen auch dann noch möglich, wenn die Matrix $A_\lambda(P)$ für `ElementaryDivisorsPPartRk` schon zu groß ist. Mit Blick auf Abschnitt (2.3) ist die Kenntnis der Primteiler oft schon ausreichend. Daher bietet das Programm `CohoSpecht` die Möglichkeit, bei Eingabe der leeren Liste lediglich die vorkommenden Primteiler auszurechnen.

Die von GAP zur Verfügung gestellte Liste `Primes` enthält alle Primzahlen unter 1000. Wenn wir `CohoSpecht` mit `Primes` aufrufen, werden alle nichttrivialen Invariantenteiler von $A_\lambda(P)$ und damit den Isomorphietyp von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$ berechnet (sofern n nicht zu groß ist).

Die Bestimmung der p -Anteile der Invariantenteiler mit `ElementaryDivisorsPPartRk` kann für unterschiedliche p unterschiedlich aufwendig sein. Darum bietet `CohoSpecht` noch eine dritte Möglichkeit: Bei Eingabe einer Liste mit ausgewählten Primzahlen wird ausschließlich nach diesen p -Anteilen gesucht. Die Ausgabe ist dann eine Liste der entsprechenden Elementarteiler.

Die Unterroutine `Change` ist rein technischer Natur: Wir erhalten als Ausgabe von `ElementaryDivisorsPPartRk` für eine Primzahl p eine Liste der Form $[v_1, \dots, v_l, 0]$. Sie bedeutet: p^j teilt genau v_j der Invariantenteiler für $1 \leq j \leq l$. Mit Hilfe von `Change` können diese Listen zur besseren Lesbarkeit in Listen von Invarianten- oder Elementarteilern umgewandelt werden.

```

CohoSpecht := function(lambda, primes, option)
local h, i, n, pfac, plist, elemdiv, zas, Change;

    Change := function(primlist, potlist)
    local i, j, k, l, list;
    l := ListWithIdenticalEntries(Maximum(Flat(potlist)),1);
    list := [];
    for i in [1..Length(primlist)] do
        Add(list, ShallowCopy(l));
        for j in [1..Length(potlist[i])-1] do
            for k in [0..potlist[i][j]-1] do
                list[i][potlist[i][j]-k]
                    := list[i][potlist[i][j]-k]*primlist[i];
            od;
        od;
    od;
    return list;
end;

n := Sum(lambda);
if option = 1
    then zas := ZasMatGn(lambda);
    else zas := ZasMatHn(lambda);
fi;

if primes = []
    then plist := Primes;
    else plist := primes;
fi;

pfac := [];
i := 1;
while i <= Length(plist) and plist[i] <= n do
    h := zas[1]*Z(plist[i])^0;
    ConvertToMatrixRep(h,plist[i]);
    if RankMat(h) < zas[2] then Add(pfac,plist[i]); fi;
    i := i+1;
od;

if primes = [] then return pfac; fi;

elemdiv := [];
for i in [1..Length(pfac)] do
    Add(list,ElementaryDivisorsPPartRk(zas[1],pfac[i],zas[2]));
od;
elemdiv := Change(pfac,elemdiv);

```

```
if primes = Primes
  then return Reversed(ListN(TransposedMat(elemdiv),Product));
  else return ListN(elemdiv, 1 -> Filtered(1, n -> n>1));
fi;
end;
```

Anhang B

GAP-Ergebnisse

B.1 Isomorphietypen von $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$

In der folgenden Tabelle ist wie immer $\lambda \vdash n$ und $k = \text{Rang}(S^\lambda)$. Die d_{i_0}, \dots, d_r wurden als von 1 verschiedene Invariantenteiler der Zassenhaus-Matrix $A_\lambda(G_n)$ mit Hilfe von `CohoSpecht($\lambda, \text{Primes}, 1$)` (A.3) berechnet. Falls es keine solchen gibt, ist $H^2(S_n, S^\lambda)$ trivial, also zyklisch von Ordnung 1. In diesem Fall enthält die Tabelle den Eintrag 1.

Falls nur eine Bestimmung der Primteiler von $|H^2(S_n, S^\lambda)|$ mit `CohoSpecht($\lambda, [], 1$)` möglich war, enthält die Tabelle diese an Stelle der d_j . Zur Kennzeichnung sind sie in Klammern aufgeführt.

Die Partitionen sind lexikografisch geordnet. Falls eine oder mehrere Partitionen übersprungen werden, ist dies durch drei Punkte gekennzeichnet.

n	λ	k	d_{i_0}, \dots, d_r
2	[1 ²]	1	1
	[2]	1	2
3	[1 ³]	1	3
	[2, 1]	2	1
	[3]	1	2
4	[1 ⁴]	1	3
	[2, 1 ²]	3	2
	[2 ²]	2	2
	[3, 1]	3	2
	[4]	1	2
5	[1 ⁵]	1	1
	[2, 1 ³]	4	3
	[2 ² , 1]	5	4
	[3, 1 ²]	6	10
	[3, 2]	5	2
	[4, 1]	4	1
	[5]	1	2
6	[1 ⁶]	1	1
	[2, 1 ⁴]	5	3
	[2 ² , 1 ²]	9	4
	[2 ³]	5	1

n	λ	k	d_{i_0}, \dots, d_r
	[3, 1 ³]	10	2
	[3, 2, 1]	16	5
	[3 ²]	5	6
	[4, 1 ²]	10	3
	[4, 2]	9	2
	[5, 1]	5	2
	[6]	1	2
7	[1 ⁷]	1	1
	[2, 1 ⁵]	6	1
	[2 ² , 1 ³]	14	6
	[2 ³ , 1]	14	1
	[3, 1 ⁴]	15	2
	[3, 2, 1 ²]	35	2
	[3, 2 ²]	21	1
	[3 ² , 1]	21	10
	[4, 1 ³]	20	3
	[4, 2, 1]	35	2
	[4, 3]	14	3
	[5, 1 ²]	15	14
	[5, 2]	14	2
	[6, 1]	6	1
	[7]	1	2

