Weihnachtsübung zur Algebraischen Zahlentheorie

PD Dr. Jürgen Müller, **Ausgabe:** 24.12.2023

Ich wünsche
allen Teilnehmern dieser Vorlesung
ein gesegnetes Weihnachtsfest
und ein gutes Jahr 2024.

Das Rektorat der Universität in A. hat vorgeschlagen, die Vergabe von Übungsscheinen an moderneren Kriterien zu orientieren, insbesondere sollen Teamfähigkeit und strategisches Denken einen höheren Stellenwert bekommen. Hier sind einige Ideen dazu:

(W.1) Aufgabe.
Um dem praktischen Anteil der Vorlesung Computeralgebra Rechnung zu tragen, sollen hier die Übungsscheine wie folgt zugeteilt werden:

Im Computerraum stehen 60 Rechner, die zufällig geheim von 1 bis 60 durchnumeriert werden. Die Studierenden tragen sich auf Listen mit je 60 Plätzen ein. Nun betreten die Studierenden einzeln in der Reihenfolge einer solchen Liste den (uneinsehbaren) Computerraum, führen das unten genannte Protokoll aus, und verlassen dann den Raum wieder. Sie dürfen vor Beginn des Prozederes eine Strategie vereinbaren, dann aber nicht mehr miteinander kommunizieren. Also:

Jeder versucht, sich mit seinem Listenplatz als Benutzernamen nacheinander in höchstens der Hälfte der Rechner einzuloggen. Der jeweilige Rechner antwortet, indem er seine Nummer nennt. Stimmen Listenplatz und Nummer überein, so wird der Übungsschein erteilt, sonst nicht. (Das läßt sich also leicht vollautomatisch überwachen, was will man mehr?)

Nun ist klar: Die Wahrscheinlichkeit, daß jemand durch zufällige Auswahl der Rechner den Übungsschein erwirbt, ist $\frac{1}{2}$ (was womöglich gar nicht mal so schlecht wäre). Also ist bei dieser Vorgehensweise die Wahrscheinlichkeit, daß von einer Liste sämtliche Studierenden Erfolg haben, gleich $(\frac{1}{2})^{60} \sim 10^{-18}$, also 'praktisch Null' — der Rektor ist Ingenieur. Trotzdem behauptet er, es gebe eine Strategie, mit der die Wahrscheinlichkeit, daß alle Studierenden einen Übungsschein bekommen, größer als 30% ist. Hat er recht?

(W.2) Aufgabe.
Einmal abgesehen von den fraglichen Erfolgschancen, ist dieses Verfahren auch nicht so leicht auf andere Veranstaltungen übertragbar, insbesondere nicht auf solche mit vielen Teilnehmern. Deshalb hat der Prorektor (er ist Physiker) folgende Alternative vorgeschlagen, die zudem laut seinen Worten noch größere Erfolgsaussichten birge:

Jeweils n Studierende versammeln sich in einem großen Hörsaal. Wieder dürfen sie vor Beginn des folgenden Prozederes eine Strategie vereinbaren, dann aber nicht mehr miteinander kommunizieren. Nun schließt jeder die Augen kurz, und bekommt dabei einen Hut aufgesetzt, der entweder rot oder schwarz ist, und dessen Farbe zufällig ausgewählt wird. (Damit entfällt auch das lästige Führen von Listen.) Anschließend geht der Prorektor persönlich herum, und fragt jeden der Studierenden nach der Farbe seines jeweiligen Hutes. Wird die Farbe richtig genannt, so wird der Übungsschein direkt ausgehändigt, sonst nicht.

Wieder ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Raten den Übungsschein zu erwerben, gleich $\frac{1}{2}$ ist. Wie groß ist bei optimaler Strategie die Erfolgswahrscheinlichkeit?

(W.3) Aufgabe.
Der zukünftige Rektor ist Mathematiker. Er weißt darauf hin, daß bei dem obigen Prozedere auf die meisten Voraussetzungen verzichtet werden könne:

Es werden auf einen Streich beliebige (eventuell auch unendliche) Mengen von Studenten examiniert. Wieder dürfen sie eine Strategie vereinbaren, dann aber nicht mehr miteinander kommunizieren, und bekommen sodann wie gehabt die Hüte aufgesetzt. Anschließend werden sie alle gleichzeitig (also nicht mehr nacheinander) wie oben befragt, und die Übungsscheine entsprechend verteilt. (Womit sich wieder einmal zeigt, wie gerne die Mathematik die Realität ignoriert; oder sind es die Mathematiker?)

Der designierte Rektor behauptet nun, es gebe eine Strategie, bei der alle bis auf endlich viele der Studenten einen Übungsschein bekommen. Kann das stimmen?