5-modulare Zerlegungszahlen für die einfache Gruppe Co_3

Diplomarbeit
im Fach Mathematik
an der RWTH Aachen
vorgelegt von
Jürgen Müller

13. Mai 1991

Wahn! Wahn! Überall Wahn!

Wohin ich forschend blick
in Stadt- und Weltchronik,
den Grund mir aufzufinden,
warum gar bis aufs Blut
die Leut' sich quälen und schinden
in unnütz toller Wut!

Hat keiner Lohn noch Dank davon:
in Flucht geschlagen, wähnt er zu jagen.
Hört nicht sein eigen Schmerzgekreisch,
wenn er sich wühlt ins eigne Fleisch,
wähnt er Lust sich zu erzeigen.

Wer gibt den Namen an?
's ist halt der alte Wahn,
ohn' den nichts mag geschehen,
's mag gehen oder stehen!
Steht's wo im Lauf,
er schläft nur neue Kraft sich an;
gleich wacht er auf,
dann schaut wer ihn bemeistern kann!

R. Wagner: Die Meistersinger von Nürnberg

Prolog

In dem vorliegenden Text beschäftige ich mich mit dem Problem der Bestimmung der 5-modularen Zerlegungszahlen für die sporadische einfache Gruppe Co_3. Hier enthält der Hauptblock 26 gewöhnliche irreduzible und 18 irreduzible Brauercharaktere. Ich war in der Lage, 15 irreduzible Brauercharaktere und 13 projektiv-unzerlegbare Charaktere in diesem Block zu berechnen.

Die hier betrachtete Fragestellung, auf die ich von G. Hiss aufmerksam gemacht wurde, fügt sich nahtlos in den Reigen der gegenwärtig in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen betrachteten Probleme ein. Nach Vollendung der vielzitierten Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen rückt natürlich die Untersuchung der Eigenschaften dieser Gruppen in den Mittelpunkt. So sind einerseits zur Untersuchung der sogenannten sporadischen einfachen Gruppen Ad-Hoc-Methoden nötig. Wie man an der Namensgebung schon erkennt, liegt das in der Natur der Dinge, und in diesem Text hier geht es in der Tat um solch ein Beispiel. Andererseits erfahren die endlichen Gruppen vom Lieschen Typ zur Zeit sehr viel Aufmerksamkeit. Ziel der theoretischen Entwicklung ist es hier, allgemeine Methoden zu entwickeln, die auf ganze Serien von Gruppen Anwendung finden können. Außerdem möchte ich auf einen weiteren ganz entscheidenden Aspekt hinweisen: Die moderne Mathematik ist ohne den Einsatz von sogenannten Computern nicht mehr vorstellbar, ganz besonders hier am Lehrstuhl D für Mathematik an der RWTH Aachen nicht. Und so wäre es ohne den Einsatz von leistungsfähigen Rechnern völlig unmöglich gewesen, die hier vorgestellten Ergebnisse zu gewinnen.

Gleichwohl bin ich auch hier bereits an die Grenzen des, zumindest hier in Aachen, Machbaren gestoßen und ein entsprechend großer Teil des vorliegenden Textes befaßt sich mit Methoden, wie man konkret gegebene Moduln für eine endlich-dimensionale Algebra auf dem Rechner handhaben kann. Das Ergebnis dieses Verlangens ist ein von mir auf Anregung von K. Lux entwickelter Algorithmus zur Berechnung von Untermodulverbänden, der sich formal sehr schön in den Kontext von allgemein als Kondensationsmethoden Verfahren einbetten läßt. Dieser Algorithmus ist inzwischen von M. Ringe implementiert worden und erweist sich, nach meiner wohl etwas subjektiven Meinung, als sehr anwendungsfreundlich. Nach der Vorstellung des allgemeinen theoretischen Rahmens, in dem sich das folgende Geschehen abspielt, und der theoretischen Grundlagen der eben schon erwähnten Kondensationsmethoden gebe ich die von mir unter starkem Rechnereinsatz gewonnenen Ergebnisse über die Untersuchung des konkreten Beispiels wieder. Der zweistufige Zugang, der die charaktertheoretischen den modultheoretischen Untersuchungen voranstellt, wird sowohl von den mir zur Verfügung stehenden Programmsystemen nahegelegt, als auch von den tatsächlichen Schwierigkeiten diktiert. Wie sich zeigt, wäre die Untersuchung konkreter Moduln auf dem Rechner ohne die dann bekannten charaktertheoretischen Informationen wohl aussichtslos.

An dieser Stelle möchte ich mich ausdrücklich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D bedanken, die durch ihr Wirken die Atmosphäre schaffen, die die konsequente und zeitaufwendige Beschäftigung mit Mathematik erst möglich macht. Dabei sind insbesondere die mir hier zur Verfügung stehenden Rechner und Programmsysteme ein nicht zu unterschätzendes Ingredienz. Last but not least möchte ich noch meinen Dank an Professor H. Pahlings, der mir in meiner Arbeit freie Hand gelassen hat, und an K. Lux, ohne dessen Anregungen und profunde Kenntnise dieser Text nicht hätte entstehen können, aussprechen.

Schließlich gebe ich hiermit das durch meine Unterschrift bekräftigte Bekenntnis ab, daß dieser Text natürlich ohne die Benutzung irgendwelcher unerlaubter Hilfsmittel entstanden ist.

Inhalt

1. Zerlegungszahlen, Brauercharaktere

In diesem Kapitel werden kursorisch die theoretischen Grundlagen des in dieser Arbeit verfolgten Programms wiedergegeben. Die hier und in späteren Kapiteln benutzten wohlbekannten Begriffe und Aussagen der gewöhnlichen Charaktertheorie findet man etwa in dem Buch von M. Isaacs, die der allgemeinen und insbesondere der modularen Darstellungstheorie in den Büchern von C. Curtis und I. Reiner und von W. Feit, die der allgemeinen Ringtheorie in dem Buch von W. Müller und die der Theorie der Blöcke von zyklischem Defekt in dem Buch von J. Alperin. Die in diesem Text benutzten Schreibweisen sind weitgehend den allgemein üblichen suggestiven Notationen angepaßt.

An dieser Stelle seien bereits die von mir für die Rechnungen verwendeten Programmsysteme erwähnt. Die auf Charakterebene durchgeführten Rechnungen erfolgten mit dem System Moc von G. Hiss, K. Lux und R. Parker. Die theoretische Grundlage der in diesem System ausgenutzten Prinzipien stellt das Reziprozitätsgesetz von Brauer dar. In der Tat sind aber inzwischen in Moc hochelaborierte Algorithmen zur Handhabung von Brauercharakteren implementiert. Hierzu sei etwa auf die Originalarbeit von C. Jansen verwiesen. Ebenso habe ich von dem System Cas, das dem Rechnen mit gewöhnlichen Charakteren dient, Gebrauch gemacht. In diesem Zusammenhang sei etwa auf die Originalarbeit von J. Neubüser, H. Pahlings, und W. Plesken hingewiesen. Die auf Modulebene von mir durchgeführten Rechnungen sind mit dem System Meat-Axe von R. Parker erfolgt. Hierin sind ebenso elaborierte Algorithmen zur Handhabung von Matrizen und Permutationen implementiert. Hierzu vergleiche man etwa die Originalarbeit von R. Parker. Zuweilen habe ich auch die Systeme Gap und Cayley benutzt. Hier sei auf die unten zitierte Handbuchliteratur verwiesen.

Zentral in Abschnitt 1.1. ist mit Definition 1.1.5. der Begriff der sogenannten Zerlegungszahl. Wichtige Teile der in späteren Kapiteln wiedergegebenen Rechnungen wurden allerdings auf Charakterebene durchgeführt. Daher sind die Abschnitte 1.2. und 1.3. der Begriffsbildung des sogenannten Brauercharakters nach Definition 1.2.4. und der Festlegung des sogenannten Brauer-Lifts mittels sogenannter Conway-Polynome nach Definition 1.3.2. gewidmet. In Abschnitt 1.4. sind einige rechnerische Ergebnisse über den Brauer-Lift von Nullstellen von Kreisteilungspolynomen angegeben, die im Zusammenhang mit Satz 1.2.6. in die in Kapitel 3. wiedergegebenen Rechnungen eingegangen sind. Die dazu erforderlichen Rechnungen habe ich mit dem Programmsystem Gap durchgeführt.

Im folgenden bezeichne G eine endliche Gruppe und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Weiter sei der Exponent von G mit $\mathrm{Exp}(G)$ und dessen p'-Anteil mit $\mathrm{Exp}'(G)$ bezeichnet.

1.1. Zerlegungszahlen

1.1.1. Definition: Es seien $K \geq \mathbb{Q}$ ein algebraischer Zahlkörper, $\mathcal{R} \subset K$ der Ring der ganzen Zahlen in K, $p\mathcal{R} \trianglelefteq \wp \lhd \mathcal{R}$ ein Primideal, $\mathcal{R}_\wp$ der von $\wp$ induzierte diskrete Bewertungsring von K und F ein endlicher Körper mit $F \cong \mathcal{R}/\wp \cong \mathcal{R}_\wp/\wp\mathcal{R}_\wp$ als Ringe. Dann heiße das Tripel $(K, \mathcal{R}_\wp, F)$ ein *p-modulares System.*

1.1.2. Definition: Es seien $(K, \mathcal{R}_\wp, F)$ ein p-modulares System und U ein endlich-dimensionaler KG-Rechtsmodul. Dann heiße ein als $\mathcal{R}_\wp$-Modul endlich erzeugter $\mathcal{R}_\wp G$-Teilmodul $W \leq U$ mit $U = W \otimes_{\mathcal{R}_\wp} K$ eine *$\mathcal{R}_\wp$-Form für U.*

1.1.3. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 1.1.2. gegeben. Dann existiert eine $\mathcal{R}_\wp$-Form für U.

Beweis: Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 496.

1.1.4. Satz: **a)** Es existiert ein algebraischer Zahlkörper $K \geq \mathbb{Q}$, der Zerfällungskörper für G ist.
b) Für ein p-modulares System $(K, \mathcal{R}_\wp, F)$ ist mit K auch F ein Zerfällungskörper für G.

Beweis: **a)** Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 203.
b) Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 592.

1.1.5. Definition: Es seien K ein Zerfällungskörper für G, $\{U^{(j)}\}_{j\in J}$ für eine Indexmenge J ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen irreduzibler KG-Moduln und $\{V^{(i)}\}_{i\in I}$ für eine Indexmenge I ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen irreduzibler FG-Moduln.
a) Für $j \in J$, $i \in I$ und eine $\mathcal{R}_\wp$-Form $\tilde{U}^{(j)}$ für $U^{(j)}$ sei die *Zerlegungszahl* $d_{ji} \in \mathbb{N}_0$ definiert als die Vielfachheit des Kompositionsfaktors $V^{(i)}$ in einer Kompositionsreihe des FG-Moduls $\tilde{U}^{(j)}/(\tilde{U}^{(j)}\wp\mathcal{R}_\wp)$.
b) Die Matrix $D := \{d_{ji}\}_{j\in J, i\in I}$ heiße die *Zerlegungsmatrix von* G.

1.1.6. Satz: von Brauer-Nesbitt
Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 1.1.5. gegeben. Dann ist für $j \in J$ und $i \in I$ die Zerlegungszahl d_{ji} unabhängig von der Wahl der $\mathcal{R}_\wp$-Form $\tilde{U}^{(j)}$.

Beweis: Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 585.

1.1.7. Satz: Reziprozitätsgesetz von Brauer
Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 1.1.5. gegeben.
a) Für $i \in I$ sei $f^{(i)} \in FG$ ein primitives Idempotent mit $f^{(i)}FG/\mathrm{Rad}(f^{(i)}FG) \cong V^{(i)}$ als FG-Moduln. Dann existiert ein Idempotent $e^{(i)} \in \mathcal{R}_\wp G$ mit $e^{(i)} + \wp\mathcal{R}_\wp G = f^{(i)}$.
b) In einer Kompositionsreihe des KG-Moduls $e^{(i)}KG$ kommt der Kompositionsfaktor $U^{(j)}$ für ein $j \in J$ mit der Vielfachheit d_{ji} vor.

Beweis: **a) ,b)** Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 593-4.

1.2. Brauercharaktere

1.2.1. Satz: von Brauer
Es ist $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/\mathrm{Exp}(G)})$ ein Zerfällungskörper für G.

Beweis: Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 292.

1.2.2. Satz: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_k := e^{2\pi i/k} \in \mathbb{C}$. Ferner sei $(K, \mathcal{R}_\wp, F)$ ein p-modulares System mit $K := \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{Exp}(G)})$. Dann ist

$$\lambda : \{\zeta^i_{\mathrm{Exp}'(G)} \in \mathcal{R}\}_{i=1}^{\mathrm{Exp}'(G)} \to \{\zeta^i_{\mathrm{Exp}'(G)} + \wp \in F\}_{i=1}^{\mathrm{Exp}'(G)} : \zeta^i_{\mathrm{Exp}'(G)} \mapsto \zeta^i_{\mathrm{Exp}'(G)} + \wp$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Dies findet man etwa in Curtis-Reiner, Seite 588-9.

1.2.3. Definition: Die Umkehrabbildung zu der in Satz 1.2.2. genannten Abbildung λ heiße *Brauer-Lift*.

1.2.4. Definition: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 1.2.2. seien V ein FG-Modul und $\varrho : FG \to \mathrm{End}_F(V)$ die zugehörige Darstellung. Für ein $g \in G$, dessen Ordnung nicht von p geteilt werde, sei $\mathrm{Spur}(g\varrho) = \sum_{i=1}^n \zeta^{n_i(g)}_{\mathrm{Exp}'(G)} + \wp$ für $n := \mathrm{Dim}_F(V)$ und $n_i \in \mathbb{N}_0$.
a) Dann heiße die Abbildung

$$\varphi : \{g \in G; p \text{ ist kein Teiler der Ordnung von } g\} \to \mathcal{R} : g \mapsto \sum_{i=1}^n \zeta^{n_i(g)}_{\mathrm{Exp}'(G)}$$

der *zu* V *gehörende Brauercharakter*.
b) Ist V als FG-Modul projektiv, so heiße φ ein *projektiver Charakter*.

1.2.5. Bemerkung: Ist V als FG-Modul projektiv, so ist φ bereits ein gewöhnlicher Charakter. Dies folgt direkt aus dem Reziprozitätsgesetz von Brauer.

1.2.6. Satz: Es seien $E \leq F$ endliche Körper der Charakteristik $p > 0$, $\alpha \in F^*$ und $f \in E[t]$ das Minimalpolynom von α über E. Weiter seien V ein EG-Modul und $\varrho : EG \to \mathrm{End}_E(V)$ die zugehörige Darstellung. Ferner sei $\hat{\varrho} : FG \to \mathrm{End}_F(V \otimes_E F)$ die zu $V \otimes_E F$ gehörende Darstellung. Schließlich sei $g \in G$, dessen Ordnung $o_G(g) \in \mathbb{N}$ nicht von p geteilt werde.
a) Es ist $g\hat{\varrho}$ diagonalisierbar.
b) Ist α ein Eigenwert von $g\hat{\varrho}$, so ist f ein Teiler von $t^{o_G(g)} - 1 \in E[t]$.
c) Für die Vielfachheit des Eigenwerts α hat man

$$\mathrm{Dim}_F(\mathrm{Kern}(g\hat{\varrho} - \alpha \cdot id_{V \otimes_E F})) = \mathrm{Dim}_E(\mathrm{Kern}(f(g\hat{\varrho})))/\mathrm{Grad}(f).$$

Beweis: **a)** folgt sofort aus dem Satz von Maschke für das Gruppenerzeugnis $< g > \leq G$.
b),c) folgen direkt durch Inspektion.

1.3. Conway-Polynome

1.3.1. Definition: Es seien E ein endlicher Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\hat{E} \geq \tilde{E} \geq E$ endliche Körpererweiterungen.
a) Ein $\alpha \in E^*$ heiße *primitiv in* E^*, falls $< \alpha >= E^*$ als Gruppenerzeugnis in E^* gilt.
b) Ein irreduzibles Polynom $f \in E[t]$, das die Nullstelle $\alpha \in \tilde{E}^*$ habe, heiße *primitiv für* $\tilde{E} \geq E$, falls α primitiv in $\tilde{E}^*$ ist.
c) Ein für $\hat{E} \geq E$ primitives Polynom $\hat{f} \in E[t]$ und ein für $\tilde{E} \geq E$ primitives Polynom $\tilde{f} \in E[t]$ heißen *kompatibel*, falls für eine Nullstelle $\alpha \in \hat{E}^*$ von $\hat{f}$ bereits $\alpha^{|\hat{E}^*|/|\tilde{E}^*|} \in \tilde{E}^*$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$ ist.

1.3.2. Definition: Es sei $\mathcal{C}_d := \{C_i\}_{i=1}^d \subseteq \mathbb{F}_p[t]$ für ein $d \in \mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$ sei C_i primitiv für $\mathbb{F}_{p^i}/\mathbb{F}_p$ und für alle Teiler $j \in \mathbb{N}$ von i seien C_i und C_j kompatibel. Dann heiße $\mathcal{C}_d$ eine Menge von *Conway-Polynomen*.

1.3.3. Satz: von Conway
Es sei für ein $d \in \mathbb{N}_0$ bereits $\mathcal{C}_d$ eine Menge von Conway-Polynomen. Dann existiert ein $C_{d+1} \in \mathbb{F}_p[t]$, so daß $\mathcal{C}_{d+1} := \mathcal{C} \cup \{C_{d+1}\}$ eine Menge von Conway-Polynomen ist.

Beweis: Dies findet man etwa in Nickel, Seite 32.

1.3.4. Definition: Es sei $<$ die kanonische lexikographische Anordnung auf $\mathbb{F}_p[t]$. Man wähle für $d \in \mathbb{N}_0$ sukzessive $C_{d+1} \in \mathbb{F}_p[t]$ wie in Satz 1.3.3. minimal bezüglich $<$. Dann sei $\mathcal{C}_{\mathbb{N}} := \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_d$.

1.3.5. Satz: Es sei $E \geq \mathbb{F}_p$ der minimale endliche Körper, für den $\mathrm{Exp}'(G)$ ein Teiler von $|E^*|$ ist. Weiter seien $C_d \in \mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ für $d := \mathrm{Dim}_{\mathbb{F}_p}(E)$ das zugeordnete Conway-Polynom, $\alpha_d \in E^*$ eine Nullstelle von C_d und $f \in \mathbb{F}_p[t]$ das Minimalpolynom von $\alpha_d^{|E^*|/\mathrm{Exp}'(G)} \in E^*$ über $\mathbb{F}_p$. Dann existiert ein p-modulares System $(K, \mathcal{R}_\wp, F)$ mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{Exp}(G)})$ und $f(\zeta_{\mathrm{Exp}'(G)} + \wp) = 0$, wobei für $k \in \mathbb{N}$ wieder $\zeta_k := e^{2\pi i/k} \in \mathbb{C}$ sei.

Beweis: Zunächst ist $K \geq \mathbb{Q}$ galoissch und daher gilt $\mathcal{R}/\wp \cong F$ als Ringe für alle Primideale $p\mathcal{R} \trianglelefteq \wp \triangleleft \mathcal{R}$. Man wählt solch ein Primideal und setzt $\zeta := \zeta_{\mathrm{Exp}'(G)}$. Dann sei $g_\zeta \in \mathbb{Z}[t]$ ein Urbild des Minimalpolynoms von $\zeta + \wp \in \mathcal{R}/\wp$ über $\mathbb{F}_p$ unter dem kanonischen Epimorphismus $\varepsilon : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{F}_p[t]$. Für ein $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist wegen $g_\zeta(\zeta) \in \wp$ auch $g_\zeta(\zeta\gamma) \in \wp\gamma$. Somit hat die primitive $\mathrm{Exp}'(G)$-te Einheitswurzel $\zeta\gamma + \wp\gamma \in \mathcal{R}/\wp\gamma$ das Minimalpolynom $g_\zeta\varepsilon \in \mathbb{F}_p[t]$ über $\mathbb{F}_p$.
Damit ist $f = g_{\zeta\gamma_0}\varepsilon \in \mathbb{F}_p[t]$ für ein $\gamma_0 \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Damit hat aber $\zeta + \wp\gamma_0^{-1} \in \mathcal{R}/\wp\gamma_0^{-1}$ das Minimalpolynom $g_{\zeta\gamma_0}\varepsilon \in \mathbb{F}_p[t]$ über $\mathbb{F}_p$.

1.4. Zerfällungen von Kreisteilungspolynomen über $\mathbb{F}_5$ und $\mathbb{F}_{25}$

1.4.1. Bemerkung: Für $p = 5$ hat man die Conway-Polynome $C_1 := t + 3 \in \mathbb{F}_5[t]$ und $C_2 := t^2 + 4t + 2 \in \mathbb{F}_5[t]$.

1.4.2. Bemerkung: Die nachfolgende Tabelle gibt die über $\mathbb{F}_5$ irreduziblen Faktoren einiger unter dem kanonischen Epimorphismus $\varepsilon : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{F}_5[t]$ abgebildeter Kreisteilungspolynome $\Theta_k \in \mathbb{Z}[t]$ und den Brauer-Lift der Nullstellen aller dieser Faktoren wieder. Dabei habe das zugrundeliegende 5-modulare System die in Satz 1.3.5. genannte Eigenschaft. Für $2 \in \mathbb{F}_5$ ist dann der Brauer-Lift $2\lambda^{-1} = \zeta_4 \in \mathbb{C}$.