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
8	$[1^8]$	1	1
	$[2, 1^6]$	7	1
	$[2^2, 1^4]$	20	6
	$[2^3, 1^2]$	28	1
	$[2^4]$	14	1
	$[3, 1^5]$	21	2
	$[3, 2, 1^3]$	64	1
	$[3, 2^2, 1]$	70	2
	$[3^2, 1^2]$	56	2, 10
	$[3^2, 2]$	42	2
	$[4, 1^4]$	35	1
	$[4, 2, 1^2]$	90	2
	$[4, 2^2]$	56	2
	$[4, 3, 1]$	70	3
	$[4^2]$	14	2
	$[5, 1^3]$	35	6
	$[5, 2, 1]$	64	7
	$[5, 3]$	28	2
	$[6, 1^2]$	21	4
	$[6, 2]$	20	2
	$[7, 1]$	7	2
	$[8]$	1	2
9	$[1^9]$	1	1
	$[2, 1^7]$	8	1
	$[2^2, 1^5]$	27	2
	$[2^3, 1^3]$	48	3
	$[2^4, 1]$	42	1
	$[3, 1^6]$	28	2
	$[3, 2, 1^4]$	105	1
	$[3, 2^2, 1^2]$	162	2
	$[3, 2^3]$	84	1
	$[3^2, 1^3]$	120	2, 2
	$[3^2, 2, 1]$	168	1
	$[3^3]$	42	2
	$[4, 1^5]$	56	1
	$[4, 2, 1^3]$	189	2
	$[4, 2^2, 1]$	216	1
	$[4, 3, 1^2]$	216	5
	$[4, 3, 2]$	168	3
	$[4^2, 1]$	84	1
	$[5, 1^4]$	70	6
	$[5, 2, 1^2]$	189	1
	$[5, 2^2]$	120	2
	$[5, 3, 1]$	162	14
	$[5, 4]$	42	2
	$[6, 1^3]$	56	1
	$[6, 2, 1]$	105	8

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	$[6, 3]$	48	3
	$[7, 1^2]$	28	18
	$[7, 2]$	27	2
	$[8, 1]$	8	1
	$[9]$	1	2
10	$[1^{10}]$	1	1
	$[2, 1^8]$	9	1
	$[2^2, 1^6]$	35	2
	$[2^3, 1^4]$	75	3
	$[2^4, 1^2]$	90	1
	$[2^5]$	42	1
	$[3, 1^7]$	36	2
	$[3, 2, 1^5]$	160	1
	$[3, 2^2, 1^3]$	315	2
	$[3, 2^3, 1]$	288	1
	$[3^2, 1^4]$	225	2, 2
	$[3^2, 2, 1^2]$	450	2
	$[3^2, 2^2]$	252	1
	$[3^3, 1]$	210	2
	$[4, 1^6]$	84	1
	$[4, 2, 1^4]$	350	2
	$[4, 2^2, 1^2]$	567	1
	$[4, 2^3]$	300	1
	$[4, 3, 1^3]$	525	1
	$[4, 3, 2, 1]$	768	15
	$[4, 3^2]$	210	3
	$[4^2, 1^2]$	300	1
	$[4^2, 2]$	252	1
	$[5, 1^5]$	126	2
	$[5, 2, 1^3]$	448	3
	$[5, 2^2, 1]$	525	1
	$[5, 3, 1^2]$	567	2
	$[5, 3, 2]$	450	2, 2
	$[5, 4, 1]$	288	7
	$[5^2]$	42	10
	$[6, 1^4]$	126	1
	$[6, 2, 1^2]$	350	4
	$[6, 2^2]$	225	2
	$[6, 3, 1]$	315	2
	$[6, 4]$	90	2
	$[7, 1^3]$	84	6
	$[7, 2, 1]$	160	3
	$[7, 3]$	75	6
	$[8, 1^2]$	36	5
	$[8, 2]$	35	2
	$[9, 1]$	9	2
	$[10]$	1	2

