Eine weitere Anwendung der Methode von Bachoc-Venkov

Michael Jürgens

28. September 2011

- Eigentliches Thema der Promotion: Frage nach Existenz eines 36-dimensionalen extremalen 3-modularen Gitters klären. Die extremale Modulform ist in diesem Fall:

$$1 + 646380q^4 + 24820992q^5 + 565367040q^6 + O(q^7)$$

- Methode, um Nicht-Existenz zu zeigen: C.Bachoc, B.Venkov: *Modular forms, lattices and spherical designs*, 2000

In diesem Vortrag:

- Vorstellen der Methode und der Umsetzung in MAGMA (ganz grob).
- Anwendung auf bekannte Fälle sowie den Fall $n = 24, l = 7$.

Grundlegendes, Bezeichnungen

- L gerades Gitter der Dimension n, außerdem ℓ-modular, d.h. $L' := \sqrt{\ell} L^{\#} \cong L$.
- Für ein harmonisches Polynom $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad d ist die Thetareihe mit sphärischen Koeffizienten definiert als

$$\theta_{L,P} = \sum_{x \in L} P(x) q^{\frac{(x,x)}{2}}$$

- $\theta_{L,P}$ ist Modulform vom Gewicht $k = n/2 + d$ zur Gruppe $\Gamma_0(\ell)$ und dem Charakter $\chi_{n/2}$ mit

$$\chi_s(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \left(\frac{(-\ell)^s}{d} \right)$$

Thetareihen mit sphärischen Koeffizienten

Für die Fricke-Involution t_ℓ gilt mit $\chi_s(t_\ell) = i^s$:

$$\theta_{L,P} \mid_k t_\ell = \chi_{n/2}(t_\ell) \cdot \theta_{L',P}$$

Daher gilt (wegen $(L')' = L$):

Spitzenformen

Die folgenden beiden Reihen sind Spitzenformen von Gewicht $k = n/2 + d$:

$$\theta_{L,P} + \theta_{L',P} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2})$$

$$\theta_{L,P} - \theta_{L',P} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2+2})$$

Wichtig für das folgende: Basen und somit auch die Dimensionen $\delta(d), \delta'(d)$ dieser Räume sind bekannt.

Unbekannte

Sei $\alpha \in L$, $s \geq 1$. Gesucht: LGS mit den folgenden Unbestimmten $(\min(L) \leq 2t \leq \min(L) + 2(s-1))$:

Konfigurationsanzahlen

$$n_{2t,i}(\alpha) := |\{x \in L_{2t} \mid (x, \alpha) = \pm i\}|$$

$$n^*_{2t,j}(\alpha) := |\{y \in L'_{2t} \mid (y, \alpha) = \pm\sqrt{\ell} j\}|$$

Zu gegebenem t gibt es nur endlich viele Werte $n_{2t,i} \neq 0$, denn aus der Cauchy-Scharz-Ungleichung folgt:

$$i = |(x, \alpha)| \leq \sqrt{|x| \cdot |\alpha|} = \sqrt{2ta}$$

Gegenbauer-Polynome

Gesucht: Polynome, deren Funktionswert nur abhängig von $|x|$ und (x, α).

Ansatz

$$P_d^{(\alpha)}(x) := F_d((x, \alpha), \sqrt{|x||\alpha|})$$

mit homogenem Polynom F_d vom Grad d in zwei Veränderlichen, so dass $P_d^{(\alpha)}$ harmonisch in der Variable x für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist. Lösung:

$$P_d^{(\alpha)}(x) = F_d((x, \alpha), \sqrt{|x||\alpha|}) = \sqrt{|x||\alpha|}^d G_d^{n/2-1}\left(\frac{(x, \alpha)}{\sqrt{|x||\alpha|}}\right)$$

mit den bekannten Gegenbauer-Polynomen vom Grad d und Parameter $n/2 - 1$. Z.B:

$$P_2^{(\alpha)}(x) = (x, \alpha)^2 - \frac{1}{n}|x||\alpha|$$

Gleichungen

Für diese harmonischen Polynome $P_d^{(\alpha)}$ gilt:

$$\theta_{L,P_d^{(\alpha)}} = \sum_{x \in L} P_d^{(\alpha)}(x) q^{\frac{(x,x)}{2}} = \sum_{t \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} F_d(i, \sqrt{2ta}) \cdot n_{2t,i}(\alpha) \right) q^t$$

Folglich sind die Koeffizienten der Reihen $\theta_{L,P} \pm \theta_{L',P}$ linear in den Variablen $n_{2t,i}(\alpha), n^*_{2t,i}(\alpha)$. Man erhält $s - \delta(d)$ bzw. $s - \delta'(d)$ Gleichungen.
Außerdem erhält man jeweils s Gleichungen durch

$$\sum_{i \geq 0} n_{2t,i}(\alpha) = |L_{2t}| \quad \text{und} \quad \sum_{j \geq 0} n^*_{2t,j}(\alpha) = |L'_{2t}|$$

MAGMA-Programm

- Gegeben also LGS $m \cdot x = b$. MAGMA liefert ganzzahlige Lösungsmenge durch $x_0 + A \cdot x$.
- Man kann die konkrete Lösung x_0 und die Matrix A so abändern, dass $x_0 + A \cdot x$ nur genau die Lösungen mit geraden Komponenten parametrisiert.
- Da die Lösungen außerdem positiv sein müssen, d.h. $x_0 + A \cdot x \geq 0$, wird mithilfe des Befehls HalfspaceToPolyhedron ein Polyeder (fast immer Polytop) P erstellt, welches alle positiven (geraden) Lösungen liefert.
- Der Befehl Points(P) gibt die ganzzahligen Punkte von P aus und Volume(P) berechnet das Volumen von P.

Beispiele

Mit entsprechend gewählten Parametern erhält man im Fall:

- $n = 12, \ell = 11$: 0 Punkte $\Rightarrow$ extremales Gitter existiert nicht (bekannt: Nebe, Venkov)
- $n = 36, \ell = 3$: 60 Punkte
- $n = 12, \ell = 7$: 2 Punkte
- $n = 18, \ell = 7$: 2 Punkte
- $n = 24, \ell = 7$: Volumen circa 1500

Positivitäts-Kriterium

Kriterium

Für alle $d \in 2\mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{x,\alpha \in L_a} P_d^{(\alpha)}(x) = \sum_{\alpha \in L_a} \sum_{i \geq 0} F_d(i,a) n_{a,i}(\alpha) \geq 0$$

Also notwendig mindestens für eine Lösung

$$\sum_{i \geq 0} F_d(i,a) n_{a,i}(\alpha) \geq 0$$

Folglich kann das Polytop P mit einem weiteren Halbraum geschnitten werden, sodass bei jedem existierenden Gitter mindestens eine der verbleibenden Lösungen als Konfiguration tatsächlich vorkommen muss.

Ergebnisse

- $n = 12, \ell = 7$: 0 Punkte $\Rightarrow$ extremales Gitter existiert nicht (bekannt: Scharlau, Hemkemeier)
- $n = 18, \ell = 7$: 0 Punkte $\Rightarrow$ extremales Gitter existiert nicht (bekannt: Bachoc, Venkov)
- $n = 24, \ell = 7$: 0 Punkte $\Rightarrow$ extremales Gitter existiert nicht
- $n = 36, \ell = 3$: 60 Punkte