$\Theta_1\varepsilon$	:	$t+4$	:			1
$\Theta_2\varepsilon$	:	$t+1$	:	ζ_2	$=$	-1
$\Theta_3\varepsilon$	:	t^2+t+1	:	$\zeta_3+\zeta_3^2$	$=$	-1
$\Theta_4\varepsilon$	:	$t+2$	:	ζ_4^3	$=$	$-i$
		$t+3$	:	ζ_4	$=$	i
$\Theta_6\varepsilon$	:	t^2+4t+1	:	$\zeta_6+\zeta_6^5$	$=$	1
$\Theta_7\varepsilon$	:	$t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1$	:	$\zeta_7+\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4+\zeta_7^5+\zeta_7^6$	$=$	-1
$\Theta_8\varepsilon$	:	t^2+2	:	$\zeta_8^3+\zeta_8^7$	$=$	0
		t^2+3	:	$\zeta_8+\zeta_8^5$	$=$	0
$\Theta_{12}\varepsilon$	:	t^2+2t+4	:	$\zeta_{12}^7+\zeta_{12}^{11}$	$=$	$-i$
		t^2+3t+4	:	$\zeta_{12}+\zeta_{12}^5$	$=$	i

1.4.3. Bemerkung: Analog erhält man für $\mathbb{F}_{25}$ die nachfolgende Tabelle. Dabei sei $z \in \mathbb{F}_{25}$ eine Nullstelle des Conway-Polynoms C_2. Dann ist $z\lambda^{-1} = \zeta_{24} \in \mathbb{C}$.

$\Theta_1\varepsilon$	:	$t+z^{12}$	:			1
$\Theta_2\varepsilon$	:	$t+z^{24}$	:	ζ_2	$=$	-1
$\Theta_3\varepsilon$	:	$t+z^4$	:	ζ_3^2		
		$t+z^{20}$	:	ζ_3		
$\Theta_4\varepsilon$	:	$t+z^6$	:	ζ_4^3	$=$	$-i$
		$t+z^{18}$	:	ζ_4	$=$	i
$\Theta_6\varepsilon$	:	$t+z^8$	:	ζ_6^5		
		$t+z^{16}$	:	ζ_6		
$\Theta_7\varepsilon$	:	$t^3+zt^2+z^{17}t+z^{12}$	:	$\zeta_7+\zeta_7^2+\zeta_7^4$	$=$	$b7$
		$t^3+z^5t^2+z^{13}t+z^{12}$	:	$\zeta_7^3+\zeta_7^5+\zeta_7^6$	$=$	$b7**$
$\Theta_8\varepsilon$	:	$t+z^3$	:	ζ_8^5		
		$t+z^9$	:	ζ_8^7		
		$t+z^{15}$	:	ζ_8		
		$t+z^{21}$	:	ζ_8^3		
$\Theta_9\varepsilon$	:	t^3+z^4	:	$\zeta_9^2+\zeta_9^5+\zeta_9^8$	$=$	0
		t^3+z^{20}	:	$\zeta_9+\zeta_9^4+\zeta_9^7$	$=$	0
$\Theta_{12}\varepsilon$	:	$t+z^2$	:	ζ_{12}^7		
		$t+z^{10}$	:	ζ_{12}^{11}		
		$t+z^{14}$	:	ζ_{12}		
		$t+z^{22}$	:	ζ_{12}^5		
$\Theta_{21}\varepsilon$	:	$t^3+z^9t^2+z^9t+z^{12}$	:	$\zeta_{21}^{10}+\zeta_{21}^{13}+\zeta_{21}^{19}$	$=$	$x21*10$
		$t^3+z^{13}t^2+z^5t+z^{12}$	:	$\zeta_{21}+\zeta_{21}^4+\zeta_{21}^{16}$	$=$	$x21$
		$t^3+z^{17}t^2+zt+z^{12}$	:	$\zeta_{21}^5+\zeta_{21}^{17}+\zeta_{21}^{20}$	$=$	$x21**$
		$t^3+z^{21}t^2+z^{21}t+z^{12}$	:	$\zeta_{21}^2+\zeta_{21}^8+\zeta_{21}^{11}$	$=$	$x21*2$
$\Theta_{24}\varepsilon$	:	$t+z$	:	ζ_{24}^{13}		
		$t+z^5$	:	ζ_{24}^{17}		
		$t+z^7$	:	ζ_{24}^{19}		
		$t+z^{11}$	:	ζ_{24}^{23}		
		$t+z^{13}$	:	ζ_{24}		
		$t+z^{17}$	:	ζ_{24}^5		
		$t+z^{19}$	:	ζ_{24}^7		
		$t+z^{23}$	:	ζ_{24}^{11}		
$\Theta_{63}\varepsilon$	:	$t^3+z^2t^2+z^6t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}^{40}+\zeta_{63}^{52}+\zeta_{63}^{55}$	$=$	$x63'*40$
		$t^3+z^2t^2+z^{14}t+z^4$	:	$\zeta_{63}^2+\zeta_{63}^{50}+\zeta_{63}^{53}$	$=$	$x63'*2$
		$t^3+z^3t^2+z^{19}t+z^4$	:	$\zeta_{63}^{20}+\zeta_{63}^{26}+\zeta_{63}^{59}$	$=$	$x63'*20$
		$t^3+z^7t^2+z^7t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}^{16}+\zeta_{63}^{22}+\zeta_{63}^{46}$	$=$	$x63'*16$
		$t^3+z^{10}t^2+z^{22}t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}^{10}+\zeta_{63}^{13}+\zeta_{63}^{61}$	$=$	$x63'*10$
		$t^3+z^{10}t^2+z^6t+z^4$	:	$\zeta_{63}^8+\zeta_{63}^{11}+\zeta_{63}^{23}$	$=$	$x63'*8$
		$t^3+z^{11}t^2+z^{11}t+z^4$	:	$\zeta_{63}^{17}+\zeta_{63}^{41}+\zeta_{63}^{47}$	$=$	$x63'*17$
		$t^3+z^{15}t^2+z^{23}t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}^4+\zeta_{63}^{37}+\zeta_{63}^{43}$	$=$	$x63'*4$
		$t^3+z^{18}t^2+z^{14}t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}^{19}+\zeta_{63}^{31}+\zeta_{63}^{34}$	$=$	$x63'*19$
		$t^3+z^{18}t^2+z^{22}t+z^4$	:	$\zeta_{63}^{29}+\zeta_{63}^{32}+\zeta_{63}^{44}$	$=$	$x63'*29$
		$t^3+z^{19}t^2+z^3t+z^4$	:	$\zeta_{63}^5+\zeta_{63}^{38}+\zeta_{63}^{62}$	$=$	$x63'*5$
		$t^3+z^{23}t^2+z^{15}t+z^{20}$	:	$\zeta_{63}+\zeta_{63}^{25}+\zeta_{63}^{58}$	$=$	$x63'*$

2. Kondensation, Untermodulverbände

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der verwendeten Kondensationsmethoden entwickelt. Wie sich zeigt, läßt sich die von mir entwickelte Methode zur Berechnung von Untermodulverbänden zwanglos in diesen theoretischen Rahmen einfügen.

In Abschnitt 2.1. wird das allgemeine Konzept des Übergangs zu einem Hecke-Ring vorgestellt. Die hier gewählte Darstellung ist der Originalarbeit von A. Ryba entlehnt. Die in diesem Abschnitt untersuchte Situation ist durchaus allgemeiner als die in den folgenden Abschnitten betrachtete. Dies mag die Allgemeinheit des Konzepts unterstreichen. Vielleicht böte sich auch eine 'funktorielle' Beschreibung an. Die durch die Aussage des Satzes 2.1.6. gegebene Möglichkeit der Zurückführung der Strukturuntersuchung geeigneter Moduln auf die Strukturuntersuchung in praxi besser handhabbarer Moduln ist die formale Rechtfertigung der hier entwickelten Theorie.

Mit Abschnitt 2.2. beginnt die Beschreibung der theoretischen Grundlagen des von mir entwickelten Verfahrens zur Berechnung von Untermodulverbänden. Durch die Betrachtung von sogenannten Deltaidempotenten mit Definition 2.2.11. erhält man einen Zugang im Rahmen des hier gewählten Formalismus. Indessen läßt die Definition von sogenannten Deltaworten deutlich ihren Ursprung in der praktischen Anwendbarkeit erkennen. In der Tat geht diese Begriffsbildung auf eine Idee von R. Parker zurück. Wenn sich der geneigte Leser bei der Wahl der Bezeichnungen an die bekannte Dirac-Delta-Funktion erinnert fühlt, so ist das nicht unbeabsichtigt. Ziel dieses Abschnittes ist mit Satz 2.2.18. der erste Teil der Charakterisierung von lokalen Teilmoduln als zyklische, von gewissen Elementen erzeugte Teilmoduln.

Diese Charakterisierung gelingt mit Satz 2.3.15.a) erst vollständig unter Hinzunahme einer Normierungsbedingung an die Deltaidempotente. In der Tat mutet die Entwicklung der zugehörigen Theorie in 2.3.1. bis 2.3.10. etwas ausladend an, ist sie doch einerseits im Lichte von Bemerkung 2.3.12.c) im Falle absolut irreduzibler Konstituenten vollständig überflüssig, handelt es sich doch andererseits meistenteils um bekannte Aussagen, die in der Literatur für speziellere Situationen formuliert sind. An dieser Stelle sei etwa auf die Bücher von B. Huppert, Seite 535, dem die Beweise zu den Lemmata 2.3.2. und 2.3.4. entnommen sind, und von M. Issacs, Seite 144ff, verwiesen. Bezüglich ihres Verhaltens auf den Kompositonsfaktoren von V sind Deltaidempotente den treuen Idempotenten diametral entgegengesetzt. Immerhin erhält man mit Satz 2.3.15.c) eine im Vergleich zu Satz 2.1.6. ebenso elegante Korrespondenz, wenn auch nicht zwischen den gesamten Untermodulverbänden von V und Ve, so doch zwischen gewissen Teilmengen von Untermoduln.

Die lokalen Untermoduln spielen im gesamten Untermodulverband eine ausgezeichnete Rolle, wie in Abschnitt 2.4. deutlich wird. Man übersetzt mit Satz 2.4.7. die Lokalität von Teilmoduln in die allgemeinere Sprache der Verbandstheorie. Aus der Kenntnis der lokalen Teilmoduln kann mittels des Satzes von Benson-Conway der gesamte Verband rekonstruiert werden. Mit Satz 2.4.8. läßt diese Rekonstruktion auch die Isomorphietypen der Subquotienten wiedererkennen. Der hier angegebene Beweis von Satz 2.4.5. entstammt der Originalarbeit von D. Benson und J. Conway, auf die mich K. Lux aufmerksam gemacht hat. Die in diesem Abschnitt benutzten Begriffe der Theorie der modularen Verbände findet man etwa in dem Buch von M. Aigner, Seite 81ff, dem auch der Beweis von Lemma 2.4.4. entnommen ist.

In Abschnitt 2.5. werden die in den Abschnitten 2.2. bis 2.4. entwickelten theoretischen Grundlagen in einen Algorithmus zur Berechnung von Untermodulverbänden eingebracht. Dieser ist in ähnlicher Form auf meine Anregung hin von M. Ringe in einer neuen Version des Systems Meat-Axe implementiert worden und befindet sich im Stadium der Erprobung. In diesem wie auch in Abschnitt 2.7. werden die bisher benutzten Schreibweisen ohne weiteren Kommentar weiter verwendet. Diese sind ohnehin suggestiv gewählt.

In Abschnitt 2.6. wird kurz auf die vom Verfasser verwendete Fixpunkt-Kondensation zur Strukturuntersuchung hochdimensionaler Moduln eingegangen, die hier durch den Begriff des einer Untergruppe zugeordneten Idempotents formalisiert wird. Durch geeignete Wahl der Untergruppe versucht man, im Spannungsfeld der Lemmata 2.6.5. und 2.6.8. die Dimension des zu untersuchenden Moduls für die Hecke-Algebra zu minimieren und gleichzeitig das Idempotent einem treuen Idempotent möglichst nahe kommen zu lassen. Trotzdem ist es erforderlich, den zugrundeliegenden hochdimensionalen Modul auf dem Rechner handhaben zu können, der daher eine spezielle Struktur haben muß. Im Rahmen der von mir durchgeführten Untersuchungen sind das Permutationsmoduln, zu deren

Behandlung die im System Meat-Axe von R. Parker implementierten Kondensationsalgorithmen benutzt werden. An dieser Stelle sei auch auf die frühe Originalarbeit von J. Thackray verwiesen. Weiterhin existieren bereits Algorithmen zur Behandlung hochdimensionaler Tensorprodukte spezieller Struktur. Hierzu vergleiche man etwa die Originalarbeit von A. Ryba.

In der Tat scheint es möglich zu sein, beliebige Tensorprodukte hoher Dimension effizient zu kondensieren. Angeregt durch Diskussionen mit K. Lux wird in Abschnitt 2.7. ein entsprechender Algorithmus skizziert. Dieser befindet sich zur Zeit noch im Stadium der theoretischen Konzeption. So sind etwa andere als die auf Algorithmus 2.5.2. beruhenden Methoden denkbar, symmetriegerechte Basen zu finden. Hierzu sei auf das Buch von E. Stiefel und A. Fässler, Seite 100ff, verwiesen. Die theoretische wie praktische Implementation und Erprobung eines solchen Algorithmus würde wohl den Umfang einer weiteren Diplomarbeit annehmen.

Abschnitt 2.8. ist dem praktischen motivierten Problem des Verhältnisses von Hecke- und sogenanntem Kondensationsring gewidmet. In der Tat kann man auf dem Rechner nur den Kondensationsring realisieren, der vom Hecke-Ring verschieden sein kann. In Bemerkung 5.2.9. ist ein Beispiel angegeben. Dieses Verhältnis ist in theoretischer Hinsicht keineswegs befriedigend zu beschreiben, von dem in Satz 2.8.3. angegebenen Spezialfall, auf den mich K. Lux aufmerksam gemacht hat, einmal abgesehen. Dabei stellt der Satz von Zassenhaus, auf den mich R. Parker aufmerksam gemacht hat, das wichtigste praktische Hilfsmittel dar, um Teilmoduln für den Kondensationsring als sogenannt genuin zu erkennen. Der hier vorgestellte Beweis dieses Satzes entstammt dem Buch von P. Landrock, Seite 73-4.

Im folgenden bezeichne R einen Ring-mit-1 und A eine endlich-dimensionale Algebra über einem jeweils näher spezifizierten Körper. Alle betrachteten Moduln seien unitäre Rechtsmoduln endlicher Länge. Im folgenden bezeichne V einen solchen Modul für einen jeweils näher spezifizierten Ring.

2.1. Moduln für Hecke-Ringe

2.1.1. Definition: Es seien R ein Ring-mit-1 und $e \in R$ ein Idempotent. Dann heiße $eRe \subseteq R$ der *dem Idempotent e zugeordnete Hecke-Ring von R.*

2.1.2. Bemerkung: Ist V ein R-Modul, so wird $Ve := \{ve \in V; v \in V\}$ durch Einschränken der Operation von R auf eRe zu einem eRe-Rechtsmodul.

2.1.3. Satz: Es seien V ein R-Modul und $e \in R$ ein Idempotent.
a) Es sei $W \leq V$ ein R-Teilmodul. Dann ist auch $We \leq Ve$ ein eRe-Teilmodul.
b) Es gilt $(V/W)e \cong Ve/We$ als eRe-Moduln.
c) Es sei $\tilde{W} \leq Ve$ ein eRe-Teilmodul. Dann ist $W := \tilde{W} \cdot R \leq V$ ein R-Teilmodul und es gilt $\tilde{W} = We$.
d) Ist V ein irreduzibler R-Modul, so ist $Ve = \{0\}$ oder ein irreduzibler eRe-Modul.
e) Es sei $\{0\} = V_0 < V_1 < \ldots < V_{k-1} < V_k = V$ eine R-Modulkompositionsreihe von V. Dann existieren Indizes $0 \leq i_0 < i_1 \ldots < i_l \leq k$, so daß $\{0\} = V_{i_0}e < V_{i_1}e < \ldots < V_{i_l}e = Ve$ eine eRe-Modulkompositionsreihe von Ve ist. Insbesondere ist Ve ein eRe-Modul endlicher Länge.
f) Es sei $\{0\} = \tilde{V}_0 < \tilde{V}_1 < \ldots < \tilde{V}_{l-1} < \tilde{V}_l = Ve$ eine eRe-Modulkompositionsreihe von Ve. Dann existiert eine R-Modulkompositionsreihe

$$\{0\} = V_{0,0} < \ldots < V_{0,k_0} < V_{1,0} < \ldots < V_{1,k_1} < V_{2,0} < \ldots < V_{l,k_l} = V$$

von V, so daß $V_{i,j}e = \tilde{V}_i$ gilt.

Beweis: **a)** Es sei $we \in We$. Dann ist für alle $r \in R$ auch $we \cdot ere = wer \cdot e \in We$.
b) Es ist $(V/W)e = \{ve + W \in V/W; v \in V\}$. Auf $(V/W)e$ operiert $ere \in eRe$ via $(ve + W)ere = vere + W$. Es sei nun $\varepsilon : V \to V/W : v \mapsto v + W$ der kanonische R-Modulepimorphismus. Dann ist

$$\varepsilon|_{Ve} : Ve \to (V/W)e : ve \mapsto ve + W$$

ein wohldefinierter eRe-Modulepimorphismus. Weiter ist $\mathrm{Kern}(\varepsilon|_{Ve}) = We$, denn es ist für alle $v \in V$ die Aussage $(ve)\varepsilon = 0$ gleichwertig mit $ve \in W$. Dies ist jedoch wegen $ve = vee$ gleichbedeutend mit

$ve \in We$.
c) Da $e \in eRe$ auf Ve trivial operiert, hat man $\tilde{W} = \tilde{W}e$. Also ist $We = (\tilde{W}R)e = \tilde{W}eRe = \tilde{W}$.
d) *Angenommen*, es existierte ein eRe-Teilmodul $\{0\} < \tilde{W} < Ve$. Dann existiert auch ein R-Teilmodul $\{0\} < W < V$ mit $We = \tilde{W}$, *Widerspruch*.
e) Es ist $\{0\} = V_0e \leq \ldots \leq V_ke = Ve$ eine eRe-Modulreihe von Ve. Für $1 \leq i \leq k$ ist zunächst $V_ie/V_{i-1}e \cong (V_i/V_{i-1})e$ als eRe-Moduln, und damit ist $V_ie/V_{i-1}e = \{0\}$ oder ein irreduzibler eRe-Modul.
f) Es existiert eine R-Modulreihe $\{0\} = V_{0,0} < V_{1,0} < \ldots < V_{l-1,0} < V_{l,0} = V$ von V mit $V_{i,0}e = \tilde{V}_i$ für $0 \leq i \leq l$. Diese Reihe verfeinert man zu einer R-Modulkompositionsreihe

$$\{0\} = V_{0,0} < V_{0,1} < \ldots < V_{0,k_0} < V_{1,0} < \ldots < V_{l-1,k_{l-1}} < V_{l,0} = V$$

von V. Daraus erhält man eine eRe-Modulreihe

$$\{0\} = V_{0,0}e \leq V_{0,1}e \leq \ldots \leq V_{0,k_0}e \leq V_{1,0}e \leq \ldots \leq V_{l-1,k_{l-1}}e \leq V_{l,0}e = Ve$$

von Ve. Für $1 \leq i \leq l$ ist nun $V_{i,0}e/V_{i-1,0}e$ ein irreduzibler eRe-Modul. Nun sei $0 \leq i_0 \leq k_0$ maximal mit $V_{0,i_0}e = \tilde{V}_0$. Dann ist $V_{0,i_0+1}e = V_{0,i_0+2}e = \ldots = V_{0,k_0}e = \tilde{V}_1$. Also kann man $i_0 = k_0$ annehmen. Mit Induktion über die Kompositionslänge von Ve folgt die Behauptung.

2.1.4. Definition: Es seien V ein R-Modul und $\{V^{(i)}\}_{i\in I}$ für eine Indexmenge I ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen irreduzibler Konstituenten von V. Ein Idempotent $e \in R$ heiße *treu auf* V, falls $V^{(i)}e \neq \{0\}$ für alle $i \in I$ gilt.

2.1.5. Bemerkung: Für einen R-Modul V wird die Menge $\mathcal{M}(V) := \{W \leq V \text{ als } R\text{-Moduln}\}$ unter der mengentheoretischen Inklusion und den Abbildungen

$$+ : \mathcal{M}(V) \times \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}(V) : (W_1, W_2) \mapsto W_1 + W_2$$

und

$$\cap : \mathcal{M}(V) \times \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}(V) : (W_1, W_2) \mapsto W_1 \cap W_2$$

zu einem modularen Verband endlicher Länge. Für die Menge $\mathcal{M}(Ve) := \{\tilde{W} \leq Ve \text{ als } eRe\text{-Moduln}\}$ für ein Idempotent $e \in R$ gilt die analoge Aussage. Hierzu vergleiche man auch Definition 2.4.1.