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
11	[1 ¹¹]	1	1
	[2, 1 ⁹]	10	1
	[2 ² , 1 ⁷]	44	2
	[2 ³ , 1 ⁵]	110	1
	[2 ⁴ , 1 ³]	165	3
	[2 ⁵ , 1]	132	1
	[3, 1 ⁸]	45	2
	[3, 2, 1 ⁶]	231	1
	[3, 2 ² , 1 ⁴]	550	2
	[3, 2 ³ , 1 ²]	693	1
	[3, 2 ⁴]	330	1
	[3 ² , 1 ⁵]	385	2, 2
	[3 ² , 2, 1 ³]	990	1
	[3 ² , 2 ² , 1]	990	2
	[3 ³ , 1 ²]	660	2, 2
	[3 ³ , 2]	462	2
	[4, 1 ⁷]	120	1
	[4, 2, 1 ⁵]	594	2
	[4, 2 ² , 1 ³]	1232	1
	[4, 2 ³ , 1]	1155	1
	[4, 3, 1 ⁴]	1100	1
	[4, 3, 2, 1 ²]	2310	1
	[4, 3, 2 ²]	1320	3
	[4, 3 ² , 1]	1188	5
	[4 ² , 1 ³]	825	1
	[4 ² , 2, 1]	1320	1
	[4 ² , 3]	462	1
	[5, 1 ⁶]	210	2
	[5, 2, 1 ⁴]	924	3
	[5, 2 ² , 1 ²]	1540	1
	[5, 2 ³]	825	1
	[5, 3, 1 ³]	1540	2
	[5, 3, 2, 1]	2310	1
	[5, 3 ²]	660	2, 6
	[5, 4, 1 ²]	1155	1
	[5, 4, 2]	990	2
	[5 ² , 1]	330	14
	[6, 1 ⁵]	252	1
	[6, 2, 1 ³]	924	2
	[6, 2 ² , 1]	1100	1
	[6, 3, 1 ²]	1232	1
	[6, 3, 2]	990	1
	[6, 4, 1]	693	4
	[6, 5]	132	5
	[7, 1 ⁴]	210	2
	[7, 2, 1 ²]	594	2
	[7, 2 ²]	385	2
	[7, 3, 1]	550	2, 18
	[7, 4]	165	2
	[8, 1 ³]	120	3
	[8, 2, 1]	231	10
	[8, 3]	110	1

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	[9, 1 ²]	45	22
	[9, 2]	44	2
	[10, 1]	10	1
	[11]	1	2
12	[1 ¹²]	1	1
	[2, 1 ¹⁰]	11	1
	[2 ² , 1 ⁸]	54	2
	[2 ³ , 1 ⁶]	154	1
	[2 ⁴ , 1 ⁴]	275	3
	[2 ⁵ , 1 ²]	297	1
	[2 ⁶]	132	1
	[3, 1 ⁹]	55	2
	[3, 2, 1 ⁷]	320	1
	[3, 2 ² , 1 ⁵]	891	2
	[3, 2 ³ , 1 ³]	1408	1
	[3, 2 ⁴ , 1]	1155	1
	[3 ² , 1 ⁶]	616	2, 2
	[3 ² , 2, 1 ⁴]	1925	1
	[3 ² , 2 ² , 1 ²]	2673	2
	[3 ² , 2 ³]	1320	1
	[3 ³ , 1 ³]	1650	2, 2
	[3 ³ , 2, 1]	2112	1
	[3 ⁴]	462	2
	[4, 1 ⁸]	165	1
	[4, 2, 1 ⁶]	945	2
	[4, 2 ² , 1 ⁴]	2376	1
	[4, 2 ³ , 1 ²]	3080	1
	[4, 2 ⁴]	1485	1
	[4, 3, 1 ⁵]	2079	1
	[4, 3, 2, 1 ³]	5632	?
	[4, 3, 2 ² , 1]	5775	?
	[4, 3 ² , 1 ²]	4158	?
	[4, 3 ² , 2]	2970	1
	[4 ² , 1 ⁴]	1925	1
	[4 ² , 2, 1 ²]	4455	?
	[4 ² , 2 ²]	2640	1
	[4 ² , 3, 1]	2970	1
	[4 ³]	462	1
	[5, 1 ⁷]	330	2
	[5, 2, 1 ⁵]	1728	1
	[5, 2 ² , 1 ³]	3696	(3)
	[5, 2 ³ , 1]	3520	1
	[5, 3, 1 ⁴]	3564	(2)
	[5, 3, 2, 1 ²]	7700	?
	[5, 3, 2 ²]	4455	?
	[5, 3 ² , 1]	4185	?
	[5, 4, 1 ³]	3520	1
	[5, 4, 2, 1]	5775	?
	[5, 4, 3]	2112	3
	[5 ² , 1 ²]	1485	14
	[5 ² , 2]	1320	2

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
12	$[6, 1^6]$	462	1
	$[6, 2, 1^4]$	2100	2
	$[6, 2^2, 1^2]$	3564	1
	$[6, 2^3]$	1925	1
	$[6, 3, 1^3]$	3696	1
	$[6, 3, 2, 1]$	5632	?
	$[6, 3^2]$	1650	1
	$[6, 4, 1^2]$	3080	2
	$[6, 4, 2]$	2673	4
	$[6, 5, 1]$	1155	2
	$[6^2]$	132	1
	$[7, 1^5]$	462	2
	$[7, 2, 1^3]$	1728	1
	$[7, 2^2, 1]$	2079	4
	$[7, 3, 1^2]$	2376	2, 2
	$[7, 3, 2]$	1925	6
	$[7, 4, 1]$	1408	3
	$[7, 5]$	297	10
	$[8, 1^4]$	330	3
	$[8, 2, 1^2]$	945	2
	$[8, 2^2]$	616	1
	$[8, 3, 1]$	891	5
	$[8, 4]$	275	2
	$[9, 1^3]$	165	2
	$[9, 2, 1]$	320	11
	$[9, 3]$	154	6
	$[10, 1^2]$	55	6
	$[10, 2]$	54	2
	$[11, 1]$	11	2
	$[12]$	1	2
13	$[1^{13}]$	1	1
	$[2, 1^{11}]$	12	1
	$[2^2, 1^9]$	65	2
	$[2^3, 1^7]$	208	1
	$[2^4, 1^5]$	429	1
	$[2^5, 1^3]$	572	3
	$[2^6, 1]$	429	1
	$[3, 1^{10}]$	66	2
	$[3, 2, 1^8]$	429	1
	$[3, 2^2, 1^6]$	1365	2
	$[3, 2^3, 1^4]$	2574	1
	$[3, 2^4, 1^2]$	2860	1
	$[3, 2^5]$	1287	1
	$[3^2, 1^7]$	936	2, 2
	$[3^2, 2, 1^5]$	3432	1
	...		
	$[3^3, 1^4]$	3575	(2)
	...		
	$[3^3, 2^2]$	3432	1
	...		
	$[3^4, 1]$	2574	2

