Graduiertenkolleg

Experimentelle und konstruktive Algebra

RWTH AACHEN UNIVERSITY
Experimental and constructive algebra

Kolloquiumsvortrag

Dienstag, 14. Januar 2014, 14:15 Uhr, Hörsaal klPhys

Jonathan Fell (Lehrstuhl A für Mathematik):
Charakterisierung des Wavefrontsets mittels Shearlets

Ein regulärer gerichteter Punkt einer temperierten Distribution $\tau \in S'(\mathbb{R}^2)$ ist ein Punkt $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ zu dem es eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ gibt, die $\equiv 1$ auf einer Umgebung U_{t_0} von t_0 ist so, dass

$$|\widehat{\varphi} * \widehat{\tau}(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-N} \text{ für } \frac{x_2}{x_1} \in V_{s_0} \tag{1}$$

für $x \to \infty$ wobei V_{s_0} eine Umgebung von s_0 ist. Ein regulärer Punkt t_0 ist ein Punkt dergestalt, dass (t_0, s_0) ein regulärer gerichteter Punkt von τ ist für alle $s_0 \in \mathbb{R}$. Die Konstante C aus (1) sollte dabei unabhängig von s_0 gewählt werden können. Ist Ungleichung (1) erfüllt, so können wir die *Funktion* $\widehat{\varphi} * \widehat{\tau}$ fouriertransformieren und erhalten eine $C^\infty(\mathbb{R}^2) - $ *Funktion*, die wir mit $\varphi\tau$ bezeichnen wollen. Anchaulich ist τ in einer Umgebung von t_0 also durch eine Funktion darstellbar.
Das Komplement der regulären gerichteten Punkte in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ bildet das *Wavefrontset* $\mathrm{WF}(\tau)$, also die Punkte, in deren Umgebung sich grob gesprochen die Distribution nicht wie eine Funktion verhält.
Ziel der Arbeit war es, ein anderes Kriterium nachzuweisen, reguläre gerichtete Punkte zu bestimmen. Dazu verwenden wir die sogenannten *Shearletmatrizen*

$$M_{a,s} = \begin{pmatrix} a & -a^\delta s \\ 0 & a^\delta \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } M^v_{a,s} = \begin{pmatrix} a^\delta & 0 \\ -a^\delta s & a \end{pmatrix}$$

wobei $a > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ sind. Bei geeigneter Einschränkung an diese Parameter erhält man, dass eine spezielle Funktion $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ ein Wavelet ist, das heißt es gilt

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \int_{-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\langle f, T_t D_{M_{a,s}} \psi\rangle|^2 \, dt ds \frac{da}{a^3}$$

für f in einem bestimmten Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^2)$.
Ziel war es, zu zeigen, dass die *Shearletkoeffizienten* $\mathcal{SH}_\psi\tau(a,s,t) = \tau(T_t D_{M_{a,s}}\psi)$ genau dann lokal um t_0 und lokal in Richtung s_0 rapide in a abklingen, wenn (t_0, s_0) ein regulärer gerichteter Punkt von τ ist, das heißt es existieren Umgebungen U_{t_0} von t_0 und V_{s_0} von s_0 so dass

$$\mathcal{SH}_\psi\tau(a,s,t) = \mathcal{O}(a^N) \text{ für } a \to 0$$

gleichmäßig in $U_{t_0} \times V_{s_0}$.

Wir laden alle Interessierten herzlich ein.

Ab 13:30 Uhr gibt es Kaffee und Tee in der Bibliothek des Lehrstuhl D für Mathematik.