2.1.6. Satz: Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.1.4. sei $e \in R$ treu auf V. Dann ist die Abbildung

$$\mu : \{W \leq V \text{ als } R\text{-Moduln }\} \to \{\tilde{W} \leq Ve \text{ als } eRe\text{-Moduln }\} : W \mapsto We$$

ein Verbandsisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mu^{-1} : \{\tilde{W} \leq Ve \text{ als } eRe\text{-Moduln }\} \to \{W \leq V \text{ als } R\text{-Moduln }\} : \tilde{W} \mapsto \tilde{W}R.$$

Beweis: Zunächst sind μ und μ^{-1} wohldefinierte Abbildungen. Mit Satz 2.1.3.c) hat man weiter $\tilde{W}\mu^{-1}\mu = \tilde{W}Re = \tilde{W}$, also ist $\mu^{-1}\mu = id_{\{\tilde{W}\leq Ve\}}$. Somit ist μ surjektiv. Nun seien $W_1,\ W_2 \leq V$ als R-Moduln mit $W_1e = W_2e$. Dann ist $(W_1 + W_2)e = W_1e + W_2e = W_1e = W_2e$ und damit hat man $((W_1+W_2)/W_2)e \cong (W_1+W_2)e/W_2e = \{0\}$ und analog $((W_1+W_2)/W_1)e \cong (W_1+W_2)e/W_1e = \{0\}$ als eRe-Moduln. Da e treu auf V ist, folgt daraus $W_2 = W_1 + W_2 = W_1$. Also ist μ injektiv. Damit ist μ bijektiv, und μ^{-1} ist in der Tat die Umkehrabbildung. Da μ und μ^{-1} inklusionserhaltend sind, sind sie in der Tat Verbandsisomorphismen.

2.2. Deltawort-Kondensation

2.2.1. Definition: Es sei A eine Algebra über einem beliebigen Körper. Für $a \in A$ sei $A_a :=$ $< \{a\} > \subseteq A$ als Algebrenerzeugnis in A.

2.2.2. Satz: von Fitting
Es seien A eine Algebra über dem Körper Λ, $a \in A$, V ein A-Modul und

$$\varrho : A \to \mathrm{End}_\Lambda(V) : a \mapsto a_V$$

die zu V gehörende Darstellung von A.
a) Dann existiert ein $N \in I\!N$ mit $\{0\} \leq \mathrm{Kern}(a_V) < \mathrm{Kern}(a_V^2) < \ldots < \mathrm{Kern}(a_V^N) = \mathrm{Kern}(a_V^{N+1})$ als Λ-Vektorräume.
b) Mit der Bezeichnung aus Definition 2.2.1. gilt $V = \mathrm{Kern}(a_V^N) \oplus \mathrm{Bild}(a_V^N)$ als A_a-Modul.

Beweis: a), b) Dies folgt sofort durch Inspektion.

2.2.3. Definition: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.2. sei $e_{a,V} \in \mathrm{End}_\Lambda(V)$ die durch

$$e_{a,V} : V = \mathrm{Kern}(a_V^N) \oplus \mathrm{Bild}(a_V^N) \to \mathrm{Kern}(a_V^N) : v = u + w \mapsto u$$

definierte Projektion.

2.2.4. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.2.3.gegeben. Dabei sei Λ ein Körper der Charakteristik $p > 0$, der algebraisch über seinem Primkörper sei. Dann existiert ein $e_a \in A$ mit $(e_a)_V = e_{a,V}$.

Beweis: Es ist $a_V^N|_{\mathrm{Bild}(a_V^N)} : \mathrm{Bild}(a_V^N) \to \mathrm{Bild}(a_V^N)$ wohldefiniert und wegen $\mathrm{Kern}(a_V^N|_{\mathrm{Bild}(a_V^N)}) = \mathrm{Kern}(a_V^N) \cap \mathrm{Bild}(a_V^N) = \{0\}$ bijektiv. Nun hat $a_V^N|_{\mathrm{Bild}(a_V^N)} \in GL_\Lambda(\mathrm{Bild}(a_V^N))$ wegen der Voraussetzungen über Λ eine endliche Ordnung. Also existiert ein $M \in I\!N$, so daß $a_V^{NM}|_{\mathrm{Bild}(a_V^N)} = id_{\mathrm{Bild}(a_V^N)}$ gilt. Damit ist a_V^{NM} die Projektion von V auf $\mathrm{Bild}(a_V^N)$ zum Komplement $\mathrm{Kern}(a_V^N)$. Nun setzt man $e_a := 1 - a^{NM} \in A$.

2.2.5. Bemerkung: a) Ist Λ ein Körper der Charakteristik 0 oder ist Λ nicht algebraisch über seinem Primkörper, so findet man leicht Elemente unendlicher Ordnung in $GL_\Lambda(\mathrm{Bild}(a_V^N))$.
b) Es wäre zu untersuchen, ob man die Existenz von $e_a \in A$ unter anderen Voraussetzungen mit anderen Methoden nachweisen kann, so daß die Voraussetzungen über Λ abgeschwächt werden können.

2.2.6. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.4. gegeben und ϱ eine treue Darstellung.
a) Dann ist $e_a = 0$ oder ein Idempotent.
b) Es ist $\varrho^{-1}(\{e_{a,V}\}) = \{e_a\}$.

Beweis: a), b) Es ist $e_{a,V} = 0$ oder ein Idempotent in $\mathrm{End}_\Lambda(V)$. Wegen $A = A/\mathrm{Kern}(\varrho) \cong \mathrm{Bild}(\varrho) \subseteq \mathrm{End}_\Lambda(V)$ als Algebren folgen daraus die Behauptungen.

2.2.7. Bemerkung: Ist die Algebra A bereits als Matrixalgebra über Λ gegeben, so hat man $A \subseteq \mathrm{End}_\Lambda(V)$ und $\varrho = id : A \to \mathrm{End}_\Lambda(V)$. In dieser Situation, wie sie in praxi immer vorliegt, ist ϱ also treu.

2.2.8. Bemerkung: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.6. ist ein A_a-Teilmodul $W \leq Ve_a = \mathrm{Kern}(a_V^N)$ wegen $ae_a = e_a a$ sogar ein $A_{e_a a e_a}$-Teilmodul für das Algebrenerzeugnis $A_{e_a a e_a} =< \{e_a a e_a\} >\subseteq eAe$ in eAe.

2.2.9. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.6. gegeben und $\{V^{(i)}\}_{i \in I}$ für eine Indexmenge I ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen irreduzibler Konstituenten von V. Damit sei $V^{(i)} = \mathrm{Kern}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}}) \oplus \mathrm{Bild}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})$ als A_a-Moduln für ein $N^{(i)} \in I\!N$ wie in Satz 2.2.2. Dann gilt $V^{(i)} e_a = \mathrm{Kern}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})$.

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 2.2.4 gibt es ein $M^{(i)} \in I\!N$ mit $a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}M^{(i)}}|_{\mathrm{Bild}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})} = id_{\mathrm{Bild}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})}$. Man betrachtet $\tilde{e}_a := 1 - a^{NN^{(i)}MM^{(i)}} \in A$. Es gilt $(\tilde{e}_a)_{V^{(i)}}|_{\mathrm{Bild}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})} = 0$ und $(\tilde{e}_a)_{V^{(i)}}|_{\mathrm{Kern}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})} = id_{\mathrm{Kern}(a_{V^{(i)}}^{N^{(i)}})}$. Andererseits ist aber $(\tilde{e}_a)_V = (e_a)_V$, also gilt $\tilde{e}_a = e_a$.

2.2.10. Bemerkung: Gilt $\mathrm{Kern}(a_{V^{(i)}}) \neq \{0\}$ für alle $i \in I$, so ist $e_a \in A$ also ein treues Idempotent.

2.2.11. Definition: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.2. gegeben und $\{V^{(i)}\}_{i \in I}$ für eine Indexmenge I ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen irreduzibler Konstituenten von V. Für $i \in I$ sei $k^{(i)} \in I\!N$ die Vielfachheit des Kompositionsfaktors $V^{(i)}$ in einer R-Modulkompositionsreihe von V.
a) Für $V^{(0)} \in \{V^{(i)}\}_{i \in I}$ und ein $a^{(0)} \in A$ gelte $\mathrm{Kern}(a^{(0)}_{V^{(0)}}) \neq \{0\}$ und $\mathrm{Kern}(a^{(0)}_{V^{(j)}}) = \{0\}$, falls $V^{(j)} \in \{V^{(i)}\}_{i \in I \setminus \{0\}}$ ist. Dann heiße $a^{(0)}$ ein *Deltawort zu* $V^{(0)}$ *bezüglich* V.
b) Für ein Idempotent $e^{(0)} \in A$ gelte $V^{(0)}e^{(0)} \neq \{0\}$ und $V^{(j)}e^{(0)} = \{0\}$ für $j \in I \setminus \{0\}$. Dann heiße $e^{(0)}$ ein *Deltaidempotent zu* $V^{(0)}$ *bezüglich* V.

2.2.12. Bemerkung: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.2.9. ist für ein Deltawort $a^{(0)}$ bereits $e_{a^{(0)}}$ ein Deltaidempotent zu $V^{(0)}$.

2.2.13. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.2.11. hat $Ve^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Modul die Kompositionslänge $k^{(0)}$ und $V^{(0)}e^{(0)}$ als einzigen Konstituenten.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 2.1.3.

2.2.14. Bemerkung: Ist mit den Bemerkungen 2.2.8. und 2.2.12. $Ve_{a^{(0)}}$ als $A_{e_{a^{(0)}}a^{(0)}e_{a^{(0)}}}$-Modul uniseriell mit Kompositionslänge $k^{(0)}$, so sind die $A_{e_{a^{(0)}}a^{(0)}e_{a^{(0)}}}$-Teilmoduln und die $e_{a^{(0)}}Ae_{a^{(0)}}$-Teilmoduln von $Ve_{a^{(0)}}$ identisch.

2.2.15. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.2.11. sei $e^{(0)} = \sum_{i \in I \cup \hat{I}} \sum_{j \in J_i} e_{i,j}$ für Indexmengen J_i eine orthogonale Zerlegung in primitive Idempotente von A, wobei $e_{i,j}A/\mathrm{Rad}(e_{i,j}A) \cong V^{(i)}$ als A-Moduln gelte. Dann ist $J_i = \{\}$ für $i \in I \setminus \{0\}$.

Beweis: *Angenommen*, es existierte ein $j \in J_i$ für ein $i \in I \setminus \{0\}$. Zunächst ist $V^{(i)}e_{i,j} \cong e_{i,j}Ae_{i,j}/\mathrm{Rad}(e_{i,j}Ae_{i,j})$ als $e_{i,j}Ae_{i,j}$-Moduln. Also existiert ein $v \in V^{(i)}$ mit $ve_{i,j} \neq 0$. Nun ist aber $ve^{(0)} = 0$ und somit $ve_{i,j} = ve^{(0)}e_{i,j} = 0$, *Widerspruch*.

2.2.16. Bemerkung: **a)** Ist $V \cong A_A$ als A-Moduln, so ist $\hat{I} = \{\}$ und somit gilt $e^{(0)} = \sum_{j \in J_0} e_{0,j}$.
b) Es wäre zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $e^{(0)}$ primitiv ist, und ob deren Gültigkeit praktisch nachgeprüft werden kann.

2.2.17. Definition: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.2.11. gegeben.
a) Ein A-Teilmodul $W \leq V$ heiße $V^{(0)}$-*radikal*, falls $W/\mathrm{Rad}(W) \cong \oplus_{t=1}^{t_0} V^{(0)}$ als A-Moduln für ein $t_0 \in I\!N$ gilt.
b) W heiße $V^{(0)}$-*lokal*, falls $W/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}$ als A-Moduln gilt.

2.2.18. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.2.11. gegeben.
a) Es sei $W \leq V$ als A-Modul $V^{(0)}$-lokal. Dann existiert ein $v \in Ve^{(0)}$ mit $W = vA$.
b) Es sei $0 \neq v \in Ve^{(0)}$. Dann ist $vA \leq V$ als A-Modul $V^{(0)}$-radikal.

Beweis: **a)** Es ist $\mathrm{Rad}(W)e^{(0)} < We^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln, da wegen Satz 2.1.3. als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln $We^{(0)}/\mathrm{Rad}(W)e^{(0)} \cong V^{(0)}e^{(0)} \neq \{0\}$ gilt. Nun sei $v \in We^{(0)} \setminus \mathrm{Rad}(W)e^{(0)}$. Dann ist $vA \leq W$ als A-Moduln.
Angenommen, es wäre $vA \leq \mathrm{Rad}(W)$ als A-Moduln. Mit Satz 2.1.3. ist dann $vAe^{(0)} \leq \mathrm{Rad}(W)e^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln. Damit ist aber $v \in \mathrm{Rad}(W)e^{(0)}$, *Widerspruch*.
b) Es sei $W := vA \leq V$ als A-Moduln. Da $W/\mathrm{Rad}(W)$ als A-Modul halbeinfach ist, existieren A-Teilmoduln $\mathrm{Rad}(W) \leq W_{i,j} \leq W$ mit $W/\mathrm{Rad}(W) = \oplus_{i\in I} \oplus_{j \in J_i} W_{i,j}/\mathrm{Rad}(W)$ als A-Moduln für Indexmengen J_i, so daß $W_{i,j}/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(i)}$ als A-Moduln gilt. Nun sei $v + \mathrm{Rad}(W) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} w_{i,j} + \mathrm{Rad}(W)$ die korrespondierende Zerlegung von v. Wegen $ve^{(0)} = v$ gilt auch $w_{i,j} + \mathrm{Rad}(W) = w_{i,j}e^{(0)} + \mathrm{Rad}(W)$ für alle $i \in I$ und $j \in J_i$. Wegen $V^{(i)}e^{(0)} = \{0\}$ für $i \in I \setminus \{0\}$ hat man $w_{i,j} + \mathrm{Rad}(W) = \mathrm{Rad}(W)$ für alle $i \in I \setminus \{0\}$. Somit ist $v \in \sum_{j\in J_0} W_{0,j}$, also gilt $W = \sum_{j \in J_0} W_{0,j}$ und $J_i = \{\}$ für $i \in I \setminus \{0\}$.

2.3. Normierte Deltaworte

2.3.1. Bemerkung: Es seien A eine Algebra über dem Körper Λ, V ein A-Modul und $\mathcal{B} := \{v_i\}_{i=1}^n$ für ein $n \in I\!N$ eine Λ-Basis für V. Ferner seien $L \geq \Lambda$ eine endliche, galoissche Körpererweiterung und $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/\Lambda)$.
a) Es ist $\mathcal{B} \otimes_\Lambda 1 := \{v_i \otimes_\Lambda 1\}_{i=1}^n$ eine L-Basis für den $A \otimes_\Lambda L$-Modul $V \otimes_\Lambda L$. Damit ist jedes $v \in V \otimes_\Lambda L$ eindeutig in der Form $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes_\Lambda l_i$ mit $l_i \in L$ darstellbar.
b) Da $\gamma \in \Gamma$ auf Λ trivial operiert, ist die Abbildung $V \times L \to V \otimes_\Lambda L : (v, l) \mapsto v \otimes_\Lambda l\gamma$ Λ-ausgeglichen und somit ist

$$V \otimes_\Lambda L \to V \otimes_\Lambda L : \sum_{i=1}^n v_i \otimes_\Lambda l_i \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes_\Lambda l_i\gamma$$

wohldefiniert. Damit erhält man eine Operation von Γ auf $V \otimes_\Lambda L$, die mit der Operation von A vertauschbar ist.

2.3.2. Lemma: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.1. sei $\tilde{W} \leq V \otimes_\Lambda L$ ein $A \otimes_\Lambda L$-Teilmodul, für den $\tilde{W}\Gamma = \tilde{W}$ gelte. Dann existiert ein A-Teilmodul $W \leq V$ mit $W \otimes_\Lambda L = \tilde{W}$.

Beweis: Zunächst ist $\mathrm{Fix}_{V\otimes_\Lambda L}(\Gamma) = V$. Denn ist $v \in \mathrm{Fix}_{V\otimes_\Lambda L}(\Gamma)$, so ist mit $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes_\Lambda l_i$ für $l_i \in L$ bereits $l_i\gamma = l_i$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und somit ist $l_i \in \Lambda$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Nun sei $\{w_j\}_{j=1}^r$ für ein $r \in I\!N$ eine L-Basis für $\tilde{W}$. Mit dem Basisergänzungssatz kann diese L-Basis mit Elementen aus der Γ-invarianten L- Basis $\mathcal{B} \otimes_\Lambda 1$ zu einer L-Basis für $V \otimes_\Lambda L$ ergänzt werden. Damit erhält man einen L-Teilvektorraum $\hat{W} \leq V \otimes_\Lambda L$, für den $V \otimes_\Lambda L = \tilde{W} \oplus \hat{W}$ als L-Vektorräume und $\hat{W}\Gamma = \hat{W}$ gilt.
Ist nun $v \in V \otimes_\Lambda L$ mit $v\gamma = v$ für ein $\gamma \in \Gamma$, so ist mit der korrespondierenden Zerlegung $v = w + \hat{w}$ auch $w\gamma = w$. Aus der Γ-invarianten L-Basis $\mathcal{B} \otimes_\Lambda 1$ erhält man also eine Γ-invariante L-Basis $\mathcal{C} \subseteq V$ für $\tilde{W}$. Es sei $W :=< \mathcal{C} >\leq V$ als Λ-Vektorräume. Dann ist $W \otimes_\Lambda L = \tilde{W}$. Mit der Γ-invarianten Basis $\mathcal{C}$ für $\tilde{W}$ sieht man wie oben, daß $\mathrm{Fix}_{\tilde{W}}(\Gamma) = W$ gilt. Da die Operation von A auf $V \otimes_\Lambda L$ mit der Operation von Γ vertauschbar ist, ist $W \leq V$ sogar ein A-Teilmodul.

2.3.3. Definition: Ein irreduzibler A-Modul $V^{(0)}$ heiße *absolut irreduzibel*, falls $\mathrm{End}_A(V^{(0)}) = \Lambda \cdot id_{V^{(0)}}$ gilt.

2.3.4. Lemma: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.1. sei $V^{(0)}$ ein irreduzibler A-Modul und $\tilde{W} \leq V^{(0)} \otimes_\Lambda L$ ein irreduzibler $A \otimes_\Lambda L$-Teilmodul.
a) Für $\gamma \in \Gamma$ sind auch $\tilde{W}\gamma \leq V^{(0)} \otimes_\Lambda L$ irreduzible $A \otimes_\Lambda L$-Teilmoduln und es gilt $V^{(0)} \otimes_\Lambda L = \sum_{\gamma\in\Gamma} \tilde{W}\gamma$.
b) Ist $\tilde{W}$ absolut irreduzibel, so ist auch $\tilde{W}\gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ absolut irreduzibel.

Beweis: **a)** Da die Operation von A auf $V \otimes_\Lambda L$ mit der Operation von Γ vertauschbar ist, hat man zunächst $\tilde{W}\gamma \leq V^{(0)} \otimes_\Lambda L$ als A-Moduln und dann auch als $A \otimes_\Lambda L$-Moduln.
Nun sei $\tilde{U} := \sum_{\gamma\in\Gamma} \tilde{W}\gamma \leq V^{(0)} \otimes_\Lambda L$ als $A \otimes_\Lambda L$-Moduln. Wegen $\tilde{U}\Gamma = \tilde{U}$ existiert ein A-Teilmodul $U \leq V^{(0)}$ mit $U \otimes_\Lambda L = \tilde{U}$. Da $V^{(0)}$ als A-Modul irreduzibel ist, gilt $U = V^{(0)}$.
b) Es sei $\alpha \in \mathrm{End}_{A\otimes_\Lambda L}(\tilde{W})$. Dann ist

$$\gamma^{-1}\alpha\gamma : \tilde{W}\gamma \to \tilde{W}\gamma : w \mapsto w\gamma^{-1}\alpha\gamma$$

wohldefiniert und additiv. Für $a \in A$ und $w \in \tilde{W}\gamma$ gilt $(wa)\gamma^{-1}\alpha\gamma = (w\gamma^{-1}\alpha\gamma)a$ und für $l \in L$ hat man $(wl)\gamma^{-1}\alpha\gamma = (w\gamma^{-1}\cdot l\gamma^{-1})\alpha\gamma = (w\gamma^{-1}\alpha\cdot l\gamma^{-1})\gamma = w\gamma^{-1}\alpha\gamma\cdot l$. Also ist $\gamma^{-1}\alpha\gamma \in \mathrm{End}_{A\otimes_\Lambda L}(\tilde{W}\gamma)$. Daraus folgt die Behauptung.

2.3.5. Lemma: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.1. sei $\tilde{V}$ ein irreduzibler $A \otimes_\Lambda L$-Modul.
a) Es existiert ein irreduzibler A-Modul $V^{(0)}$, für den $\tilde{V}$ ein Konstituent des $A\otimes_\Lambda L$-Moduls $V^{(0)}\otimes_\Lambda L$ ist.
b) $\tilde{V}$ hat als A-Modul nur den Konstituenten $V^{(0)}$.

Beweis: **a)** Dies folgt sofort aus einer Betrachtung des regulären A-Moduls A_A.
b) Zunächst kann man die irreduziblen A-Moduln als Moduln für die halbeinfache Algebra $A/\mathrm{Rad}(A)$ auffassen. Also existiert ein $a \in A$ mit $a_{V^{(0)}} = id_{V^{(0)}}$ und $a_{V^{(j)}} = 0_{V^{(j)}}$ für alle irreduziblen A-Moduln $V^{(j)} \ncong V^{(0)}$. Dann ist $a_{V^{(0)}\otimes_\Lambda L} = id_{V^{(0)}\otimes_\Lambda L}$ und somit auch $a_{\tilde{V}} = id_{\tilde{V}}$.

2.3.6. Bemerkung: Es sei A eine Algebra über dem endlichen Körper F der Charakteristik $p > 0$. Weiter seien $V^{(0)}$ ein irreduzibler A-Rechtsmodul und $E^{(0)} := \mathrm{End}_A(V^{(0)})$.
a) $E^{(0)}$ ist ein endlicher Schiefkörper, also kommutativ. Mit der Einbettung $F \to F \cdot id_{V^{(0)}} \leq E^{(0)}$ erhält man eine endliche, galoissche Körpererweiterung. Es sei $l^{(0)} := [E^{(0)} : F] \in \mathbb{N}$.
b) $V^{(0)}$ ist ein $E^{(0)}$-A-Bimodul und kann wegen der Kommutativität von $E^{(0)}$ als $E^{(0)}$-Vektorraum aufgefaßt werden.