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	$[4, 1^9]$	220	1
	$[4, 2, 1^7]$	1430	2
	...		
	$[4, 3, 1^6]$	3640	1
	...		
	$[4, 3^3]$	3432	1
	...		
	$[4^3, 1]$	3432	1
	$[5, 1^8]$	495	2
	$[5, 2, 1^6]$	3003	1
	...		
	$[5, 4^2]$	2574	1
	...		
	$[5^2, 3]$	3432	(2, 3)
	$[6, 1^7]$	792	1
	...		
	$[6^2, 1]$	1287	2
	$[7, 1^6]$	924	2
	...		
	$[7, 3^2]$	3575	(2, 3)
	...		
	$[7, 5, 1]$	2860	2, 6
	$[7, 6]$	429	2
	$[8, 1^5]$	792	1
	$[8, 2, 1^3]$	3003	6
	$[8, 2^2, 1]$	3640	1
	...		
	$[8, 3, 2]$	3432	1
	...		
	$[8, 5]$	572	5
	$[9, 1^4]$	495	2
	$[9, 2, 1^2]$	1430	1
	$[9, 2^2]$	936	1
	$[9, 3, 1]$	1365	22
	$[9, 4]$	429	2, 2
	$[10, 1^3]$	220	3
	$[10, 2, 1]$	429	4
	$[10, 3]$	208	3
	$[11, 1^2]$	66	26
	$[11, 2]$	65	2
	$[12, 1]$	12	1
	$[13]$	1	2
14	$[1^{14}]$	1	1
	$[2, 1^{12}]$	13	1
	$[2^2, 1^{10}]$	77	2
	$[2^3, 1^8]$	273	1
	$[2^4, 1^6]$	637	1
	$[2^5, 1^4]$	1001	3
	$[2^6, 1^2]$	1001	1
	$[2^7]$	429	1

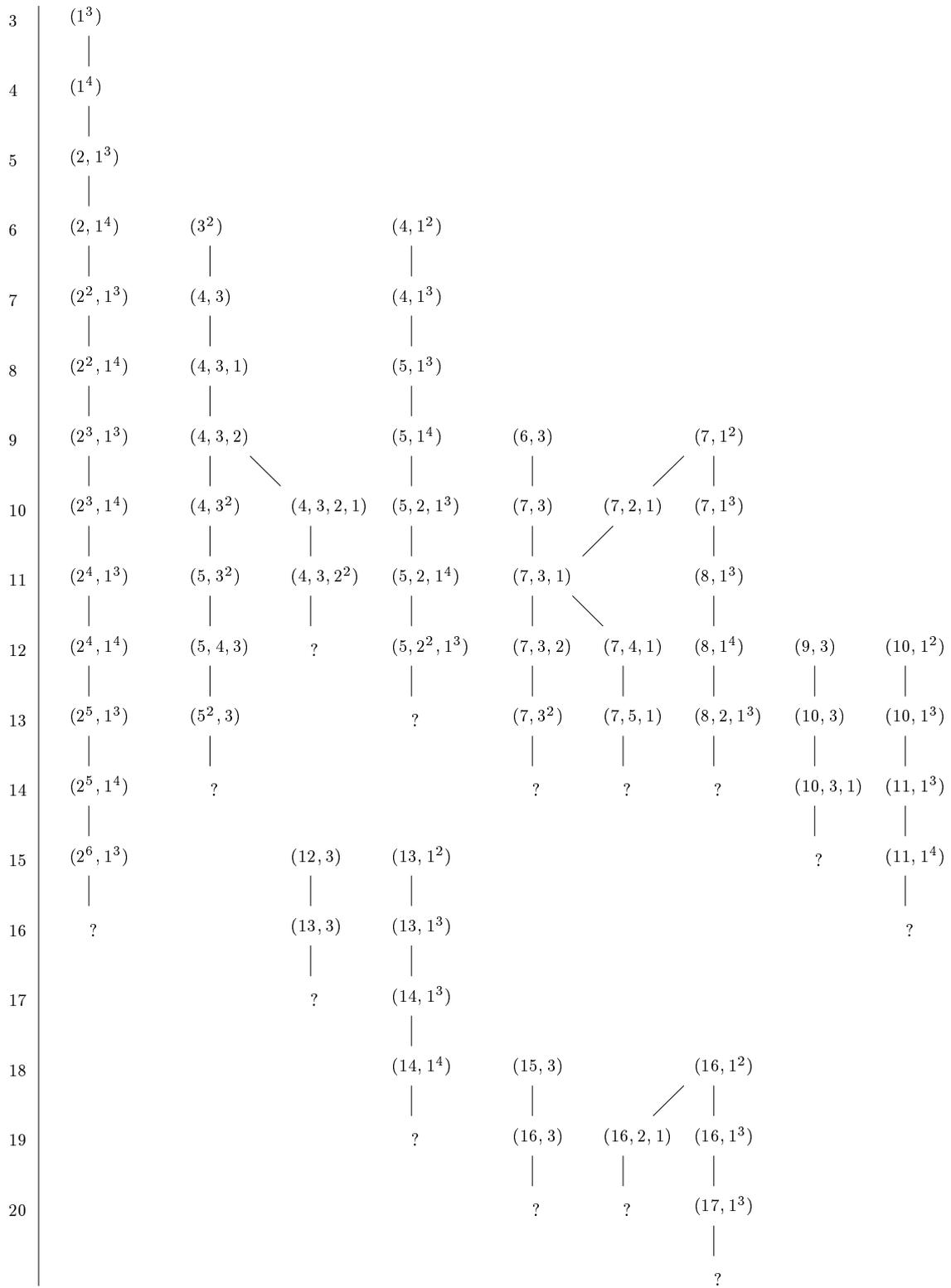
n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	$[3, 1^{11}]$	78	2
	$[3, 2, 1^9]$	560	1
	$[3, 2^2, 1^7]$	2002	2
	...		
	$[3^2, 1^8]$	1365	2, 2
	...		
	$[4, 1^{10}]$	286	1
	$[4, 2, 1^8]$	2079	2
	...		
	$[5, 1^9]$	715	2
	...		
	$[6, 1^8]$	1287	1
	...		
	$[7, 1^7]$	1716	2
	...		
	$[7^2]$	429	14
	$[8, 1^6]$	1716	1
	...		
	$[8, 6]$	1001	1
	$[9, 1^5]$	1287	2
	...		
	$[9, 5]$	1001	2, 2
	$[10, 1^4]$	715	1
	$[10, 2, 1^2]$	2079	4
	$[10, 2^2]$	1365	1
	$[10, 3, 1]$	2002	3
	$[10, 4]$	637	2
	$[11, 1^3]$	286	6
	$[11, 2, 1]$	560	13
	$[11, 3]$	273	2
	$[12, 1^2]$	78	7
	$[12, 2]$	77	2
	$[13, 1]$	13	2
	$[14]$	1	2
15	$[1^{15}]$	1	1
	$[2, 1^{13}]$	14	1
	$[2^2, 1^{11}]$	90	2
	$[2^3, 1^9]$	350	1
	$[2^4, 1^7]$	910	1
	$[2^5, 1^5]$	1638	1
	$[2^6, 1^3]$	2002	3
	$[2^7, 1]$	1430	1
	$[3, 1^{12}]$	91	2
	$[3, 2, 1^{10}]$	715	1
	$[3, 2^2, 1^8]$	2835	2
	...		
	$[3^2, 1^9]$	1925	2, 2
	...		
	$[4, 1^{11}]$	364	1
	$[4, 2, 1^9]$	2925	2
	...		

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	$[5, 1^{10}]$	1001	2
	...		
	$[6, 1^9]$	2002	1
	...		
	$[7, 1^8]$	3003	2
	...		
	$[8, 1^7]$	3432	1
	...		
	$[8, 7]$	1430	7
	$[9, 1^6]$	3003	2
	...		
	$[9, 6]$	2002	2
	$[10, 1^5]$	2002	1
	...		
	$[10, 5]$	1638	5
	$[11, 1^4]$	1001	6
	$[11, 2, 1^2]$	2925	2
	$[11, 2^2]$	1925	1
	$[11, 3, 1]$	2835	26
	$[11, 4]$	910	1
	$[12, 1^3]$	364	1
	$[12, 2, 1]$	715	14
	$[12, 3]$	350	3
	$[13, 1^2]$	91	30
	$[13, 2]$	90	2
	$[14, 1]$	14	1
	$[15]$	1	2
16	$[1^{16}]$	1	1
	$[2, 1^{14}]$	15	1
	$[2^2, 1^{12}]$	104	2
	$[2^3, 1^{10}]$	440	1
	$[2^4, 1^8]$	1260	1
	$[2^5, 1^6]$	2548	1
	...		
	$[2^7, 1^2]$	3432	1
	$[2^8]$	1430	1
	$[3, 1^{13}]$	105	2
	$[3, 2, 1^{11}]$	896	1
	...		
	$[3^2, 1^{10}]$	2640	2, 2
	...		
	$[4, 1^{12}]$	455	1
	...		
	$[5, 1^{11}]$	1365	2
	...		
	$[6, 1^{10}]$	3003	1
	...		
	$[8^2]$	1430	2
	...		
	$[9, 7]$	3432	(2, 7)
	...		