2.3.7. Lemma: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.6. gegeben.
a) $V^{(0)}$ ist ein absolut irreduzibler $A \otimes_F E^{(0)}$-Modul.
b) $V^{(0)} \otimes_F E^{(0)}$ hat als $A \otimes_F E^{(0)}$-Modul den Konstituenten $V^{(0)}$.

Beweis: **a)** $V^{(0)}$ kann als Modul für die halbeinfache Algebra $A/\mathrm{Rad}(A)$ aufgefaßt werden. Mit dem Doppelzentralisatorsatz hat man $\mathrm{End}_{E^{(0)}}(V^{(0)}) = A_{V^{(0)}}$. Damit hat man einen surjektiven F-Algebrenhomomorphismus $\varrho : A \to \mathrm{End}_{E^{(0)}}(V^{(0)})$. Nun definiert man

$$\hat{\varrho} : A \times E^{(0)} \to \mathrm{End}_{E^{(0)}}(V^{(0)}) : (a, e) \mapsto a_{V^{(0)}} \cdot (e \cdot id_{V^{(0)}}).$$

$\hat{\varrho}$ ist F-ausgeglichen, $E^{(0)}$-linear und wegen $a_{V^{(0)}} \cdot (e \cdot id_{V^{(0)}}) = (e \cdot id_{V^{(0)}}) \cdot a_{V^{(0)}}$ multiplikativ. Also kann man ϱ zu einem $E^{(0)}$-Algebrenhomomorphismus $A \otimes_F E^{(0)} \to \mathrm{End}_{E^{(0)}}(V^{(0)})$ fortsetzen. Also ist $\mathrm{End}_{A\otimes_F E^{(0)}}(V^{(0)}) = E^{(0)} \cdot id_{V^{(0)}}$ und $V^{(0)}$ ist ein absolut irreduzibler $A \otimes_F E^{(0)}$-Modul.
b) Nun kann man den $A \otimes_F E^{(0)}$-Modul $V^{(0)}$ wieder als A-Modul auffassen. Mit Lemma 2.3.5. folgt die Behauptung.

2.3.8. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.6. ist $V^{(0)} \otimes_F E^{(0)}$ direkte Summe absolut irreduzibler $A \otimes_F E^{(0)}$-Moduln und hat die Kompositionslänge $l^{(0)}$.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus den Lemmata 2.3.4. und 2.3.7.
Nun sei $\tilde{l}^{(0)} \in \mathbb{N}$ die Kompositionslänge des $A \otimes_F E^{(0)}$-Moduls $V^{(0)} \otimes_F E^{(0)}$. Damit ist einerseits weiter $\mathrm{Dim}_F(V^{(0)} \otimes_F E^{(0)}) = \tilde{l}^{(0)} \cdot \mathrm{Dim}_F(V^{(0)})$. Andererseits ist als Skalarenerweiterung
$\mathrm{Dim}_F(V^{(0)} \otimes_F E^{(0)}) = [E^{(0)} : F] \cdot \mathrm{Dim}_F(V^{(0)})$.

2.3.9. Lemma: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.6. gegeben. Dann operiert $E^{(0)*}$ regulär auf $V^{(0)} \setminus \{0\}$.

Beweis: Es sei $v \in V^{(0)} \backslash \{0\}$ und $\alpha \in E^{(0)}$ mit $v\alpha = v$. Für alle $a \in A$ gilt dann $(va)\alpha = (v\alpha)a = va$. Da $V^{(0)}$ als A-Modul irreduzibel ist, folgt $\alpha = id_{V^{(0)}}$.

2.3.10. Satz: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.3.6. gegeben.
a) Es sei $e \in A$ ein Idempotent. Dann ist $V^{(0)}e$ $E^{(0)}$-invariant und $l^{(0)}$ ist ein Teiler von $\mathrm{Dim}_F(V^{(0)}e)$.
b) Es gelte $\mathrm{Dim}_F(V^{(0)}e) = l^{(0)}$. Ferner seien $v_1, v_2 \in V^{(0)}e$, $v_1 \neq 0$. Dann existiert genau ein $\alpha \in E^{(0)}$ mit $v_1\alpha = v_2$.
c) Es sei $a \in A$. Dann ist $\mathrm{Kern}(a_{V^{(0)}})$ $E^{(0)}$-invariant und es ist $l^{(0)}$ ein Teiler von $\mathrm{Dim}_F(\mathrm{Kern}(a_{V^{(0)}}))$.
d) Es gelte $\mathrm{Dim}_F(\mathrm{Kern}(a_{V^{(0)}})) = l^{(0)}$. Ferner seien $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}(a_{V^{(0)}})$, $v_1 \neq 0$. Dann existiert genau ein $\alpha \in E^{(0)}$ mit $v_1\alpha = v_2$.

Beweis: **a), b)** Es sei $v \in V^{(0)}e$. Dann ist $(v\alpha)e = (ve)\alpha = v\alpha$ für alle $\alpha \in E^{(0)}$, also hat man $(V^{(0)}e)\alpha = V^{(0)}e$. Mit Lemma 2.3.9. ist $|E^{(0)*}|$ ein Teiler von $|V^{(0)}e \setminus \{0\}|$.
c), d) Es sei $v \in \mathrm{Kern}(a_{V^{(0)}})$. Dann ist $(v\alpha)a = (va)\alpha = 0$.

2.3.11. Definition: Es sei A eine Algebra über dem endlichen Körper F der Charakteristik $p > 0$. Ferner seien die Bezeichnungen aus Definition 2.2.11. und Bemerkung 2.3.6. gegeben.
a) Ein Deltaidempotent $e^{(0)}$ heiße *normiert*, falls $\dim_F(V^{(0)}e^{(0)}) = l^{(0)}$ gilt.
b) Ein Deltawort $a^{(0)}$ heiße *normiert*, falls $\dim_F(\mathrm{Kern}(a^{(0)2}_{V^{(0)}})) = l^{(0)}$ gilt.

2.3.12. Bemerkung: **a)** Ist $a^{(0)}$ ein normiertes Deltawort, so gilt mit den Sätzen 2.2.2. und 2.3.10. bereits $\dim_F(\mathrm{Kern}(a^{(0)}_{V^{(0)}})) = l^{(0)}$ und $N^{(0)} = 1$, wobei $N^{(0)} \in I\!N$ wie in Satz 2.2.9. definiert sei. Gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2.6., so ist also $e_{a^{(0)}}$ ein normiertes Deltaidempotent.
b) Da F endlich ist, sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.6. bereits erfüllt, wenn $\varrho : A \to \mathrm{End}_F(V)$ treu ist.
c) Es sei $a^{(0)}$ ein Deltawort mit $\dim_F(\mathrm{Kern}(a^{(0)2}_{V^{(0)}})) = 1$. Dann gilt $l^{(0)} = 1$, $V^{(0)}$ ist absolut irreduzibel und $a^{(0)}$ ist normiert.
d) In den obigen Betrachtungen wird keine Aussage über die Existenz von normierten Deltaworten gemacht. In praxi sind sie leicht zu finden.

2.3.13. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.3.11. sei $e^{(0)}$ ein normiertes Deltaidempotent. Dann gilt $\dim_F(Ve^{(0)}) = k^{(0)} \cdot l^{(0)}$.

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 2.2.13.

2.3.14. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.3.11. seien $e^{(0)}$ ein normiertes Deltaidempotent und $0 \neq v \in Ve^{(0)}$.
a) Es ist $vA \leq V$ ein $V^{(0)}$-lokaler A-Teilmodul.
b) Es ist $ve^{(0)}Ae^{(0)} \leq Ve^{(0)}$ ein $V^{(0)}e^{(0)}$-lokaler $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Teilmodul.

Beweis: **a)** Es sei $W := vA \leq V$ als A-Moduln. Nach Satz 2.2.18. ist W als A-Modul $V^{(0)}$-radikal. Da $W/\mathrm{Rad}(W)$ als A-Modul halbeinfach ist, existieren A-Teilmoduln $\mathrm{Rad}(W) \leq W_j \leq W$ mit $W/\mathrm{Rad}(W) = \oplus_{j\in J} W_j/\mathrm{Rad}(W)$ als A-Moduln für eine Indexmenge J, so daß $W_j/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}$ als A-Moduln gilt.
Angenommen, es wäre $|J| \geq 2$. Dann sei $v + \mathrm{Rad}(W) = \sum_{j\in J} w_j + \mathrm{Rad}(W)$ die korrespondierende Zerlegung von v. Da $v \notin \mathrm{Rad}(W)$ ist, kann man $w_1 + \mathrm{Rad}(W) \neq \mathrm{Rad}(W)$ annehmen. Wegen $ve^{(0)} = v$ gilt auch $w_j + \mathrm{Rad}(W) = w_je^{(0)} + \mathrm{Rad}(W)$ für alle $j \in J$. Da $e^{(0)}$ normiert ist, existiert wegen Satz 2.3.10. zu jedem $j \in J$ ein $\alpha_j \in E^{(0)}$ mit $(w_1 + \mathrm{Rad}(W))\alpha_j = w_j + \mathrm{Rad}(W)$. Damit liegt v aber in einem echten A-Teilmodul von W, *Widerspruch*.
b) Es sei $W := ve^{(0)}Ae^{(0)} \leq V$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln. Nach Satz 2.2.13. ist W als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Modul $V^{(0)}e^{(0)}$-radikal. Da $W/\mathrm{Rad}(W)$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Modul halbeinfach ist, existieren $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Teilmoduln $\mathrm{Rad}(W) \leq W_j \leq W$ mit $W/\mathrm{Rad}(W) = \oplus_{j\in J} W_j/\mathrm{Rad}(W)$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln für eine Indexmenge J, so daß $W_j/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}e^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln gilt.
Angenommen, es wäre $|J| \geq 2$. Dann sei $v + \mathrm{Rad}(W) = \sum_{j\in J} w_j + \mathrm{Rad}(W)$ die korrespondierende

Zerlegung von v. Da $v \notin \mathrm{Rad}(W)$ ist, kann man $w_1 + \mathrm{Rad}(W) \neq \mathrm{Rad}(W)$ annehmen. Wegen $ve^{(0)} = v$ gilt auch $w_j + \mathrm{Rad}(W) = w_j e^{(0)} + \mathrm{Rad}(W)$ für alle $j \in J$. Nun ist mit Lemma 2.3.9. und Satz 2.3.10. $E^{(0)} \subseteq \mathrm{End}_{e^{(0)}Ae^{(0)}}(V^{(0)}e^{(0)})$ durch Einschränken. Da $e^{(0)}$ normiert ist, existiert also zu jedem $j \in J$ ein $\alpha_j \in E^{(0)}$ mit $(w_1 + \mathrm{Rad}(W))\alpha_j = w_j + \mathrm{Rad}(W)$. Damit liegt v aber in einem echten $e^{(0}Ae^{(0)}$-Teilmodul von W, *Widerspruch.*

2.3.15. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.3.11. sei $e^{(0)}$ ein normiertes Deltaidempotent.

a) Es ist

$$\begin{aligned}&\{W \leq V \text{ als } A\text{-Moduln}; W/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}\}\\ =\ &\{W \leq V \text{ als } A\text{-Moduln}; W = vA \text{ für ein } 0 \neq v \in Ve^{(0)}\}.\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}&\{\tilde{W} \leq Ve^{(0)} \text{ als } e^{(0)}Ae^{(0)}\text{-Moduln}; \tilde{W}/\mathrm{Rad}(\tilde{W}) \cong V^{(0)}e^{(0)}\}\\ =\ &\{\tilde{W} \leq Ve^{(0)} \text{ als } e^{(0)}Ae^{(0)}\text{-Moduln}; \tilde{W} = ve^{(0)}Ae^{(0)} \text{ für ein } 0 \neq v \in Ve^{(0)}\}.\end{aligned}$$

c) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\nu : &\{W \leq V \text{ als } A\text{-Moduln}; W/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}\}\\ &\to \{\tilde{W} \leq Ve^{(0)} \text{ als } e^{(0)}Ae^{(0)}\text{-Moduln}; \tilde{W}/\mathrm{Rad}(\tilde{W}) \cong V^{(0)}e^{(0)}\} :\\ &W \mapsto We^{(0)}\end{aligned}$$

ist eine inklusionserhaltende Bijektion mit inklusionserhaltender Umkehrabbildung

$$\begin{aligned}\nu^{-1} : &\{\tilde{W} \leq Ve^{(0)} \text{ als } e^{(0)}Ae^{(0)}\text{-Moduln}; \tilde{W}/\mathrm{Rad}(\tilde{W}) \cong V^{(0)}e^{(0)}\}\\ &\to \{W \leq V \text{ als } A\text{-Moduln}; W/\mathrm{Rad}(W) \cong V^{(0)}\} :\\ &\tilde{W} \mapsto \tilde{W}A.\end{aligned}$$

Beweis: **a)** folgt direkt aus den Sätzen 2.2.18. und 2.3.14.a).
b) folgt direkt aus den Sätzen 2.2.13. und 2.3.14.b).
c) Es sei $W = vA \leq V$ ein A-Teilmodul für ein $v \in Ve^{(0)}$. Dann ist $We^{(0)} = ve^{(0)}Ae^{(0)} \leq Ve^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln. Also ist ν wohldefiniert. Nun sei umgekehrt $\tilde{W} = ve^{(0)}Ae^{(0)} \leq Ve^{(0)}$ ein $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Teilmodul für ein $v \in Ve^{(0)}$. Zunächst ist dann wegen $v = ve^{(0)} \in ve^{(0)}Ae^{(0)}A$ bereits $ve^{(0)}Ae^{(0)}A = vA$ und damit gilt $\tilde{W}A = ve^{(0)}Ae^{(0)}A = vA \leq V$ als A-Moduln. Also ist auch ν^{-1} wohldefiniert. Wegen Satz 2.1.3.c) ist $\nu^{-1}\nu = id_{\{\tilde{W} \leq Ve^{(0)}; \tilde{W}/\mathrm{Rad}(\tilde{W}) \cong V^{(0)}e^{(0)}\}}$ und ν somit surjektiv.
Nun seien $W_1 = v_1A \leq V$ und $W_2 = v_2A \leq V$ als A-Moduln für $0 \neq v_1, v_2 \in Ve^{(0)}$ mit $W_1e^{(0)} = W_2e^{(0)}$.
Angenommen, es wäre $W_1 \neq W_2$. Da W_1 und W_2 als A-Moduln $V^{(0)}$-lokal sind, kann man annehmen, daß $V^{(0)}$ Konstituent des A-Moduls $(W_1+W_2)/W_1$ ist. Mit Satz 2.1.3. ist dann $((W_1+W_2)/W_1)e^{(0)} \neq \{0\}$. Wegen $(W_1 + W_2)e^{(0)} = W_1e^{(0)} + W_2e^{(0)} = W_1e^{(0)}$ ist das ein *Widerspruch.*
Also ist ν injektiv und ν^{-1} ist in der Tat die Umkehrabbildung.

2.3.16. Bemerkung: Der Beweis von Satz 2.3.15.c) zeigt, daß für $\tilde{W} = ve^{(0)}Ae^{(0)} \leq Ve^{(0)}$ als $e^{(0)}Ae^{(0)}$-Moduln für ein $0 \neq v \in Ve^{(0)}$ gerade $\tilde{W}\nu^{-1} = vA \leq V$ als A-Moduln gilt.

2.4. Satz von Benson-Conway

2.4.1. Definition: **a)** Es sei $\mathcal{M} \neq \{\}$ eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$, so daß für alle $X, Y \in \mathcal{M}$ das Supremum $X + Y := \mathrm{Sup}(X, Y)$ und das Infimum $X \cdot Y := \mathrm{Inf}(X, Y)$ existiere. $\mathcal{M}$ heiße ein *Verband*.
b) Ein Verband $\mathcal{M}$ heiße *von endlicher Länge*, falls jede aufsteigende oder absteigende Kette in $\mathcal{M}$ schließlich stationär wird.
c) Ein Verband $\mathcal{M}$ heiße *modular*, falls für alle $X, Z \in \mathcal{M}$ mit $Z \leq X$ und für alle $Y \in \mathcal{M}$ gilt $X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + Z$.
d) Für einen Verband $\mathcal{M}$ und $X, Y \in \mathcal{M}$ heiße die Menge $[X, Y] := \{Z \in \mathcal{M}; X \leq Z \leq Y\}$ das *Intervall mit unterer Schranke X und oberer Schranke Y*.
e) Für einen Verband $\mathcal{M}$ heiße $Z \in \mathcal{M}$ *lokal*, falls Z nicht minimal ist und aus $Z = X + Y$ für $X, Y \in \mathcal{M}$ bereits $Z = X$ oder $Z = Y$ folgt.
f) Es sei $\mathcal{L} := \{Z \in \mathcal{M}; Z \text{ ist lokal}\}$.

2.4.2. Definition: **a)** Es sei $\mathcal{M}$ ein modularer Verband endlicher Länge. Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ mit $|\mathcal{D}| \geq 3$, die maximal mit der Eigenschaft, daß für alle $X, Y \in \mathcal{D}$, $X \neq Y$ bereits $X + Y = \sum \mathcal{D}$ gelte, sei, heiße eine *Diagonalmenge*. Ferner sei $\Delta := \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}; \mathcal{D} \text{ ist Diagonalmenge}\}$. Dann heiße $\mathcal{L}(\mathcal{M}) := (\mathcal{L}, \leq, \Delta)$ das $\mathcal{M}$ *zugeordnete Diagramm*.
b) Es sei $\mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})) :=$
$\{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L};\ \text{aus } X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{L}, Y \leq X \text{ folgt } Y \in \mathcal{X},\ \text{für } \mathcal{D} \in \Delta \text{ gilt } |\mathcal{X} \cap \mathcal{D}| \leq 1 \text{ oder } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}\}$.

2.4.3. Satz: Es seien $\mathcal{M}$ ein modularer Verband endlicher Länge und $\subseteq$ die mengentheoretische Inklusion auf $\mathrm{Pot}(\mathcal{L})$.
a) Dann ist $(\mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})), \subseteq)$ ein Verband.
b) Für $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M}))$ gilt $\mathcal{X}_1 \cdot \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ und $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \cap\{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})); \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2\}$.

Beweis: **a), b)** Es sei $\{\mathcal{X}_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M}))$ für eine Indexmenge $J \neq \{\}$. Dann ist auch $\cap_{j \in J} \mathcal{X}_j \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M}))$. Nun beachtet man nur noch $\mathcal{L} \in \{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})); \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2\}$.

2.4.4. Lemma: Austauschsatz
Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.4.2. sei $Z = \sum_{i=1}^{s} X_i = \sum_{j=1}^{t} Y_j \in \mathcal{M}$ für $s, t \in I\!N$ und $\{X_i\}_{i=1}^{s}, \{Y_j\}_{j=1}^{t} \subseteq \mathcal{L}$. Dann existiert zu jedem X_{i_0}, $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$, ein Y_{j_0} für ein $j_0 \in \{1, \ldots, t\}$ mit $Z = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{s} X_i + Y_{j_0}$.

Beweis: Zunächst seien $X, Y \in \mathcal{M}$ beliebig. Weiter seien $\sigma_Y : [X \cdot Y, X] \to [Y, X + Y] : W \mapsto W + Y$ und $\iota_X : [Y, X + Y] \to [X \cdot Y, X] : W \mapsto W \cdot X$. Dies sind wohldefinierte und inklusionserhaltende Abbildungen. Weiter gilt für $W \in [X \cdot Y, X]$ bereits $W \sigma_Y \iota_X = (W + Y) \cdot X = (X \cdot Y) + W = W$ und für $W \in [Y, X + Y]$ gilt $W \iota_X \sigma_Y = (W \cdot X) + Y = W \cdot (X + Y) = W$. Also sind σ_Y und ι_X zueinander inverse Verbandsisomorphismen.
Nun sei $W_{i_0} := \sum_{i=1, i \neq i_0}^{s} X_i$. Man kann $W_{i_0} \neq Z$ annehmen. Dann ist X_{i_0} lokal in $[X_{i_0} \cdot W_{i_0}, X_{i_0}]$. Also ist $Z = X_{i_0} + W_{i_0}$ lokal in $[W_{i_0}, Z]$. Nun setzt man $U_j := W_{i_0} + Y_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, t\}$. Dann ist $W_{i_0} \leq U_j \leq Z$ für alle $j \in \{1, \ldots, t\}$ und $Z = \sum_{j=1}^{t} Y_j \leq \sum_{j=1}^{t} U_j \leq Z$. Somit gilt $Z = U_{j_0}$ für ein $j_0 \in \{1, \ldots, t\}$.