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
16	$[11, 1^5]$	3003	2
	...		
	$[11, 5]$	2548	1
	$[12, 1^4]$	1365	1
	...		
	$[12, 2^2]$	2640	2
	...		
	$[12, 4]$	1260	2
	$[13, 1^3]$	455	6
	$[13, 2, 1]$	896	5
	$[13, 3]$	440	6
	$[14, 1^2]$	105	8
	$[14, 2]$	104	2
	$[15, 1]$	15	2
	$[16]$	1	2
17	$[1^{17}]$	1	1
	$[2, 1^{15}]$	16	1
	$[2^2, 1^{13}]$	119	2
	$[2^3, 1^{11}]$	544	1
	$[2^4, 1^9]$	1700	1
	...		
	$[3, 1^{14}]$	120	2
	$[3, 2, 1^{12}]$	1105	1
	...		
	$[4, 1^{13}]$	560	1
	...		
	$[5, 1^{12}]$	1820	2
	...		
	$[13, 1^4]$	1820	2
	...		
	$[13, 4]$	1700	2
	$[14, 1^3]$	560	3
	$[14, 2, 1]$	1105	16
	$[14, 3]$	544	1
	$[15, 1^2]$	120	34
	$[15, 2]$	119	2
	$[16, 1]$	16	1
	$[17]$	1	2
18	$[1^{18}]$	1	1
	$[2, 1^{16}]$	17	1
	$[2^2, 1^{14}]$	135	2
	$[2^3, 1^{12}]$	663	1
	$[2^4, 1^{10}]$	2244	1
	...		
	$[3, 1^{15}]$	136	2
	$[3, 2, 1^{13}]$	1344	1
	...		
	$[4, 1^{14}]$	680	1
	...		

n	λ	k	d_i, \dots, d_r
	$[5, 1^{13}]$	2380	2
	...		
	$[14, 1^4]$	2380	3
	...		
	$[14, 4]$	2244	2
	$[15, 1^3]$	680	2
	$[15, 2, 1]$	1344	17
	$[15, 3]$	663	6
	$[16, 1^2]$	136	9
	$[16, 2]$	135	2
	$[17, 1]$	17	2
	$[18]$	1	2
19	$[1^{19}]$	1	1
	$[2, 1^{17}]$	18	1
	$[2^2, 1^{15}]$	152	2
	$[2^3, 1^{13}]$	798	1
	$[2^4, 1^{11}]$	2907	1
	...		
	$[3, 1^{16}]$	153	2
	$[3, 2, 1^{14}]$	1615	1
	...		
	$[4, 1^{15}]$	816	1
	...		
	$[15, 4]$	2907	2
	$[16, 1^3]$	816	3
	$[16, 2, 1]$	1615	6
	$[16, 3]$	798	3
	$[17, 1^2]$	153	38
	$[17, 2]$	152	2
	$[18, 1]$	18	1
	$[19]$	1	2
20	$[1^{20}]$	1	1
	$[2, 1^{18}]$	19	1
	$[2^2, 1^{16}]$	170	2
	$[2^3, 1^{14}]$	950	1
	...		
	$[3, 1^{17}]$	171	2
	$[3, 2, 1^{15}]$	1920	1
	...		
	$[4, 1^{16}]$	969	1
	...		
	$[17, 1^3]$	969	6
	$[17, 2, 1]$	1920	19
	$[17, 3]$	950	2
	$[18, 1^2]$	171	10
	$[18, 2]$	170	2
	$[19, 1]$	19	2
	$[20]$	1	2

$\mathbf{p} = \mathbf{3} :$



p = 5 :	5	$(3, 1^2)$			
	6	$(3, 2, 1)$			
	7	$(3^2, 1)$			
	8	$(3^2, 1^2)$			
	9	$(4, 3, 1^2)$			
	10	$(4, 3, 2, 1)$	(5^2)	$(8, 1^2)$	
	11	$(4, 3^2, 1)$	$(6, 5)$	$(8, 2, 1)$	
	12	?	$(7, 5)$	$(8, 3, 1)$	
	13		$(8, 5)$?	
	14		?		
	15			$(10, 5)$	$(13, 1^2)$
	16			?	$(13, 2, 1)$
					?

p = 7 :	7	$(5, 1^2)$		
	8	$(5, 2, 1)$		
	9	$(5, 3, 1)$		
	10	$(5, 4, 1)$		
	11	$(5^2, 1)$		
	12	$(5^2, 1^2)$		
	13	?		
	14		(7^2)	$(12, 1^2)$
	15		$(8, 7)$	$(12, 2, 1)$
	16		$(9, 7)$?
			?	

Anhang C

Der Beweis von Lemma 2.2.4

Es sei $n \geq 3$ und $\lambda := (n-1, 1)$. Dann ist $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) = 0$ für ungerades n und $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für gerades n .

Der Beweis dieser Aussage erfolgt durch Bestimmung der Invariantenteilerform der Zassenhaus-Matrix $A_\lambda := A_\lambda(H_n)$. H_n besitzt $n-1$ Erzeuger und $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen (siehe 2.1.2), und es ist $k = n-1$ (siehe 1.2.24 (c)). Mit (2.1.2) gilt:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \boxed{A(1)} & & & \mathbf{0} \\ \boxed{A(2)} & & & \\ \vdots & & & \\ \boxed{A(n-2)} & & & \\ \boxed{A(n-1)} & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2} \times (n-1)^2}$$

mit Blöcken $A(i) \in \mathbb{Z}^{ki \times ki}$ definiert durch:

$$A(i) := \begin{pmatrix} 1 + \Sigma_1 \Sigma_i & & & \Sigma_1 + \Sigma_i \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 + \Sigma_{i-2} \Sigma_i & \Sigma_{i-2} + \Sigma_i \\ & & & 1 + \Sigma_{i-1} \Sigma_i + \Sigma_i \Sigma_{i-1} \\ & & & \Sigma_{i-1} + \Sigma_{i-1} \Sigma_i \Sigma_{i-1} + \Sigma_i \\ & & & \Sigma_i + 1 \end{pmatrix}.$$

Aus (1.2.24 (c)) ist bekannt, dass die $\Sigma_i = \Phi_\lambda((i, i+1)) \in \mathbb{Z}^{n-1 \times n-1}$ die folgende Gestalt haben:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ für } 2 \leq i \leq n-1.$$

Dabei steht der fettgedruckte Eintrag an der Position (i, i) .

Die einzelnen $(k \times k)$ -Blöcke der Zassenhaus-Matrix errechnen sich damit wie folgt:

$$(a) \quad \Sigma_1 + 1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i + 1 = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ für } 2 \leq i \leq n-1.$$

$$(b) \quad 1 + \Sigma_1 \Sigma_2 + \Sigma_2 \Sigma_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 \Sigma_1 + \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Für $3 \leq i \leq n-1$ gilt:

$$1 + \Sigma_{i-1} \Sigma_i + \Sigma_i \Sigma_{i-1} = \Sigma_{i-1} + \Sigma_i \Sigma_{i-1} + \Sigma_i = \begin{pmatrix} 3 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei nun $3 \leq i \leq n-1$.

$$1 + \Sigma_1 \Sigma_i = \Sigma_1 + \Sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ & 2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
 0 \dots 0 \mathbf{1} \mathbf{1} 0 \dots 0 & & & \\
 \hline
 & \ddots & & \\
 \hline
 & & 0 \dots 0 \mathbf{1} \mathbf{1} 0 \dots 0 & \\
 \hline
 & & & 0 \dots 0 \mathbf{1} \mathbf{1} 0 \dots 0 \\
 \hline
 & & & \mathbf{1} \mathbf{1} \\
 & & & \ddots \ddots \\
 & & & \mathbf{1} \mathbf{1} 0 \mathbf{0} \dots 0 \\
 \hline
 & & & 0 \mathbf{-1} \dots \mathbf{-1} \\
 \hline
 & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 & & \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{1} & \mathbf{1} \mathbf{0} \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 \hline
 & & & \mathbf{2} \\
 & & & \ddots \\
 & & & \mathbf{2} \\
 & & & \mathbf{2} \mathbf{0} \mathbf{0} \\
 & & & \mathbf{2} \\
 & & & \ddots \\
 & & & \mathbf{2}
 \end{array} \right)$$

Hierbei stehen die fettgedruckten Einträge in der i -ten Spalte des jeweiligen Blocks.

Nun addieren wir die unterste Blockzeile des umgewandelten $A(i-1)$ auf die unterste Blockzeile des umgewandelten $A(i)$. Dann stehen in dieser Blockzeile die Zweien genau an den Positionen, an denen in der darüberliegenden Blockzeile die Einsen stehen. Das heißt, wir können die unterste Blockzeile komplett ausräumen. (Das funktioniert auch für $i=3$. $A(2)$ ist zwar bisher noch nicht umgewandelt, aber die benötigten Zeilen stehen auch dort.)

Als nächstes betrachten wir in der letzten Blockspalte von $A(i)$ die Spalten $i-1$ und i . Die gesamte Blockspalte ist oberhalb von $A(i)$ gleich Null. Wenn wir die beiden betreffenden Spalten in der Blockspalte nach hinten tauschen, so rücken in $A(j)$ mit $j > i$ in der i -ten Blockspalte zwei Nullspalten nach hinten. Wenn wir also diese Umformung für $3 \leq i \leq n-1$ vornehmen, dann haben die umgewandelten $A(i)$ die Gestalt:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} M & & & & & \\ \hline & & M & & & \\ \hline & & & M & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & M \\ \hline \hline B(1) & & & & & \\ \hline & B(2) & & & & \\ \hline & & B(3) & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ \hline & & & & B(n-1) & \\ \hline & & & & & B(2) \\ \hline \hline 2E' & & & & & \\ \hline E' & E & & & & \\ \hline & E & E & & & \\ \hline & & & \ddots & \ddots & \\ \hline & & & E & E & \\ \hline & & & & E & E \end{array} \right)$$

Die einzelnen Blöcke haben dabei folgende Gestalt:

$$M = (0 \ -1 \ \dots \ -1) \in \mathbb{Z}^{1 \times n-1},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-3 \times n-1}, \quad E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-3 \times n-1},$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-3 \times n-1}, \quad B(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-3 \times n-1},$$

$$B(i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-4 \times n-1} \text{ für } 3 \leq i \leq n-2$$

mit der fettgedruckten 1 an der Position $(i-2, i)$. Damit entsteht $B(i)$ aus $B(2)$ durch Streichen der $(i-2)$ -ten Zeile.

Wir betrachten nun gewisse Untermatrizen, auf denen man weiterhin Zeilenumformungen ausführen kann, die den Rest der Gesamtmatrix nicht betreffen:

Die letzte Zeile in jedem $B(i)$ ist $b := (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1)$. Damit gilt:

$$\left(\begin{array}{c|c} M & \\ \hline & M \\ \hline b & \\ \hline & b \\ \hline E & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & 1 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & 1 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & 1 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Mit diesem Verfahren können wir der Reihe nach aus den Blockspalten $n-1$ bis 4 alle M an den entsprechenden Positionen entfernen.

Unter Verwendung der Zeile $b' := (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ aus $B(1)$ betrachten wir schließlich

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M & & \\ \hline & & M \\ \hline b' & & \\ \hline & & b \\ \hline E' & E & \\ \hline & E & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit sind alle Blöcke M bis auf den obersten aus der Gesamtmatrix entfernt. Der Rest der Matrix ist gleich geblieben.