2.4.5. Satz: von Benson-Conway
Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.4.2. ist

$$\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})) : X \mapsto \{Y \in \mathcal{L}; Y \leq X\}$$

ein Verbandsisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\tau^{-1} : \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M})) \to \mathcal{M} : \mathcal{X} \mapsto \sum \mathcal{X}.$$

Beweis: Zunächst ist τ wohldefiniert, denn für $X \in \mathcal{M}$, $Y \in X\tau$ und $Z \in \mathcal{L}$ mit $Z \leq Y \leq X$ hat man $Z \in X\tau$. Weiter seien $\mathcal{D} \in \Delta$ und $Y_1, Y_2 \in X\tau \cap \mathcal{D}$, $Y_1 \neq Y_2$. Dann ist $Y_1, Y_2 \leq X$, und für alle $Z \in \mathcal{D}$ gilt $Z \leq \sum \mathcal{D} = Y_1 + Y_2 \leq X$. Ebenso ist τ^{-1} wohldefiniert, da $\mathcal{M}$ von endlicher Länge ist. Ferner sind τ und τ^{-1} offenbar inklusionserhaltend.
Es sei $X \in \mathcal{M}$. Dann ist $X\tau\tau^{-1} = \sum\{Y \in \mathcal{L}; Y \leq X\} \leq X$.
Angenommen, es wäre $X > \sum\{Y \in \mathcal{L}; Y \leq X\}$. Man kann X als minimal annehmen. Es sei nun $X = W_1 + W_2$ für $W_1, W_2 \in \mathcal{M}$.
Angenommen, es wäre $W_1, W_2 < X$. Wegen der Minimalität von X hat man für $i \in \{1, 2\}$ bereits $W_i = \sum\{Y \in \mathcal{L}; Y \leq W_i\} \leq \sum\{Y \in \mathcal{L}; Y \leq X\}$ und $X \leq \sum\{Y \in \mathcal{L}; Y \leq X\}$, *Widerspruch*.
Also ist X lokal, *Widerspruch*.
Somit ist $\tau\tau^{-1} = id_{\mathcal{M}}$.
Es seien nun $\mathcal{X} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M}))$ und $X := \mathcal{X}\tau^{-1} \in \mathcal{M}$. Dann ist $X\tau = \{Y \in \mathcal{L}; Y \leq \sum \mathcal{X}\} \supseteq \mathcal{X}$.
Angenommen, es wäre $X\tau \supset \mathcal{X}$. Dann existiert ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $Y \leq X$ und $Y \notin \mathcal{X}$. Es sei nun $N_Y := \mathrm{Inf}\{|\mathcal{Y}|; \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}, Y \leq \sum \mathcal{Y}\}$. Wegen $Y \leq X = \sum \mathcal{X}$ ist N_Y wohldefiniert und endlich, da $\mathcal{M}$ endliche Länge hat. Nun kann man annehmen, daß Y so gewählt ist, daß N_Y minimal ist.
Angenommen, es wäre $N_Y = 1$. Dann ist $Y \leq Z$ für ein $Z \in \mathcal{X}$. Damit ist aber $Y \in \mathcal{X}$, *Widerspruch*.
Nun sei $\mathcal{Y} = \{Y_j\}_{j=1}^{N_Y} \subseteq \mathcal{X}$ mit $Y \leq \sum \mathcal{Y}$. Dabei sei $\mathcal{Y}$ so gewählt, daß $Y_1 + Y$ minimal ist. Damit ist $Y_1 + Y = (Y_1 + Y) \cdot (Y_1 + \sum_{j=2}^{N_Y} Y_j) = ((Y_1 + Y) \cdot \sum_{j=2}^{N_Y} Y_j) + Y_1$. Nun sei $Z := (Y_1 + Y) \cdot \sum_{j=2}^{N_Y} Y_j \in \mathcal{M}$. Wegen $Y \not\leq Y_1$ ist $Z \in \mathcal{M}$ nicht minimal. Also existiert wegen der endlichen Länge von $\mathcal{M}$ eine Darstellung $Z = Z\tau\tau^{-1} = \sum_{k=1}^{K} Z_k$ für ein $K \in I\!N$ mit $\{Z_k\}_{k=1}^{K} \subseteq \mathcal{L}$.
Angenommen, es wäre $Z_k \notin \mathcal{X}$ für ein $k \in \{1, \ldots, K\}$. Es ist aber $Z_k \leq Z \leq Y_1 + Y \leq X$ und $Z_k \leq \sum_{j=2}^{N_Y} Y_j$, im *Widerspruch* zur Minimalität von N_Y.
Wegen $Y_1 + Y = Y_1 + \sum_{k=1}^{K} Z_k$ existiert also mit dem Austauschsatz ein $Z_0 \in \{Z_k\}_{k=1}^{K} \subseteq \mathcal{X}$ mit $Y_1 + Y = Y_1 + Z_0$. Also ist $N_Y = 2$.
Schließlich ist $Z_0 + Y \leq Y_1 + Y$. Mit der Minimalität von $Y_1 + Y$ folgt $Y_1 + Y = Z_0 + Y$. Es ist $|\{Y, Y_1, Z_0\}| = 3$ und $\{Y, Y_1, Z_0\}$ ist mit dem Zornschen Lemma in einer Diagonalmenge enthalten. Denn ist $\{\mathcal{C}_j\}_{j \in I\!N} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$ eine aufsteigende Kette, so daß für alle $j \in I\!N$ gerade $|\mathcal{C}_j| \geq 3$ und $X + Y = \sum \mathcal{C}_j$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}_j$, $X \neq Y$ gilt, so hat auch $\cup_{j \in I\!N} \mathcal{C}_j$ diese Eigenschaften. Also ist $Y \in \mathcal{X}$, *Widerspruch*.
Also ist $\mathcal{X}\tau^{-1}\tau = \mathcal{X}$ und es gilt $\tau^{-1}\tau = id_{\mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathcal{M}))}$.

2.4.6. Definition: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Bemerkung 2.1.5. gegeben $\mathcal{M}(V)$ die dort angegebene Menge mit der dort angegebenen Halbordnung, $\mathcal{L}(V)$ die Menge der lokalen Elemente von $\mathcal{M}(V)$ und $\Delta(V)$ die Menge der Diagonalmengen von $\mathcal{L}(V)$.

2.4.7. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.4.6. ist
$\mathcal{L}(V) = \{W \in \mathcal{M}(V) \text{ als } R\text{-Moduln}; W/\mathrm{Rad}(W) \text{ ist irreduzibel}\}$.

Beweis: Es sei $W \leq V$ ein R-Teilmodul und $W/\mathrm{Rad}(W)$ irreduzibel. Dann gilt für alle R-Teilmoduln $U < W$ bereits $U \leq \mathrm{Rad}(W)$, da W genau einen maximalen R-Teilmodul enthält. Also ist $W \in \mathcal{M}(V)$ lokal. Ist umgekehrt $W \in \mathcal{M}(V)$ lokal, so ist jeder R-Teilmodul $U < W$ bereits in allen maximalen R-Teilmoduln von W enthalten, also gilt $U \leq \mathrm{Rad}(W)$. Damit ist $W/\mathrm{Rad}(W)$ ein irreduzibler R-Modul.

2.4.8. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.4.6. seien $W \leq V$ ein R-Teilmodul und $U < W$ ein maximaler R-Teilmodul. Ferner sei $X \in W\tau \setminus U\tau$ mit der Abbildung τ aus Satz 2.4.5. Dann ist $W/U \cong X/\mathrm{Rad}(X)$ als R-Moduln.

Beweis: Es ist $X \leq W$ und $X \not\leq U$ als R-Moduln, also gilt $W/U = (X + U)/U \cong X/(U \cap X)$ als R-Moduln. Da X lokal ist, folgt daraus die Behauptung.

2.4.9. Satz: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.4.6. Es seien $\mathcal{D} \in \Delta(V)$ und $W_1, W_2 \in \mathcal{D}$, $W_1 \neq W_2$.

a) Es ist $W_1 \not\leq W_2$.
b) Es sei $R/\mathrm{Rad}(R)$ halbeinfach. Dann ist $W_1/\mathrm{Rad}(W_1) \cong W_2/\mathrm{Rad}(W_2)$ als R-Moduln.

Beweis: **a)** *Angenommen*, es wäre $W_1 < W_2$. Es existiert $U \in \mathcal{D}$ mit $U \neq W_1, W_2$. Wegen $W_1 + W_2 = W_2$ gilt auch $U + W_2 = W_2$, also $U < W_2$. Dann ist aber $U + W_1 = W_2$, im *Widerspruch* zur Lokalität von W_2.
b) Man kann $W_1 \neq W_2$ annehmen. Ferner sei $W_3 \in \mathcal{D}$ mit $W_3 \neq W_1, W_2$. Nun ist $\mathrm{Rad}(W_1 + W_2) = (W_1+W_2)\cdot\mathrm{Rad}(R) = W_1\cdot\mathrm{Rad}(R)+W_2\cdot\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}(W_1)+\mathrm{Rad}(W_2)$. Wegen $\mathrm{Rad}(W_1), \mathrm{Rad}(W_2) \geq W_1 \cap W_2$ hat man $(W_1 + W_2)/\mathrm{Rad}(W_1 + W_2) \cong W_1/\mathrm{Rad}(W_1) \oplus W_2/\mathrm{Rad}(W_2)$ als R-Moduln. Analog ist $(W_1 + W_2)/\mathrm{Rad}(W_1 + W_2) \cong W_1/\mathrm{Rad}(W_1) \oplus W_3/\mathrm{Rad}(W_3) \cong W_2/\mathrm{Rad}(W_2) \oplus W_3/\mathrm{Rad}(W_3)$ als R-Moduln. Daraus folgt sofort die Behauptung.

2.5. Berechnung von Untermodulverbänden

2.5.1. Definition: **a)** Es seien F ein endlicher Körper der Charakteristik $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $V := F^{1\times n}$ mit F-Standardbasis $\mathcal{S}$. Ferner sei $A :=< \{a_j\}_{j\in J} >\subseteq \mathrm{End}_F(V)$ als Algebrenerzeugnis in $\mathrm{End}_F(V)$ für eine endliche Indexmenge J.
b) Es bezeichne $m(\cdot,\cdot,\cdot)$ die Matrix einer F-linearen Abbildung zweier F-Vektorräume bezüglich gegebener Basen für den Urbild- respektive Bildraum in Zeilenkonvention.

2.5.2. Algorithmus:

- Es sei $\{m(\mathcal{S}, a_j, \mathcal{S})\}_{j\in J} \subseteq F^{n\times n}$ gegeben.
- ⋆ Berechne $k^{(i)}$ und $\{m(\mathcal{S}, a_{j,V^{(i)}}, \mathcal{S})\}_{j\in J} \subseteq F^{n^{(i)}\times n^{(i)}}$ für alle $i \in I$.
- Für alle $i \in I$ führe durch:
  - Finde ein Deltawort $a^{(i)}$.
  - Es sei $\tilde{E} \geq F$ eine Körpererweiterung mit $[\tilde{E} : F] = \mathrm{Dim}_F(\mathrm{Kern}(a^{(i)}_{V^{(i)}}))$.
  - Es sei $l^{(i)} \in \mathbb{N}$ die Kompositionslänge von $V^{(i)} \otimes_F \tilde{E}$ als $A \otimes_F \tilde{E}$-Modul.
  - ⋆ Finde ein Deltawort $a^{(i)}$ mit $\mathrm{Dim}_F(\mathrm{Kern}(a^{(i)2}_{V^{(i)}})) = l^{(i)}$.
  - Berechne $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Kern}(a^{(i)N}_V) = \mathrm{Kern}(a^{(i)N+1}_V)$.
  - ⋆ Es sei $\mathcal{C}$ eine F-Basis für $\mathrm{Kern}(a^{(i)N}_V)$ gegeben durch $m(\mathcal{C}, \mathcal{S}) \in F^{l^{(i)}k^{(i)}\times n}$.
  - ⋆ Wähle eine F-linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$, so daß $V =< \mathcal{B} > \oplus\mathrm{Bild}(a^{(i)N}_V)$ als F-Vektorräume gilt.
  - Berechne $m(\mathcal{C}, \pi|_{\mathrm{Kern}(a^{(i)N}_V)}, \mathcal{B}) \in F^{l^{(i)}k^{(i)}\times l^{(i)}k^{(i)}}$.
  - ⋆ Berechne $M := m(\mathcal{C}, \pi|_{\mathrm{Kern}(a^{(i)N}_V)}, \mathcal{B})^{-1} \cdot m(\mathcal{C}, \mathcal{S}) \in F^{l^{(i)}k^{(i)}\times n}$.
  - Für alle $j \in J$ führe durch:
    - Berechne $m(\mathcal{S}, a_j\pi, \mathcal{B}) \in F^{n\times l^{(i)}k^{(i)}}$.
    - ⋆ Berechne $A_j := M \cdot m(\mathcal{S}, a_j\pi, \mathcal{B}) \in F^{l^{(i)}k^{(i)}\times l^{(i)}k^{(i)}}$.
  - Berechne ein Repräsentantensystem von erzeugenden Vektoren $m(\mathcal{V}, \mathcal{B}) \in F^{s\times l^{(i)}k^{(i)}}$ für ein $s \in \mathbb{N}$ für die zyklischen $< \{A_j\}_{j\in J} >$-Teilmoduln von $F^{1\times l^{(i)}k^{(i)}}$.
  - ⋆ Berechne $R^{(i)} := m(\mathcal{V}, \mathcal{B}) \cdot M \in F^{s\times n}$.
  - Verkürze $R^{(i)}$ zu einem Repräsentantensystem erzeugender Vektoren für die $V^{(i)}$-lokalen A-Teilmoduln von V.
  - ⋆ Berechne alle Diagonalmengen aus $V^{(i)}$-lokalen A-Teilmoduln von V.
- Berechne die Inzidenzen unter der mengentheoretischen Inklusion aller von den Repräsentanten aus $R^{(i)}$ für alle $i \in I$ erzeugten lokalen A-Teilmoduln von V.
- ⋆ Berechne $\mathcal{M}(\mathcal{L}(V))$ und die Isomorphietypen aller Subquotienten.

2.5.3. Bemerkung: Für die oben mit $\star$ gekennzeichneten Stellen beachtet man noch:
a) Für $i \in I$ sei $n^{(i)} := \mathrm{Dim}_F(V^{(i)})$, man kann $V^{(i)} = F^{1\times n^{(i)}}$ annehmen und wieder sei $\mathcal{S}$ die jeweilige Standardbasis.
b) Mit Satz 2.3.10. ist immer $\tilde{E} \geq E^{(i)} \geq F$. Wegen Satz 2.3.8. hat $V^{(i)} \otimes_F \tilde{E}$ als $A \otimes_F \tilde{E}$-Modul die Kompositionslänge $l^{(i)} = [E^{(i)} : F]$. Damit ist $a^{(i)}$ normiert.
c) Man beachte Satz 2.3.13.
d) Ohne hier auf die programmiertechnischen Details näher einzugehen, sei erwähnt, daß sich aufgrund der internen Struktur der verwendeten Programme des Systems MEAT-AXE eine ganz bestimmte Wahl der Menge $\mathcal{B}$ anbietet, für die die Berechnung der Projektion $\pi \in \mathrm{End}_F(V)$, die durch $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Bild}(a_V^{(i)N})$ und $\pi|_{<\mathcal{B}>} = id_{<\mathcal{B}>}$ definiert ist, besonders einfach wird. Formal ist nun $m(\mathcal{S}, \pi, \mathcal{B}) \in F^{n\times l^{(i)}k^{(i)}}$ bekannt. In praxi wird weder diese Matrix noch die Menge $\mathcal{B}$ explizit berechnet.
e) Offenbar ist $\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})} : \mathrm{Kern}(a_V^{(i)N}) \to < \mathcal{B} >$ bijektiv. Damit ist

$$M = m(\mathcal{B}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1}, \mathcal{S}).$$

f) Für $e^{(i)} := e_{a^{(i)}} \in A$ ist $e^{(i)}\pi = \pi : V \to < \mathcal{B} >$ und damit ist

$$\begin{aligned} A_j &= m(\mathcal{B}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1} a_j \pi, \mathcal{B}) \\ &= m(\mathcal{B}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1}, \mathcal{C}) \cdot m(\mathcal{C}, e^{(i)} a_j e^{(i)}, \mathcal{C}) \cdot m(\mathcal{C}, \pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})}, \mathcal{B}) \\ &\sim m(\mathcal{C}, e^{(i)} a_j e^{(i)}, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Also ist $F^{1\times l^{(i)}k^{(i)}}$ als Modul für das Algebrenerzeugnis $< \{A_j\}_{j\in J} >$ in $F^{l^{(i)}k^{(i)}\times l^{(i)}k^{(i)}}$ isomorph zu $Ve^{(i)}$ als Modul für die Kondensationsalgebra $A_{e^{(i)}\{a_j\}e^{(i)}}$ im Sinne von Definition 2.8.1.
g) Es ist $m(\mathcal{V}, \mathcal{B}) \cdot m(\mathcal{B}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1}, \mathcal{C})$ ein Repräsentantensystem von erzeugenden Vektoren für die zyklischen $A_{e^{(i)}\{a_j\}e^{(i)}}$-Teilmoduln von $Ve^{(i)}$. Damit enthält

$$R^{(i)} = m(\mathcal{V}, \mathcal{B}) \cdot m(\mathcal{B}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1}, \mathcal{C}) \cdot m(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = m(\mathcal{V}, (\pi|_{\mathrm{Kern}(a_V^{(i)N})})^{-1}, \mathcal{S})$$

mit Satz 2.3.15. und Bemerkung 2.3.16. ein Repräsentantensystem erzeugender Vektoren für die $V^{(i)}$-lokalen A-Teilmoduln von V. Da die Kondensationsalgebra nicht notwendig gleich der Hecke-Algebra ist, ist $R^{(i)}$ möglicherweise redundant. Man vergleiche dazu Abschnitt 2.8.
h) Wegen der Sätze 2.4.7. und 2.4.9.b) findet man auf diese Weise alle Diagonalmengen im Sinne von Definition 2.4.2. Dabei beachtet man noch, daß die Abbildung ν^{-1} in Satz 2.3.18. inklusionserhaltend ist, und Satz 2.4.9.a).
i) Damit ist $\mathcal{L}(V)$ bestimmt und mit dem Satz von Benson-Conway ist $\mathcal{M}(\mathcal{L}(V))$ verbandsisomorph zu $\mathcal{M}(V)$. Mit Satz 2.4.8. bestimmt man die Isomorphietypen der Subquotienten. In der Tat ist dieser Teil des Algorithmus der zeitaufwendigste. Die Bestimmung der zu $\mathcal{M}(\mathcal{L}(V))$ gehörenden Teilmengen von $\mathcal{L}(V)$ muß daher effizient durchgeführt werden. Auf die programmiertechnischen Details soll hier ebenfalls nicht eingegangen werden.

2.6. Fixpunkt-Kondensation

2.6.1. Definition: Es seien Λ ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$ und $H \leq G$ eine Untergruppe, für die p kein Teiler der Gruppenordnung $|H|$ ist. Dann heiße $e_H := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \Lambda G$ *das der Untergruppe $H \leq G$ zugeordnete Idempotent.*

2.6.2. Bemerkung: Es ist $e_H \in \Lambda H$ das zentral-primitive Idempotent zur trivialen Darstellung.

2.6.3. Lemma: Fixpunkt-Kondensation
Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.6.1. sei V ein ΛG-Modul. Dann ist $Ve_H = \mathrm{Fix}_V(H)$.

Beweis: Ist $ve_H \in Ve_H$, so hat man $ve_H \cdot h = \frac{1}{|H|}\sum_{\hat{h}\in H}\hat{h}h = ve_H$ für alle $h \in H$. Ist umgekehrt $vh = v$ für alle $h \in H$, so gilt $ve_H = v \cdot \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h = v$, somit ist $v = ve_H \in Ve_H$.

2.6.4. Definition: **a)** Es seien ϱ eine Permutationsdarstellung von ΛG auf $\{1,\ldots,n\} \subset I\!N$, V der zugehörige Permutationsmodul und $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ dessen kanonische Λ-Basis, wobei Λ ein beliebiger Körper sei. Dann seien $\{\mathcal{O}_k\}_{k=1}^{\tilde{n}}$ die H-Bahnen auf $\{1,\ldots,n\}$ für ein $\tilde{n} \in I\!N$ und für $k \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$ seien $v_k^+ := \sum_{i\in\mathcal{O}_k} v_i$ die Bahnsummen.
b) Für $g \in G$ und $i \in \{1,\ldots,n\}$ sei $l_{i,g} \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$ durch $ig \in \mathcal{O}_{l_{i,g}}$ definiert.

2.6.5. Lemma: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus den Definitionen 2.6.1. und 2.6.4. ist $\{v_k^+\}_{k=1}^{\tilde{n}}$ eine Λ-Basis für Ve_H.

Beweis: Die Menge $\{v_k^+\}_{k=1}^{\tilde{n}}$ ist offenbar Λ-linear unabhängig. Für $k \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$ ist weiter $v_k^+h = \sum_{i\in\mathcal{O}_k} v_ih = \sum_{i\in\mathcal{O}_k} v_{ih} = \sum_{i\in\mathcal{O}_k} v_i$ für alle $h \in H$. Also ist $v_k^+ \in Ve_H$. Ist umgekehrt $v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i \in Ve_H$, mit $a_i \in \Lambda$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$, so ist wegen $vh = v$ für alle $h \in H$ bereits $a_{ih^{-1}} = a_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und alle $h \in H$.

2.6.6. Satz: **Kondensationsformel**
Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus den Definitionen 2.6.1. und 2.6.4. gegeben. Für $k \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$ und $g \in G$ gilt denn $v_k^+ \cdot e_Hge_H = \sum_{i\in\mathcal{O}_k}\frac{1}{|\mathcal{O}_{l_{i,g}}|}v_{l_{i,g}}^+$.

Beweis: Zunächst ist p kein Teiler von $|\mathcal{O}_{l_{i,g}}|$. Damit ist $v_k^+ \cdot e_Hge_H = v_k^+ \cdot ge_H = \sum_{i\in\mathcal{O}_k} v_{ig}e_H = \sum_{i\in\mathcal{O}_k}\{v_{ig}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}h\} = \sum_{i\in\mathcal{O}_k}\frac{|H|}{|H||\mathcal{O}_{l_{i,g}}|}v_{l_{i,g}}^+$.

2.6.7. Bemerkung: Da $|H|$ in die obige Formel nicht eingeht, ist diese Formel auch anwendbar, falls p die Gruppenordnung $|H|$ teilt, sofern nur die Bahnlängen $|\mathcal{O}_k|$ für $k \in \{1,\ldots,\tilde{n}\}$ nicht von p geteilt werden. Allerdings hat man dann kein der Untergruppe H zugeordnetes Idempotent mehr. Es wäre zu untersuchen, ob die von dieser *p-singulären Kondensation* gelieferten Ergebnisse theoretisch interpretierbar sind.

2.6.8. Lemma: Es seien $(K,\mathcal{R}_\wp,F)$ ein p-modulares System mit $K := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/\mathrm{Exp}(G)})$. Mit der Identifikation $\Lambda := F$ seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus den Definitionen 2.6.1. gegeben, V ein FG-Modul und und φ der zu V gehörende Brauercharakter von FG. Weiter seien $(\cdot,\cdot)_H$ das gewöhnliche charaktertheoretische Skalarprodukt für KH und 1_H der triviale K-Charakter von KH. Dann gilt $\dim_F(Ve_H) = (\varphi|_H, 1_H)_H$.

Beweis: V ist als FH-Modul halbeinfach und $\varphi|_H$ kann als gewöhnlicher Charakter von KH aufgefaßt werden. Daraus folgt die Behauptung mit Lemma 2.6.3.

2.7. Ausblick: Kondensation von Tensorprodukten

2.7.1. Definition: **a)** Es sei F ein endlicher Körper der Charakteristik $p > 0$, weiter sei $G = \,<\{g_t\}_{t\in T}>$ als Gruppenerzeugnis für eine endliche Indexmenge T und V_1, V_2 seien FG-Moduln.
b) Es sei $H \leq G$ eine Untergruppe, für die p kein Teiler der Gruppenordnung $|H|$ ist. Ferner sei $\{W^{(j)}\}_{j\in J}$ für eine Indexmenge J ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen von irreduziblen FH-Moduln.

2.7.2. Algorithmus:

- $\star$ Es seien $\{m(\mathcal{S}, g_t, \mathcal{S})\}_{t\in T}$ für V_1 und V_2 gegeben.
- Für alle $j \in J$ führe durch:
  - Finde ein normiertes Deltawort $a^{(j)} \in FH$.
- Für alle $j \in J$ führe durch:
  - Berechne ein Repräsentantensystem erzeugender Vektoren für die lokalen FH-Teilmoduln von $W^{(j)} \otimes_F W^{(j)*}$.
  - $\star$ Berechne eine standardisierte FH-direkte Summenzerlegung von $W^{(j)} \otimes_F W^{(j)*}$ als FH-Moduln.
- Für $i \in \{1, 2\}$ führe durch:
  - Berechne ein Repräsentantensystem erzeugender Vektoren für die lokalen FH-Teilmoduln von V_i.
  - Berechne eine standardisierte direkte Summenzerlegung von V_i als FH-Modul und den zugeordneten Basiswechsel.
- $\star$ Berechne eine F-Basis $\mathcal{B}$ für $(V_1 \otimes V_2)e_H$.
- Für alle $v \in \mathcal{B}$ und alle $t \in T$ führe durch:
  - $\star$ Berechne vg_t.
  - $\star$ Berechne die Projektion vg_te_H von vg_t auf $(V_1 \otimes V_2)e_H$.

2.7.3. Bemerkung: Für die oben mit $\star$ gekennzeichneten Stellen beachtet man weiter:
a) Man beachte Definition 2.5.1.
b) Da FH halbeinfach ist, sind die lokalen FH-Teilmoduln von $W^{(j)} \otimes_F W^{(j)*}$ irreduzibel, wobei $W^{(j)*}$ den zu $W^{(j)}$ dualen FH-Modul bezeichne. Mit Satz 2.3.15. erhält man damit $W^{(j)} \otimes_F W^{(j)*}$ als FH-direkte Zerlegung in irreduzible FH-Moduln. Da die verwendeten Deltaworte normiert sind, erhält man durch Anwenden des im System Meat-Axe implementierten Standardbasisalgorithmus, dessen programmiertechnische Details hier nicht näher diskutiert werden sollen, die direkten Summanden in einer wohldefnierten Normalform.
c) Hat man $V_i = \oplus_{s\in S_i} V_{i,s}$ als FH-direkte Zerlegung in irreduzible FH-Moduln für Indexmengen S_i, so ist mit Lemma 2.6.3. $(V_{1,s_1} \otimes_F V_{2,s_2})e_H \neq \{0\}$ genau dann, wenn $V_{1,s_1} \cong V^*_{2,s_2}$ als FH-Moduln gilt. Daher reicht die Betrachtung der oben angegebenen Paare $W^{(j)} \otimes_F W^{(j)*}$ aus.
d) In der Standardbasis für $V_1 \otimes V_2$ bedeutet das zwei Matrixmultiplikationen.
e) Dazu benutzt man die standardisierte direkte Summenzerlegung für V_1, V_2 und die oben genannten speziellen Paare. Die Berechnung der Projektionen geschieht wie im Algorithmus 2.5.2.

2.7.4. Bemerkung: Man beachte, daß in obigem Algorithmus das Tensorprodukt der Moduln V_1 und V_2 nicht explizit in Form von Matrizen berechnet wird.

2.8. Kondensationsringe, Satz von Zassenhaus

2.8.1. Definition: Es sei $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq R$ für eine Indexmenge I. Ferner gelte $< \{r_i\}_{i\in I} >= R$ als Ringerzeugnis in R. Dann heiße $R_{e\{r_i\}e} :=< \{er_ie\}_{i\in I} >\subseteq eRe$ als Ringerzeugnis in eRe der *dem Idempotent $e \in R$ und $\{r_i\}_{i\in I}$ zugeordnete Kondensationsring.*

2.8.2. Bemerkung: Es ist nicht notwendig $R_{e\{r_i\}e} = eRe$. Satz 2.1.6. liefert ein Kriterium, daß die echte Inklusion gilt. Gilt Gleichheit, so ist es in praxi schwierig, dies nachzuweisen.

2.8.3. Satz: Es seien die Bezeichnungen aus Definition 2.8.1. gegeben. Ferner sei $< \{g_t\}_{t\in T} >= G$ für eine Indexmenge T als Gruppenerzeugnis in G. Weiter seien mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 2.6.1. $H \leq G$ eine Untergruppe und $e_H \in \Lambda G$ das H zugeordnete Idempotent sowie $\Omega \subseteq G$ ein Repräsentantensystem für die H-H-Doppelnebenklassen in G, für das $1 \in \Omega$ gelte. Schließlich seien $V \cong 1_H \nearrow^G$ als ΛG-Moduln und $\{v_i\}_{i\in\{Hg\subseteq G; g\in G\}}$ die kanonische Basis von V.
a) Es ist $e_H\Omega e_H := \{e_H d e_H \in e_H \Lambda G e_H; d \in \Omega\}$ eine Λ-Basis für $e_H\Lambda G e_H$.
b) Es ist $\Lambda G_{e_H\{g_t\}e_H} = e_H\Lambda G e_H$ genau dann, wenn $v_H \cdot \Lambda G_{e_H\{g_t\}e_H} = Ve_H$ gilt.

Beweis: **a)** Zunächst ist $< \{e_H g e_H; g \in G\} >= e_H\Lambda G e_H$ als Λ-Vektorraumerzeugnis. Wegen $e_H \cdot hg\tilde{h} \cdot e_H = e_H g e_H$ für alle $g \in G$ und $h, \tilde{h} \in H$ ist $e_H\Omega e_H$ ein Λ-Vektorraumerzeugendensystem für $e_H\Lambda G e_H$. Für $d \in \Omega$ hat man weiter $e_H d e_H = \frac{1}{|H|^2}\sum_{h,\tilde{h}\in H} hd\tilde{h} \in \Lambda G$. Da G eine Λ-Basis für ΛG bildet, folgt damit sofort die Λ-lineare Unabhängigkeit von $e_H\Omega e_H$.
b) Mit Lemma 2.6.5. ist $\{v_d^+\}_{d\in\Omega}$ eine Λ-Basis für Ve_H, da die H-Bahnen auf $\{Hg \subseteq G; g \in G\}$ durch die H-H-Doppelnebenklassen parametrisiert werden. Insbesondere ist $v_1^+ = v_H$. Für $d \in \Omega$ gilt nun $v_1^+ e_H d e_H = v_{Hd} e_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} v_{Hdh} = k_d \cdot v_d^+$ für ein $k_d \in \Lambda^*$. Ist nun $\Lambda G_{e_H\{g_t\}e_H} = e_H\Lambda G e_H$, so gilt $v_H \cdot \Lambda G_{e_H\{g_i\}e_H} = v_1^+ \cdot e_H\Lambda G e_H = Ve_H$.
Ist umgekehrt $v_H \cdot \Lambda G_{e_H\{g_i\}e_H} = Ve_H$ und $d \in \Omega$, so existiert ein $a_d \in \Lambda G_{e_H\{g_i\}e_H}$ mit $v_1^+ a_d = v_d^+$. Nun ist $e_H\Omega e_H$ eine Λ-Basis für $e_H\Lambda G e_H$. Stellt man also $a_d \in e_H\Lambda G e_H$ als Λ-Linearkombination in dieser Basis dar, so folgt wegen $v_1^+ e_H d e_H = k_d \cdot v_d^+$ für ein $k_d \in \Lambda^*$ sofort $a_d = k_d^{-1} \cdot e_H d e_H$. Also gilt $\Lambda G_{e_H\{g_i\}e_H} = e_H\Lambda G e_H$.

2.8.4. Bemerkung: Durch Einschränken der Operation von eRe auf $R_{e\{r_i\}e}$ wird Ve zu einem $R_{e\{r_i\}e}$-Rechtsmodul.

2.8.5. Definition: Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.8.1. seien V ein R-Modul und $W \leq Ve$ als $R_{e\{r_i\}e}$-Moduln. W heiße *genuin*, falls $W \leq Ve$ als eRe-Moduln gilt.

2.8.6. Bemerkung: Sind W_1,$W_2 \leq Ve$ genuine $R_{e\{r_i\}e}$-Teilmoduln von Ve, so gilt dies auch für $W_1 + W_2 \leq Ve$ und $W_1 \cap W_2 \leq Ve$.

2.8.7. Lemma: Es seien K ein Körper der Charakteristik 0, $\mathcal{R} \subset K$ ein diskreter Bewertungsring in K, $\wp = (\pi) \lhd \mathcal{R}$ das maximale Ideal von $\mathcal{R}$ und $F := \mathcal{R}/\wp$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Weiter seien V ein endlich-erzeugter freier $\mathcal{R}$-Rechtsmodul und $W \leq V$ ein $\mathcal{R}$-Teilmodul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
a) Es gilt $W\wp = W \cap V\wp$.
b) Es gilt $(W + V\wp)/V\wp \cong W/W\wp$ als $\mathcal{R}$-Moduln.
c) W ist ein $\mathcal{R}$-direkter Summand von V.
d) V/W ist ein freier $\mathcal{R}$-Modul.

2.8.8. Bemerkung: Da für die $\mathcal{R}$-Moduln $(W + V\wp)/V\wp$ und $W/W\wp$ sogar $((W + V\wp)/V\wp)\wp = \{0\} = (W/W\wp)\wp$ gilt, ist b) gleichwertig zu folgender Aussage:
b') Es gilt $(W + V\wp)/V\wp \cong W/W\wp$ als F-Moduln.

Beweis: Es gelte a). Dann ist $(W + V\wp)/V\wp \cong W/(W \cap V\wp) = W/W\wp$ als $\mathcal{R}$-Moduln. Also folgt b).
Es gelte b). Es gilt ohnehin $W\wp \subseteq W \cap V\wp$. Weiter ist $W/W\wp \cong (W + V\wp)/V\wp \cong W/(W \cap V\wp)$ als $\mathcal{R}$-Moduln und als F-Vektorräume. Nun folgt a) durch eine Dimensionsbetrachtung, da V und somit auch W als Moduln über dem Hauptidealring $\mathcal{R}$ endlich erzeugt sind.
Es gelte c). Dann hat man $V = W \oplus \hat{W}$ als $\mathcal{R}$-Moduln. Dabei ist $\hat{W} \leq V$ als $\mathcal{R}$-Teilmodul eines freien Moduls über dem Hauptidealring $\mathcal{R}$ ebenfalls frei. Somit ist $V/W \cong \hat{W}$ als $\mathcal{R}$-Modul frei, also gilt d).
Es gelte d). Man betrachtet die kurze exakte $\mathcal{R}$-Folge $\{0\} \to W \to V \xrightarrow{\varepsilon} V/W \to \{0\}$, wobei ε den kanonischen Epimorphismus bezeichne. Es ist V/W ein projektiver $\mathcal{R}$-Modul, also zerfällt diese kurze exakte $\mathcal{R}$-Folge und $W = \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ ist ein $\mathcal{R}$-direkter Summand von V. Also gilt c).

Es gelte c). Aus $V = W \oplus \hat{W}$ als $\mathcal{R}$-Moduln folgt sofort $V\wp = W\wp \oplus \hat{W}\wp$ als $\mathcal{R}$-Moduln und somit gilt a).
Es gelte a). Zunächst ist V/W als $\mathcal{R}$-Modul torsionsfrei. Dazu sei $v + W \in V/W$ ein Torsionselement, also existiert ein $r \in \mathcal{R}$, $r \neq 0$, mit $vr \in W$. Da $\mathcal{R}$ ein diskreter Bewertungsring ist, existiert ein $i \in I\!N$ mit $v\pi^i \in W$. Somit ist $(v\pi^{i-1})\pi \in W \cap V\wp = W\wp$, es existiert also ein $w \in W$ mit $(v\pi^{i-1} - w)\pi = 0$. Da V torsionsfrei ist, hat man $v\pi^{i-1} = w \in W$, und per Induktion über den Exponenten $i \in I\!N$ folgt $v \in W$. Als torsionsfreier Modul über dem Hauptidealring $\mathcal{R}$ ist V/W frei. Also gilt d).

2.8.9. Definition: Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Lemma 2.8.7. gegeben. Ein $\mathcal{R}$-Teilmodul $W \leq V$ heiße $\mathcal{R}$-*rein in* V, falls W eine der Bedingungen aus Lemma 2.8.7. erfüllt.

2.8.10. Satz: von Zassenhaus
Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Lemma 2.8.7. gegeben. Ferner sei V ein als $\mathcal{R}$-Modul endlich erzeugter, $\mathcal{R}$-freier $\mathcal{R}G$-Rechtsmodul, für den $V \otimes_{\mathcal{R}} K = V_1 \oplus V_2$ als KG-Moduln gelte. Dann existieren $\mathcal{R}$-reine $\mathcal{R}G$-Teilmoduln $W_i \leq V$, $i \in \{1, 2\}$, so daß $W_i \otimes_{\mathcal{R}} K = V_i$ als KG-Moduln und $(W_i + V\wp)/V\wp \cong W_i/W_i\wp$ als $\mathcal{R}G$-Moduln und als FG-Moduln gilt.

Beweis: Man setzt $W_i := V \cap V_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann ist $W_i \leq V$ als $\mathcal{R}G$-Moduln und es gilt $W_i \otimes_{\mathcal{R}} K \subseteq V_i$. Es sei nun $\mathcal{B} := \{b_i\}_{i=1}^n$ für ein $n \in I\!N$ eine $\mathcal{R}$-Basis für V. Dann ist $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{R}} 1 := \{b_i \otimes_{\mathcal{R}} 1\}_{i=1}^n$ eine K-Basis für $V \otimes_{\mathcal{R}} K$. Ferner sei $\mathcal{C}_i := \{c_{i,j}\}_{j=1}^{n_i}$ für ein $n_i \in I\!N$ eine K-Basis für V_i. Für jedes solche $c_{i,j} \in \mathcal{C}_i$ existiert ein $\mathcal{R}$-Vielfaches $\tilde{c}_{i,j} \in V$. Dazu betrachtet man nur die $\mathcal{R}$-Bewertungen der Koeffizienten von $c_{i,j}$ in der Schreibweise als K-Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{R}} 1$. Somit gilt $\tilde{c}_{i,j} \in V \cap V_i = W_i$. Damit ist aus Dimensionsgründen $W_i \otimes_{\mathcal{R}} K = V_i$.
Weiter ist $(V \cap V_i)\wp \subseteq V\wp \cap V_i$. Ist nun $v \in V\wp \cap V_i$, so existiert ein $\hat{v} \in V$ mit $\hat{v}\pi = v$. Da $V_i \leq V \otimes_{\mathcal{R}} K$ als K-Vektorraum ist, folgt $v = \hat{v}\pi = (v\pi^{-1})\pi \in (V \cap V_i)\wp$. Somit hat man $W_i\wp = (V \cap V_i)\wp = V\wp \cap V_i = V\wp \cap W_i$, also ist $W_i \leq V$ ein $\mathcal{R}$-reiner $\mathcal{R}G$-Teilmodul. Somit folgt mit dem Homomorphiesatz für $\mathcal{R}G$-Moduln $(W_i + V\wp)/V\wp \cong W_i/W_i\wp$ als $\mathcal{R}G$-Moduln und als FG-Moduln.

3. 5-modulare Zerlegungszahlen für die maximalen Untergruppen von Co_3

In diesem Kapitel werden die Zerlegungsmatrizen für die im ATLAS angegebenen maximalen Untergruppen von Co_3 angegeben. Diese sind zum einen Teil der jeweils zitierten Literatur entnommen und zum anderen Teil mit Hilfe des Systems MOC berechnet worden. Die verwendeten gewöhnlichen Charaktertafeln entstammen der Bibliothek des Systems CAS. Gewisse dieser Charaktertafeln findet man im ATLAS wieder, in diesem Zusammenhang beachte man Bemerkung 6.3.1. Die nicht im ATLAS vorkommenden Charaktertafeln sind in Abschnitt 6.3. wiedergegeben, sofern sie nicht als Kronecker-Produkte von im sc Atlas angegebenen Charaktertafeln entstehen. Die Zeilen der wiedergegebenen Zerlegungsmatrizen sind jeweils mit gewöhnlichen Charakteren indiziert, die wie im System CAS angeordnet sind. Auch die Numerierung der nichttrivialen Blöcke einer Gruppe ist diesem System entnommen. Gewöhnliche wie Brauercharaktere werden durch ihren Grad angegeben und durch zusätzliche Kürzel unterschieden. Generell erhalten Charaktere gleichen Grades in der Reihenfolge ihres Auftretens alphabetisch angeordnete Kleinbuchstaben als Kennung. Zueinander duale Moduln werden durch einen Stern gekennzeichnet. Die Bezeichnungen von Konjugiertenklassen und Isomorphietypen der in diesem und in späteren Kapiteln auftretenden Gruppen wie auch gewisser Einheitswurzelsummen sind dem ATLAS entnommen.

In Abschnitt 3.7. werden die Zerlegungsmatrizen für $U_3(5)$ und verwandte Gruppen angegeben. Die hierzu notwendigen Rechnungen zur Realisierung der modularen Darstellungen in definierender Charakteristik wurden mit dem System MEAT-AXE durchgeführt. Die nötigen Informationen über die Konjugiertenklassen dieser Gruppen sind wie die Bezeichnungsweisen dem ATLAS entnommen. Die im Rahmen dieser Rechnungen erzielten Ergebnisse gaben Anlaß, die zum Teil schon im MODULAREN ATLAS vorhandenen Daten zu überprüfen und an einigen Stellen zu berichtigen. Auf Anregung von mir hin ist die vollständige Brauercharaktertafel für $3.U_3(5){:}3$ und $U_3(5){:}2$ bereits in den MODULAREN ATLAS aufgenommen worden und wird deshalb hier in diesem Format angegeben.

In Abschnitt 3.8. sind die von mir mit den Systemen MOC und CAS durchgeführten Rechnungen zur Bestimmung des Zerlegungszahlen für $U_3(5){:}S_3$ wiedergegeben. Aufgrund der Struktur des Systems MOC bietet es sich an, den Stand der Rechnungen jeweils durch die aktuelle Basis $\{\Psi_i^j\}$ für die von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren des betrachteten Blocks erzeugte freie abelsche Gruppe von Klassenfunktionen zu dokumentieren. Dabei ist der untere Index jeweils die zugehörige Spaltennummer und der obere Index eine fortlaufende Nummer, die zur Unterscheidung der nacheinander betrachteten Basen dient. Ein Basisvektor wird nur dann angegeben, wenn er sich von dem an gleicher Stelle stehenden der vorhergehenden Basis unterscheidet. Ein projektiv-unzerlegbarer Charakter wird mit Φ_i bezeichnet und dabei durch den ihm zugeordneten irreduziblen Brauercharakter oder durch die zugehörige Spaltennummer indiziert. Wird ein projektiver Charakter als unzerlegbar erkannt, so wird das durch den Buchstaben u zusätzlich vermerkt. Die Einschränkung eines Charakters auf die zu dem betrachteten Block gehörende Komponente wird in etwas ungenauer Schreibweise durch drei Grundlinienpunkte angedeutet. Im Zusammenhang mit der Berechnung von Untergruppenfusionen sei auf das Vorwort zu Kapitel 4. verwiesen.