Unter Verwendung der Tatsache, dass für $3 \leq i \leq n-2$ alle Zeilen aus $B(i)$ auch in $B(2)$ vorkommen, betrachten wir nun für $2 \leq i \leq n-2$:

$$\left(\begin{array}{c|c} B(i) & 0 \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline E & 0 \\ \hline E & E \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} B(i) & -B(i) \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline E & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} B(i) & 0 \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline 0 & -E \\ \hline E & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & B(i) \\ \hline B(2) & 0 \\ \hline -E & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right).$$

Wichtig ist dabei, dass wir die vorletzte Blockzeile nicht auf andere Zeilen addieren.

Analog wird $\left(\begin{array}{c|c} B(i) & 0 \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline E & 0 \\ \hline E & -E \end{array} \right)$ zu $\left(\begin{array}{c|c} 0 & B(i) \\ \hline B(2) & 0 \\ \hline E & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)$. Auf diese Weise können wir beginnend

bei $i = n-2$ sukzessive den hinteren $B(2)$ -Block bis in die zweite Blockspalte tauschen und dabei immer jeweils ein E eliminieren. Schließlich betrachten wir noch die Untermatrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} B(1) & 0 \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline E' & \pm E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & & \pm 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \pm 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \pm 1 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & \mp 1 & \mp 1 & & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \mp 1 & \mp 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \pm 1 & & \\ & & & 0 & & & \pm 1 & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} B(1) & 0 \\ \hline 0 & B(2) \\ \hline 0 & \pm E \end{array} \right).$$

Das Vorzeichen von E ist abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist, hat aber auf die Invariantenteiler keinen Einfluss. Die gesamte Matrix hat jetzt die Form:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} M & & & & & & \\ \hline B(1) & & & & & & \\ \hline 2E' & & & & & & \\ \hline & B(2) & & & & & \\ \hline & \pm E & & & & & \\ \hline & & B(2) & & & & \\ \hline & & E & & & & \\ \hline & & & B(3) & & & \\ \hline & & & E & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & B(n-2) & \\ \hline & & & & & E & \end{array} \right).$$

Die Blöcke $\left(\frac{B(2)}{\pm E}\right)$ und $\left(\frac{B(i)}{E}\right)$ für $3 \leq i \leq n - 2$ besitzen als Invariantenteiler nur Einsen. Es bleibt also nur noch zu betrachten:

1. Fall: n ungerade

$$\left(\begin{array}{c} M \\ \hline B(1) \\ \hline 2E' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \dots & -1 & & & & \\ \hline 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ \hline & & & & 2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \hline 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

2. Fall: n gerade

$$\left(\begin{array}{c} M \\ B(1) \\ 2E' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & \cdots & -1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & \cdots & -2 & 2 \\ & & & 2 & -2 & & & -2 \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & 2 & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & -2 & 2 \\ & & & & & & 2 & -2 \\ & & & & & & & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 2 \end{array} \right)$$

Insgesamt folgt damit, dass für ungerades n alle Invariantenteiler von A_λ gleich 1 sind und für gerades n der einzige von 1 verschiedene Invariantenteiler 2 (mit Vielfachheit 1) ist. Damit folgt die Behauptung. \square

Literaturverzeichnis

- [AB95] J. L. ALPERIN, R. B. BELL. *Groups and Representations*, Springer (1995)
- [BKM96] V. P. BURICHENKO, A. S. KLESHCHEV, S. MARTIN. *On cohomology of dual Specht modules*, Journal of Pure and Applied Algebra 112 (1996) 157-180
- [Br73] G. BRUNNER. *Homologische Algebra*, B.I.-Wissenschaftsverlag (1973)
- [CM72] H. S. M. COXETER, W. O. J. MOSER. *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer (1972)
- [CR62] C. W. CURTIS, I. REINER. *Representation Theory of the Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley (1962)
- [CR81] C. W. CURTIS, I. REINER. *Methods of Representation Theory Vol 1*, Wiley (1981)
- [Ev91] L. EVENS. *The Cohomology of Groups*, Oxford University Press (1991)
- [GAP] THE GAP GROUP. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, <http://www.gap-system.org> (2006)
- [GP00] M. GECK, G. PFEIFFER. *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, Oxford University Press (2000)
- [Ja78] G. D. JAMES. *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Springer (1978)
- [JK81] G. D. JAMES, A. KERBER. *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Addison-Wesley (1981)
- [KS94] A. I. KOSTRIKIN, I. R. SHAFAREVICH. *Algebra V: Homological Algebra*, Springer (1994)
- [Lü06] F. LÜBECK. *GAP 4 package EDIM - Elementary Divisors and Integer Matrices, Version 1.2.3*, <http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck> (2006)
- [Su82] M. SUZUKI. *Group Theory I*, Springer (1982)
- [Sz03] A. SZCZEPAŃSKI. *Holonomy Groups of Crystallographic Groups with Finite Outer Automorphism Groups*, Research and Exposition in Mathematics, Volume 27 (2003) 163-165

- [Vo96] L. VOLKMANN. *Fundamente der Graphentheorie*, Springer (1996)
- [Wa02] R. WALDMÜLLER. *Eine flache Mannigfaltigkeit ohne Symmetrien*, Diplomarbeit (2002)
- [We94] C. A. WEIBEL. *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994)
- [Za48] H. ZASSENHAUS. *Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen*, Commentarii Mathematici Helvetici 21 (1948) 117-141

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.