3.1. Zerlegungszahlen für $McL{:}2$

3.1.1. Bemerkung: Dem MODULAREN ATLAS entnimmt man die Brauercharaktere für $McL{:}2$. Daraus erhält man direkt durch Inspektion die Zerlegungsmatrix für $McL{:}2$ für den einzigen nichttrivialen Block, den Hauptblock. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 21a, 21b, 210a, 210b, 230a, 230b, 896a, 896b, 896^*a, 896^*b, 560a, 560b, 3038a, 3038b, 2400, 6490.$$

$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$22a$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$22b$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$231a$	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$231b$	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$252a$	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$252b$	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$896a$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$896b$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
896^*a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
896^*b	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
1540	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
$3520a$	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
$3520b$	.	.	.	2	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
$3520c$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.
$3520c^*$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.
$4752a$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.
$4752b$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.
$5103a$	1	.	1	1	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
$5103b$	.	1	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
$5544a$	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	.
$5544b$	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	1	.
16038	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	2	1
19712	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20790	1	1	2	2	1	1	.	.	2	2	2	2	2	2	1	1	2	.

3.2. Zerlegungszahlen für HS

3.2.1. Bemerkung: Der Originalarbeit von J. Thackray entnimmt man direkt die Zerlegungsmatrizen für HS für die beiden nichttrivialen Blöcke, den Hauptblock und einen Block von zyklischem Defekt. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 21, 55, 98, 133a, 133b, 210, 518, 280, 280^* \text{ und } 175, 650, 1925, 1275.$$

1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
77	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$154a$	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
$154b$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
$154c$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
231	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.
693	1	1	1	1	.	.	.	1	.	.
$770a$	1	2	1	2	1	1	1	.	.	.
$770b$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1
$770c$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1
896	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.
896^*	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1
1056	.	1	1	2	1	1	.	1	.	.
1386	.	.	.	1	.	.	1	1	1	1
1408	1	1	.	1	.	.	1	1	1	1
2520	.	2	.	2	1	1	2	2	1	1

und

175	1	.	.	.
825	1	1	.	.
$1925a$	.	.	1	.
$1925b$	.	1	.	1
3200	.	.	1	1

3.3. Zerlegungszahlen für $U_4(3){:}(2^2)_{133}$

3.3.1. Bemerkung: Man erhält die Brauer-Bäume für $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ für die vier Blöcke von zyklischem Defekt durch Betrachtung der zu den nichttrivialen Blöcken gehörenden Komponenten der folgenden Tensorprodukte von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren:

$$\begin{array}{rclrcl} 21a \otimes 90a & = & 21a + 729a + \ldots, & 21b \otimes 90a & = & 21b + 729b + \ldots, \\ 21c \otimes 90a & = & 21c + 729c + \ldots, & 21d \otimes 90a & = & 21d + 729d + \ldots. \end{array}$$

Man indiziert die Spalten jeweils durch Brauercharaktere folgenden Grades:

$$1, 21, 188, 708.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1a & 1 & . & . & . \\ 21a & . & 1 & . & . \\ 189a & 1 & . & 1 & . \\ 729a & . & 1 & . & 1 \\ 896a & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 1b & 1 & . & . & . \\ 21b & . & 1 & . & . \\ 189b & 1 & . & 1 & . \\ 729b & . & 1 & . & 1 \\ 896b & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1c & 1 & . & . & . \\ 21c & . & 1 & . & . \\ 189c & 1 & . & 1 & . \\ 729c & . & 1 & . & 1 \\ 896c & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 1d & 1 & . & . & . \\ 21d & . & 1 & . & . \\ 189d & 1 & . & 1 & . \\ 729d & . & 1 & . & 1 \\ 896d & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

3.4. Zerlegungszahlen für M_{23}

3.4.1. Bemerkung: Die Brauer-Bäume für die beiden Blöcke von zyklischem Defekt von M_{23} findet man in Hiss-Lux, Seite 104. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 231a, 896, 896^* \text{ und } 22, 231b.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & . & . & . \\ 231a & . & 1 & . & . \\ 896 & . & . & 1 & . \\ 896^* & . & . & . & 1 \\ 2024 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cc} 22 & 1 & . \\ 231b & . & 1 \\ 231b^* & . & 1 \\ 253 & 1 & 1 \end{array}$$

3.5. Zerlegungszahlen für $3^5{:}(2 \times M_{11})$

3.5.1. Bemerkung: Man erhält die Brauer-Bäume für die ersten beiden Blöcke von zyklischem Defekt für $3^5{:}(2 \times M_{11})$ direkt durch Inspektion. Durch Betrachtung des Tensorprodukts des gewöhnlichen Charakters $22a$ mit dem Defekt-0-Charakter $10a$ erhält man wegen $22a \otimes 10a = 22a + 198a$ sofort den Brauer-Baum des dritten Blocks. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 11a, 16a, 16a^* \text{ und } 1b, 11b, 16b, 16b^* \text{ und } 22a, 22b, 176a, 176b.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1a & 1 & . & . & . \\ 11a & . & 1 & . & . \\ 16a & . & . & 1 & . \\ 16a^* & . & . & . & 1 \\ 44a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 1b & 1 & . & . & . \\ 11b & . & 1 & . & . \\ 16b & . & . & 1 & . \\ 16b^* & . & . & . & 1 \\ 44b & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 22a & 1 & . & . & . \\ 22b & . & 1 & . & . \\ 198a & 1 & . & 1 & . \\ 198b & . & 1 & . & 1 \\ 352 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

3.6. Zerlegungszahlen für $2 \cdot S_6(2)$

3.6.1. Bemerkung: Man erhält den Brauer-Baum für $2{\cdot}S_6(2)$ für den fünften Block von zyklischem Defekt direkt durch Inspektion. Durch Betrachtung der zu den nichttrivialen Blöcken gehörenden Komponenten der folgenden Tensorprodukte von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren erhält man sofort die Brauer-Bäume der anderen Blöcke.

$$\begin{aligned} 105c \otimes 15a &= 7 + 56 + 189c + 378 + \ldots, \\ 315 \otimes 15a &= 21a + 168a + 189a + 378 + 2 \cdot 512a + \ldots, \\ 120b \otimes 15a &= 8 + 112b + \ldots, \\ 8 \otimes 210b &= 112b + 448 + \ldots. \end{aligned}$$

Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 56, 83, 133 \text{ und } 7, 27, 141, 377 \text{ und } 21a, 21b, 168a, 168b,$$

$$8, 104, 168c, 344 \text{ und } 48, 64.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & . & . & . \\ 56 & . & 1 & . & . \\ 84 & 1 & . & 1 & . \\ 189c & . & 1 & . & 1 \\ 216 & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 7 & 1 & . & . & . \\ 27 & . & 1 & . & . \\ 168a & . & 1 & 1 & . \\ 378 & 1 & . & . & 1 \\ 512a & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 21a & 1 & . & . & . \\ 21b & . & 1 & . & . \\ 189a & 1 & . & 1 & . \\ 189b & . & 1 & . & 1 \\ 336 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 8 & 1 & . & . & . \\ 112b & 1 & 1 & . & . \\ 168b & . & . & 1 & . \\ 448 & . & 1 & . & 1 \\ 512b & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cc} 48 & 1 & . \\ 64 & . & 1 \\ 64^* & . & 1 \\ 112a & 1 & 1 \end{array}$$

3.7. Brauercharaktere für $U_3(5)$ und verwandte Gruppen

3.7.1. Definition: **a)** Es sei $U := U_3(5)$ die projektive spezielle unitäre Gruppe über $\mathbb{F}_{25}^3$.
b) Es seien $z \in \mathbb{F}_{25}$ wie in Bemerkung 1.4.3. gegeben und

$$a := \begin{bmatrix} z^{13} & . & . \\ . & z^{12} & . \\ . & . & z^7 \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} z^{13} & z^{12} & 1 \\ z^{12} & z^{12} & . \\ 1 & . & . \end{bmatrix}, c := \begin{bmatrix} z^8 & . & . \\ . & z^8 & . \\ . & . & z^8 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{25}^{3\times 3}.$$

3.7.2. Bemerkung: Es ist $< a, b >= 3.U{:}3$ und $< c >= Z(3.U{:}3)$ als Gruppenerzeugnisse. Die Erzeuger sind der Bibliothek des Programmsystems GAP entnommen. Die oben angegebenen Matrizen definieren die natürliche treue Darstellung $3_{3.U:3}$ und die dazu duale Darstellung $3^*_{3.U:3}$ von $3.U{:}3$ über $\mathbb{F}_{25}$.

3.7.3. Definition: In $3.U{:}3$ seien

$$\begin{array}{rclrclrcl}
2A & := & a^{12}, & 3A & := & (a^3b^4a^6(a^3b^4)^3bc^2)^2, & 4A & := & a^6, \\
6A & := & a^3b^4a^6(a^3b^4)^3bc^2, & 7A & := & (ababb)^9, & 7B & := & (ababb)^{-9}, \\
8A & := & a^{-3}, & 8B & := & a^3, & 3B & := & a^{-8}, \\
9A & := & (ababb)^{-7}, & 6B & := & a^4, & 6C & := & (aab)^3abc, \\
12A & := & a^{-2}, & 63A & := & (ababb)^{-13}, & 63B & := & (ababb)^{-1}, \\
24A & := & a^7, & 24B & := & a. & & &
\end{array}$$

3.7.4. Bemerkung: Die oben angegebenen Elemente von $3.U{:}3$ sind ein Repräsentantensystem für die Konjugiertenklassen von Elementen mit nicht durch 5 dividierbarer Ordnung, was durch Bestimmung der Ordnungen der angegebenen Elemente und der Werte des zu $3_{3.U:3}$ gehörenden Brauercharakters leicht nachgeprüft werden kann. Durch die Wahlen $24B := a$ und $63B := (ababb)^{-1}$ werden alle Klassen durch Potenzbildung eindeutig festgelegt.

3.7.5. Definition: In $U{:}3 \cong 3.U{:}3/ < c >$ seien

$$\begin{array}{rclrcl}
2A & := & a^{12} < c >, & 3A & := & (a^3b^4a^6(a^3b^4)^3bc^2)^2 < c >, \\
4A & := & a^6 < c >, & 6A & := & a^3b^4a^6(a^3b^4)^3b < c >, \\
7A & := & (ababb)^9 < c >, & 7B & := & (ababb)^{-9} < c >, \\
8A & := & a^{-3} < c >, & 8B & := & a^3 < c >, \\
3B & := & a^{-8} < c >, & 3C & := & (ababb)^{-7} < c >, \\
6B & := & a^4 < c >, & 6C & := & (aab)^3ab < c >, \\
12A & := & a^{-2} < c >, & 21A & := & (ababb)^{-13} < c >, \\
21B & := & (ababb)^{-1} < c >, & 24A & := & a^7 < c >, \\
24B & := & a < c > . & & &
\end{array}$$

3.7.6. Bemerkung: Die oben angegebenen Elemente von $U{:}3$ sind ein Repräsentantensystem für die Konjugiertenklassen von Elementen mit nicht durch 5 dividierbarer Ordnung, da diese Elemente gerade die homomorphen Bilder der in Definition 3.7.3. genannten Elemente von $3.U{:}3$ unter dem kanonischen Epimorphismus sind.

3.7.7. Bemerkung: Nun werden die Isomorphietypen irreduzibler 5-modularer Darstellungen von $3.U{:}3$ als Konstituenten der nachfolgend angegebenen Tensorprodukte realisiert. Durch Abzählen erkennt man sofort, daß die nachfolgende Liste vollständig ist, wenn man beachtet, daß die angegebenen Darstellungen außerhalb von $3.U$ zwei Fortsetzungen besitzen. Außerdem hat man neben der trivialen Darstellung noch einen Defekt-0-Charakter vom Grad 125.

a) $3_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 3_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $6^*_{3.U:3}$. Dieser ist treu und man hat die duale Darstellung $6_{3.U:3}$.

b) $3_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 3^*_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $8_{U:3}$, der trivial auf $< c >$ einschränkt.

c) $6_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 3^*_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $10_{U:3}$. Dieser schränkt trivial auf $< c >$ ein. Der zugehörige Brauercharakter ist aber auf U nicht reellwertig, somit hat man die duale Darstellung $10^*_{U:3}$.

d) $6^*_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 6^*_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $15a_{3.U:3}$ und einen weiteren, dazu nichtisomorphen Konstituenten $15b_{3.U:3}$. Ferner hat man die dualen Darstellungen $15a^*_{3.U:3}$ und $15b^*_{3.U:3}$.

e) $3_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 15a_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $18^*_{3.U:3}$. Weiter hat man die duale Darstellung $18_{3.U:3}$.

f) $10_{U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 10_{U:3}$ enthält einen Konstituenten $19_{U:3}$ und einen Konstituenten $35^*_{U:3}$, dessen Brauercharakter auf U nicht reellwertig ist, somit hat man die duale Darstellung $35_{U:3}$.

g) $10_{U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 6^*_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $39^*_{3.U:3}$. Weiter hat man die duale Darstellung $39_{3.U:3}$.

h) $8_{U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 18^*_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $60^*_{3.U:3}$. Weiter hat man die duale Darstellung $60_{3.U:3}$.

i) $10_{U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 10^*_{U:3}$ enthält einen Konstituenten $63_{U:3}$.

j) $15a_{3.U:3} \otimes_{I\!F_{25}} 18_{3.U:3}$ enthält einen Konstituenten $90^*_{3.U:3}$. Weiter hat man die duale Darstellung $90_{3.U:3}$.

3.7.8. Definition: Es seien

$$
\begin{aligned}
HS := < a,b,c,d,e,f,g,h \| \quad & a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = g^2 = h^2 = \\
& (ab)^3 = (ac)^2 = (ad)^2 = (ae)^2 = (af)^2 = (ag)^2 = \\
& (bc)^3 = (bd)^2 = (be)^2 = (bf)^2 = (bg)^2 = \\
& (cd)^3 = (ce)^2 = (cf)^2 = (cg)^2 = \\
& (de)^3 = (df)^2 = (dg)^2 = (ef)^3 = (eg)^2 = (fg)^3 = \\
& (hf)^5 = (hgf)^5 = [dcbag, h] = cbabcbhehe = 1 >
\end{aligned}
$$

und $U{:}2 := < abcd, efh > < HS$ als Gruppenerzeugnis.

3.7.9. Bemerkung: Diese Präsentation für die einfache Higman-Sims-Gruppe entstammt der Bibliothek des Programmsystems Gap. Aus einer Nebenklassenabzählung von HS nach $U{:}2$ erhält man eine Permutationsdarstellung von HS vom Grad 176. Damit hat man durch Einschränken die Darstellung $176_{U:2}$ über $\mathbb{F}_5$ gegeben.

3.7.10. Definition: **a)** Es seien $s, t \in U{:}2$ die zwei Erzeuger von $U{:}2$ aus Definition 3.7.8.
b) In $U{:}2$ seien

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
2A & := & (st)^4, & 3A & := & (ststt)^2, & 4A & := & (st)^2, \\
6A & := & ((stt)^3t)^2, & 7AB & := & (st)^5t, & 8AB & := & stt, \\
2B & := & (ststt)^3, & 4B & := & ((stt)^3t)^3, & 6D & := & ststt, \\
8C & := & st, & 12B & := & (stt)^3t. & & &
\end{array}
$$

3.7.11. Bemerkung: Die oben angegebenen Elemente von $U{:}2$ sind ein Repräsentantensystem für die Konjugiertenklassen von Elementen mit nicht durch 5 dividierbarer Ordnung. Die hier gewählten Bezeichnungen sind konsistent mit denen in Definition 3.7.5.

3.7.12. Bemerkung: Nun realisiert man die Isomorphietypen irreduzibler 5-modularer Darstellungen von $U{:}2$ wie folgt. Ein Vergleich mit Bemerkung 3.7.7. zeigt die Vollständigkeit der nachfolgenden Liste.
a) $176_{U:2}$ enthält einen Konstituenten $8_{U:2}$, der auf U mit $8_{U:3}$ identisch ist, und einen Konstituenten $19_{U:2}$, der auf U mit $19_{U:3}$ identisch ist.
b) $8_{U:2} \otimes_{\mathbb{F}_5} 8_{U:2}$ enthält einen Konstituenten $20_{U:2}$, der auf U mit $10_{U:3} \oplus 10^*_{U:3}$ identisch ist.
c) $8_{U:2} \otimes_{\mathbb{F}_5} 19_{U:2}$ enthält einen Konstituenten $63_{U:2}$, der auf U mit $63_{U:3}$ identisch ist, und einen Konstituenten $70_{U:2}$, der auf U mit $35_{U:3} \oplus 35^*_{U:3}$ identisch ist.

3.7.13. Bemerkung: Unter Benutzung von Satz 1.2.5. und der Bemerkungen 1.4.3. und 1.4.5. erhält man die unten angegebene 5-modulare Charaktertafel, die im Format des Modularen Atlas die Brauercharaktere für $3.U{:}3$ und $U{:}2$ wiedergibt.

$U_3(5)$

$U_3(5)$ (mod 5)

	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	;	;	@	@	@	@	@	@	@	@	@	;	;	@	@	@	@	@	;	;	;	;	
		126000	240	36	8	12	7	7	8	8			240	21	240	12	8	7	7	8	8			120	120	6	4	6					
	p power		A	A	A	AA	A	A	A	A			A	A	BA	BA	BA	BC	AC	AA	AB			A	A	AB	A	AB					
	p' part		A	A	A	AA	A	A	A	A			A	A	BA	BA	BA	AC	BC	BA	BB			A	A	AB	A	AB					
	ind	1A	2A	3A	4A	6A	7A	B**	8A	B**	fus	ind	3B	3C	6B	6C	12A	21A	B*	24A	B*	fus	ind	2B	4B	6C	8B	12B	fus	ind	fus	ind	
φ1	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	:	+oo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	:	++	1	1	1	1	1	:	++	:	++	φ1
φ2	+	8	0	-1	0	3	1	1	2	2	:	+oo	2	-1	6	0	0	3-x21&5	*10	2-y"24&5	*13	:	++	2	-2	-1	0	1	:	++	:	++	φ2
φ3	o	10	-2	1	0	1	b7	**	-i2	i2	:	ooo	-2-i3	z3	-2+3i3	1	-i3	-2x21-&2+&5	*10	1+2z3+y"24-&5	*13		+	0	0	0	0	0		+		+	φ3
φ4	o	10	-2	1	0	1	**	b7	i2	-i2	:	ooo	-2+i3	z3**	-2-3i3	1	i3	x21-2&5-&10	*10	-1-2z3-y"24+&5	*13												φ4
φ5	+	19	3	1	-1	-3	-2	-2	-3	-3	:	+oo	-2	1	6	0	2	1	1	0	0	:	++	1	5	1	-1	-1	:	++	:	++	φ5
φ6	o	35	-1	-1	1	-1	0	0	-1+i2	-1-i2	:	ooo	-1+2i3	-z3**	-1-6i3	-1	1	3+x21-&2-3&5	*10	1-2z3-2y"24	*13		+	0	0	0	0	0		+		+	φ6
φ7	o	35	-1	-1	1	-1	0	0	-1-i2	-1+i2	:	ooo	-1-2i3	-z3	-1+6i3	-1	1	3-3x21+&5-&10	*10	3+2z3-2y"24*5	*13												φ7
φ8	+	63	-1	0	-1	-4	0	0	-1	-1	:	+oo	3	0	11	-1	-1	0	0	-1	-1	:	++	3	-5	0	-1	-2	:	++	:	++	φ8
φ9	+	125	5	-1	1	-1	-1	-1	1	1	:	+oo	5	-1	5	-1	1	-1	-1	1	1	:	++	5	5	-1	1	-1	:	++	:	++	φ9
	ind	1	2	3	4	6	7	7	8	8	fus	ind	3	9	6	6	12	63	63	24	24	fus	ind	2	4	6	8	12	fus	ind	fus	ind	
		3	6		12	6	21	21	24	24			3		6	6	12	63	63	24	24												
		3	6		12	6	21	21	24	24			3		6	6	12	63	63	24	24												
φ10	o2	3	-1	0	1	2	b7	**	-1+i2	-1-i2	:	ooo2	2+z3	0	-2+z3	-z3	z3	x'63	*40	-z3-y"24+&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ10
φ11	o2	6	2	0	0	2	-1	-1	i2	-i2	:	ooo2	i3	0	-4+i3	-1	-i3	x'63&19	*40	-1-2z3-y"24+&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ11
φ12	o2	15	-1	0	-1	2	1	1	-1	-1	:	ooo2	i3	0	2-5i3	-1	-1	x'63*10+2&16+&40	*40	3+2z3+y"24-2&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ12
φ13	o2	15	3	0	1	0	1	1	-1-i2	-1+i2	:	ooo2	3+i3	0	3-3i3	0	1+i3	x'63*4&10&16&40	*40	2z3+y"24-&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ13
φ14	o2	18	-2	0	0	-2	-b7	**	2-i2	2+i2	:	ooo2	-3z3**	0	7+3z3	z3**	1-z3	x'63*4&16&40&10&19	*40	1+z3+y"24-&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ14
φ15	o2	39	-1	0	-1	-4	-b7	**	1-2i2	1+2i2	:	ooo2	-1+z3	0	11+9z3	1+z3	1+z3	-x'63*16	*40	-1-z3-y"24+&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ15
φ16	o2	60	4	0	0	-2	**	-b7	0	0	:	ooo2	i3	0	-8+5i3	1	-i3	x'63+2&4+&10&19	*40	-3+y"24&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ16
φ17	o2	90	-2	0	0	-2	-1	-1	i2	-i2	:	ooo2	-3i3	0	4+5i3	1	-i3	x'63&19	*40	-1-2z3-y"24+&5	*13	*	+						*	+	*	+	φ17

3.8. Zerlegungszahlen für $U_3(5){:}S_3$

3.8.1. Bemerkung: Mit Bemerkung 3.7.13. erhält man direkt durch Inspektion die Zerlegungsmatrizen für U, $U{:}2$ und $U{:}3$ für den jeweils einzigen nichttrivialen Block, den Hauptblock.
a) U modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 10^*, 10, 19, 8, 63, 35, 35^*.$$

1	1	.	.	.	.	.	.	.
20	.	1	1	.	.	.	.	.
21	2	.	.	1	.	.	.	.
$28a$	1	.	.	1	1	.	.	.
$28b$	1	.	.	1	1	.	.	.
$28c$	1	.	.	1	1	.	.	.
84	1	1	1	.	.	1	.	.
105	.	.	.	1	2	.	1	1
$126a$	1	.	.	2	3	1	.	.
$126b$	.	1	1	.	1	1	1	.
$126b^*$	.	1	1	.	1	1	.	1
144	1	1	.	1	2	1	.	1
144^*	1	.	1	1	2	1	1	.

b) $U{:}2$ modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 20, 19a, 19b, 8a, 8b, 63a, 63b, 70.$$

$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$20a$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$20b$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$21a$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.
$21b$	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
$28a$	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.
$28b$	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.
56	1	1	.	1	1	1	1	.	.	.
$84a$	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.
$84b$	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.
$105a$	.	.	.	1	.	2	.	.	.	1
$105b$	.	.	.	.	1	.	2	.	.	1
$126a$	1	.	.	1	1	2	1	1	.	.
$126b$	.	1	.	1	1	1	2	.	1	.
252	.	.	2	.	.	1	1	1	1	1
288	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1

c) $U{:}3$ modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 1c, 10^*a, 10a, 10^*b, 10b, 10^*c, 10c, 19a, 19b, 19c,$$

$$8a, 8b, 8c, 63a, 63b, 63c, 35a, 35^*a, 35b, 35^*b, 35c, 35^*c.$$

$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1c$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20a$	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20b$	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20c$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21a$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21b$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21c$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
84	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$84'a$	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$84'b$	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$84'c$	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
$105a$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
$105b$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
$105c$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	1	1
$126'a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
$126'b$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$126'c$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
$126a$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
$126b$	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.
$126c$	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
126^*a	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.
126^*b	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
126^*c	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$144a$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
$144b$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
$144c$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.
144^*a	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
144^*b	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
144^*c	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.

3.8.2. Bemerkung: **a)** Durch Betrachtung der zugehörigen gewöhnlichen Charaktertafeln stellt man fest, daß die Untergruppenfusion von $U{:}2$ nach $U{:}S_3$ bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von $U{:}2$. Für die Berechnung von induzierten Brauercharakteren und projektiven Charakteren ist diese Wahlmöglichkeit irrelevant.
b) Analog stellt man fest, daß die Untergruppenfusion $U{:}3$ nach $U{:}S_3$ bis auf vier Möglichkeiten, die unter Tafelautomorphismen der gewöhnlichen Charaktertafel von $U{:}S_3$ ineinander übergehen, festgelegt ist. Man wählt eine dieser Fusionsabbildungen und definiert so unter Beachtung der Bemerkungen 3.7.4. und 3.7.6. die Klassen $21A/B$ und $24A/B$ von $U{:}S_3$.

3.8.3. Bemerkung: Durch Induzieren von projektiven Charakteren der Untergruppen $U{:}3$ und $U{:}2$ erhält man die folgende erste Basis für die von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren des einzigen nichttrivialen Blocks, des Hauptblocks, für $U{:}S_3$ erzeugte freie abelsche Gruppe von Klassenfunktionen als Hauptblockkomponenten der folgenden projektiven Charaktere, wie man durch Betrachtung der Skalarprodukte dieser Charaktere mit den gewöhnlichen Charakteren des Hauptblocks sofort nachprüft. Dabei wird ein projektiv-unzerlegbarer Charakter mit Φ bezeichnet und durch den zu ihm korrespondierenden irreduziblen Brauercharakter indiziert.

$$
\begin{array}{lcllcl}
\Psi_1^1 & := & (\Phi_{1a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_2^1 & := & (\Phi_{1b})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_3^1 & := & (\Phi_{1c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_4^1 & := & (\Phi_{10a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_5^1 & := & (\Phi_{10^*c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_6^1 & := & (\Phi_{10c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_7^1 & := & (\Phi_{19a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_8^1 & := & (\Phi_{19b})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_9^1 & := & (\Phi_{19c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_{10}^1 & := & (\Phi_{8b})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_{11}^1 & := & (\Phi_{8c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_{12}^1 & := & (\Phi_{8a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_{13}^1 & := & (\Phi_{63a})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_{14}^1 & := & (\Phi_{63b})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_{15}^1 & := & (\Phi_{63c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_{16}^1 & := & (\Phi_{35^*a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Psi_{17}^1 & := & (\Phi_{35^*c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Psi_{18}^1 & := & (\Phi_{35c})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots.
\end{array}
$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20a$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21a$	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21b$	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	2	2	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$84a$	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.
$84b$	1	2	1	.	.	.	1	2	1	2	1	1	.	.	.	.	.	.
$84'a$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
$84'b$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
168	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.
$105a$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.
$105b$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	2	.	2	.	.	.	1	.	.
210	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	2	.	.	.	.	.	1	1
$126a$	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.
$126b$	1	1	.	.	.	.	.	1	1	2	1	1	.	1	.	.	.	.
252	.	1	1	.	.	.	2	2	1	3	2	2	1	1	1	.	.	.
$252'a$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	2	1	1	1	1	.	.
$252'b$	.	.	.	2	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.	1	.
$252'c$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	.	1	1	1	.	.	1
$288a$	.	1	1	.	1	.	.	1	1	2	1	2	1	1	1	.	.	1
$288b$	2	1	.	1	.	.	.	1	1	2	2	.	1	1	.	.	1	.
$288c$	.	1	1	.	.	1	2	1	.	2	1	2	1	1	1	1	.	.
	.	.	u	u	u	u	.	.	u	.	u	.	.	.	u	u	u	u
Ω_1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	−2	.	.	.
Ω_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	2	1	.	.	.	.	.	.
Ω_3	.	.	.	.	.	.	1	−1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ω_4	2	−1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3.8.4. Bemerkung: Zunächst sind die aus den irreduziblen Brauercharakteren $1c$, $8c$, $10a$, $10c$, 10^*c, $19c$, $35c$, 35^*a, 35^*c und $63c$ von $U{:}3$ durch Induzieren gewonnenen Charaktere von $U{:}S_3$ irreduzibel, wie man sofort sieht. Damit folgt sofort unter Benutzung der Frobenius-Reziprozität, daß die Charaktere Ψ_3^1, Ψ_4^1, Ψ_5^1, Ψ_6^1, Ψ_9^1, Ψ_{11}^1, Ψ_{15}^1, Ψ_{16}^1, Ψ_{17}^1 und Ψ_{18}^1 projektiv-unzerlegbar sind. Diese sind in Bemerkung 3.8.3. mit dem Buchstaben u gekennzeichnet.

3.8.5. Bemerkung: In Bemerkung 3.8.3. ist die Darstellung der Hauptblockkomponenten der folgenden projektiven Charaktere in der dort angegebenen Basis wiedergegeben:

$$
\begin{array}{lcllcl}
\Omega_1 & := & (\Phi_{63a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Omega_2 & := & (\Phi_{8a})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, \\
\Omega_3 & := & (\Phi_{19a})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots, & \Omega_4 & := & (\Phi_{1a})_{U:2} \nearrow^{U:S_3} - \ldots.
\end{array}
$$

3.8.6. Bemerkung: Mit Bemerkung 3.8.5. erhält man die folgende zweite Basis. Hier sind nur diejenigen Basisvektoren explizit aufgeführt, die sich von den an gleicher Stelle stehenden der ersten Basis unterscheiden.

$$\begin{array}{rclrclrcl} \Psi_2^2 & := & \Psi_2^1 - \Psi_3^1, & \Psi_8^2 & := & \Psi_8^1 - \Psi_9^1, & \Psi_{10}^2 & := & \Psi_{11}^1, \\ \Psi_{11}^2 & := & \Psi_{12}^1, & \Psi_{12}^2 & := & \Psi_{10}^1 - \Psi_{11}^1, & \Psi_{13}^2 & := & \Psi_{13}^1 - \Psi_{15}^1, \\ \Psi_{14}^2 & := & \Psi_{14}^1 - \Psi_{15}^1. & & & & & & \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20a$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21a$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21b$	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	2	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$84a$	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$84b$	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.
$84'a$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
$84'b$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
168	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
$105a$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	1	.	.
$105b$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	2	2	.	.	.	1	.	.
210	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	1	1
$126a$	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.
$126b$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.
252	.	.	1	.	.	.	2	1	1	2	2	1	.	.	1	.	.	.
$252'a$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	2	1	.	.	1	1	.	.
$252'b$	.	.	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.
$252'c$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1
$288a$	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	2	1	.	.	1	.	.	1
$288b$	2	1	.	1	.	.	.	.	1	2	.	.	1	1	.	.	1	.
$288c$	.	.	1	.	.	1	2	1	.	1	2	1	.	.	1	1	.	.
	.	u	u	u	u	u	.	u	u	u	.	u	u	u	u	u	u	u
Ω_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	−1	.	.	.	.	.	.
Ω_3	.	.	.	.	.	.	1	−1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ω_4	1	−1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3.8.7. Bemerkung: Die einzigen irreduziblen Brauercharaktere von $U{:}S_3$, die auf $U{:}2$ eingeschränkt den Konstituenten $8b$ haben können, sind die mittels Clifford-Theorie durch Fortsetzen von $8a$ respektive Induzieren von $8b$ von $U{:}3$ nach $U{:}S_3$ gewonnenen Brauercharaktere $8a, 8b, 16$ von $U{:}S_3$. Man rechnet sofort nach, daß $(8a)_{U:2} = 8a$, $(8b)_{U:2} = 8b$ und $(16)_{U:2} = 8a + 8b$ gilt. Mit der Frobenius-Reziprozität hat also $(\Phi_{8b})_{U:2} \nearrow^{U:S_3}$ zwei projektiv-unzerlegbare Summanden. Somit ist Ψ_{12}^2 projektiv-unzerlegbar. Analog schließt man für die irreduziblen Brauercharaktere $1b$, $19b$, $63a$ und $63b$ von $U{:}2$ und erhält die projektive Unzerlegbarkeit der Charaktere Ψ_2^2, Ψ_8^2, Ψ_{13}^2 respektive Ψ_{14}^2.

3.8.8. Bemerkung: Damit erhält man die folgende dritte Basis und damit die Zerlegungsmatrix.

$$\Psi_1^3 \;:=\; \Psi_1^2 - \Psi_2^2, \quad \Psi_7^3 \;:=\; \Psi_7^2 - \Psi_8^2, \quad \Psi_{11}^3 \;:=\; \Psi_{11}^2 - \Psi_{12}^2.$$

Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 2, 20a, 20b, 20c, 19a, 19b, 38, 16, 8a, 8b, 63a, 63b, 126, 70a, 70b, 70c.$$

$1a$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1b$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20a$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$20b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21a$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$21b$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$84a$	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
$84b$	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.
$84'a$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
$84'b$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
168	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
$105a$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	1	.	.
$105b$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.
210	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	1	1
$126a$	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.
$126b$	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.
252	.	.	1	.	.	.	1	1	1	2	1	1	.	.	1	.	.	.
$252'a$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.
$252'b$	.	.	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.
$252'c$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1
$288a$	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	.	.	1	.	.	1
$288b$	1	1	.	1	.	.	.	.	1	2	.	.	1	1	.	.	1	.
$288c$	.	.	1	.	.	1	1	1	.	1	1	1	.	.	1	1	.	.

3.8.9. Bemerkung: Da der irreduzible Brauercharakter $8a$ von $U{:}3$ nach $U{:}S_3$ fortsetzt, hat $(\Phi_{8a})_{U:3} \nearrow^{U:S_3}$ zwei projektiv-unzerlegbare Summanden. Analog schließt man für die Brauercharaktere $1a$ und $19a$ respektive für die ihnen zugeordneten projektiven Charaktere von $U{:}3$. Damit sind die Charaktere Ψ^3_{11}, Ψ^3_1 und Ψ^3_7 projektiv-unzerlegbar.

3.9. Zerlegungszahlen für $3^{1+4}_+{:}4S_6$

3.9.1. Bemerkung: Man erhält die Brauer-Bäume für $3^{1+4}_+{:}4S_6$ für den dritten und fünften Block von zyklischem Defekt direkt durch Inspektion. Durch Betrachtung der zu den nichttrivialen Blöcken gehörenden Komponenten der folgenden Tensorprodukte von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren erhält man sofort die Brauer-Bäume der anderen Blöcke.

$$\begin{aligned} 5a \otimes 5a &= 1a + 9d + \ldots, \\ 5b \otimes 5a &= 1c + 9a + \ldots, \\ 90b \otimes 5a &= 18a + 162b + \ldots. \end{aligned}$$

Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 8b, 8d \text{ und } 1c, 1d, 8a, 8c \text{ und } 8e, 8f,$$

$$18a, 18b, 144a, 144b \text{ und } 72a, 72b, 72c, 72c^*.$$

$1a$	1	.	.	.
$1b$	.	1	.	.
$9b$	.	1	1	.
$9d$	1	.	.	1
$16a$	.	.	1	1

und

$1c$	1	.	.	.
$1d$	.	1	.	.
$9a$	1	.	1	.
$9c$	.	1	.	1
$16c$	.	.	1	1

und

$8a$	1	.
$8b$	.	1
$16b$	1	1
$16b^*$	1	1

$18a$	1	.	.	.		$72a$	1	.	.	.
$18b$	.	1	.	.		$72b$	.	1	.	.
$162a$	.	1	1	.	und	$72c$	.	.	1	.
$162b$	1	.	.	1		$72c^*$	.	.	.	1
$288b$	.	.	1	1		$288a$	1	1	1	1

3.10. Zerlegungszahlen für $2^4 \cdot A_8$

3.10.1. Bemerkung: Man erhält den Brauer-Baum für $2^4 \cdot A_8$ für den zweiten Block von zyklischem Defekt direkt durch Inspektion. Durch Betrachtung der zu den nichttrivialen Blöcken gehörenden Komponenten der folgenden Tensorprodukte von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren erhält man sofort den Brauer-Baum des ersten Blocks.

$$15 \otimes 15 \quad = \quad 1 + 14 + \ldots, \quad 18 \otimes 15 \quad = \quad 14 + 56 + \ldots.$$

Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 13, 21a, 43 \text{ und } 7, 21b.$$

1	1	.	.	.		7	1	.
14	1	1	.	.		$21b$	.	1
$21a$	.	.	1	.	und	$21b^*$	.	1
56	.	1	.	1		28	1	1
64	.	.	1	1				

3.11. Zerlegungszahlen für $L_3(4){:}D_{12}$

3.11.1. Bemerkung: Man erhält die Brauer-Bäume für $L_3(4){:}D_{12}$ für die ersten beiden Blöcke von zyklischem Defekt durch Betrachtung der zu den nichttrivialen Blöcken gehörenden Komponenten der folgenden Tensorprodukte von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren. Dann betrachtet man noch das Tensorprodukt von $2b$ mit dem projektiv-unzerlegbaren Charakter $1a + 64a$ des ersten Blockes. Daraus erhält man den Brauer-Baum des dritten Blockes.

$$\begin{aligned} 20a \otimes 20a &= 1a + 126b + 64a + 64c + \ldots, \\ 20b \otimes 20a &= 1b + 126a + 64b + 64d + \ldots, \\ 2b \otimes (1a + 64a) &= 2b + 128b. \end{aligned}$$

Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1d, 63a, 63d \text{ und } 1b, 1c, 63b, 63c \text{ und } 2a, 2b, 126a, 126b.$$

$1a$	1	.	.	.		$1b$	1	.	.	.		$2a$	1	.	.	.
$1d$	.	1	.	.		$1c$	.	1	.	.		$2b$	.	1	.	.
$126a$	.	.	1	1	und	$126b$	.	.	1	1	und	252	.	.	1	1
$64a$	1	.	1	.		$64b$	1	.	1	.		$128a$	1	.	1	.
$64d$	.	1	.	1		$64c$	.	1	.	1		$128b$	.	1	.	1

3.12. Zerlegungszahlen für $2 \times M_{12}$

3.12.1. Bemerkung: Es existieren vier Blöcke von zyklischem Defekt für $2 \times M_{12}$. Die Brauer-Bäume für den zweiten und vierten Block erhält man direkt durch Inspektion. Nun erhält man weiter die Brauercharaktere von $2 \times M_{12}$ als Tensorprodukte der Brauercharaktere von M_{12} mit den gewöhnlichen Charakteren von C_2. In Hiss-Lux, Seite 66, findet man den Brauer-Baum für den Hauptblock für die Schursche Erweiterung $2M_{12}$. Daraus erhält man sofort die Brauer-Bäume für den ersten und dritten Block.
a) $2M_{12}$ modulo 5, Hauptblock. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1, 66, 98, 78.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & . & . & . \\ 66 & . & 1 & . & . \\ 99 & 1 & . & 1 & . \\ 144 & . & 1 & . & 1 \\ 176 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

b) $2 \times M_{12}$ modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 66a, 98a, 78a \text{ und } 11a, 11b, 16a, 16a^*,$$

$$1b, 66b, 98b, 78b \text{ und } 11c, 11d, 16b, 16b^*.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1a & 1 & . & . & . \\ 66a & . & 1 & . & . \\ 99a & 1 & . & 1 & . \\ 144a & . & 1 & . & 1 \\ 176a & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 11a & 1 & . & . & . \\ 11b & . & 1 & . & . \\ 16a & . & . & 1 & . \\ 16a^* & . & . & . & 1 \\ 54a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1b & 1 & . & . & . \\ 66b & . & 1 & . & . \\ 99b & 1 & . & 1 & . \\ 144b & . & 1 & . & 1 \\ 176b & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 11c & 1 & . & . & . \\ 11d & . & 1 & . & . \\ 16b & . & . & 1 & . \\ 16b^* & . & . & . & 1 \\ 54b & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3.13. Zerlegungszahlen für $2^2.[2^7.3^2].S_3$ und $S_3 \times L_2(8){:}3$

3.13.1. Bemerkung: Es ist 5 kein Teiler der Gruppenordnung $|2^2.[2^7.3^2].S_3|$. Also existieren nur triviale Blöcke.

3.13.2. Bemerkung: Es ist 5 kein Teiler der Gruppenordnung $|S_3 \times L_2(8){:}3|$. Also existieren nur triviale Blöcke.

3.14. Zerlegungszahlen für $A_4 \times S_5$

3.14.1. Bemerkung: Es existieren vier Blöcke von zyklischem Defekt für $A_4 \times S_5$. Zunächst betrachtet man den einzigen nichttrivialen Block, den Hauptblock, für S_5. Wegen $1_{S_4} \nearrow^{S_5} = 1a + 4a$ erhält man sofort den Brauer-Baum für S_5. Da sich die Brauercharaktere für $A_4 \times S_5$ als Tensorprodukte der Brauercharaktere für S_5 mit den gewöhnlichen Chartakteren für A_4 ergeben, erhält man daraus sofort die Brauer-Bäume für $A_4 \times S_5$.
a) S_5 modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 3a, 3b.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1a & 1 & . & . & . \\ 1b & . & 1 & . & . \\ 4a & 1 & . & 1 & . \\ 4b & . & 1 & . & 1 \\ 6 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

b) $A_4 \times S_5$ modulo 5. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$1a, 1b, 3a, 3b \text{ und } 1c, 1d, 3c, 3d,$$

$$1e, 1f, 3e, 3f \text{ und } 3g, 3h, 9a, 9b.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1a & 1 & . & . & . \\ 1b & . & 1 & . & . \\ 4a & 1 & . & 1 & . \\ 4b & . & 1 & . & 1 \\ 6a & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 1c & 1 & . & . & . \\ 1d & . & 1 & . & . \\ 4c & 1 & . & 1 & . \\ 4d & . & 1 & . & 1 \\ 6b & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 1e & 1 & . & . & . \\ 1f & . & 1 & . & . \\ 4e & 1 & . & 1 & . \\ 4f & . & 1 & . & 1 \\ 6c & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 3a & 1 & . & . & . \\ 3b & . & 1 & . & . \\ 12a & 1 & . & 1 & . \\ 12b & . & 1 & . & 1 \\ 18 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

4. 5-modulare Zerlegungszahlen für Co_3

In diesem und im nächsten Kapitel sind meine Ergebnisse über 5-modulare Zerlegungszahlen für den Hauptblock von Co_3 wiedergegeben. Am Beginn der von mir durchgeführten Rechnungen steht die Berechnung von Brauercharakteren und projektiven Charakteren durch charaktertheoretische Operationen unter Verwendung von Charakteren von Unter- und Obergruppen. In diesem Kapitel werden daher sukzessive die in Kapitel 3. angegebenen Informationen verarbeitet. Dazu habe ich Programmsystem Moc benutzt.

In Abschnitt 4.1. werden die Untergruppenfusionen der im Atlas angegebenen maximalen Untergruppen nach Co_3 festgelegt. Die hierzu nötigen Rechnungen habe ich mit dem Subsystem Casper des Systems Gap durchgeführt. Dabei habe ich von zur Zeit noch unveröffentlichten Programmen zur Berechnung möglicher Fusionsabbildungen und Tafelautomorphismen, die mir von T. Breuer zur Verfügung gestellt wurden, Gebrauch gemacht. Hierzu vergleiche man auch die Originalarbeit von T. Breuer. In der Tat sind die in diesem Abschnitt wiedergegebenen Rechnungen selber so monoton wie ihre Niederschrift.

In Abschnitt 4.2. werden einige Zerlegungszahlen für Co_1 zitiert. Daraus erhält man projektive Charaktere von Co_3 via Einschränkung. In Abschnitt 4.3. werden aus dem Grunde der Vollständigkeit die Zerlegungszahlen für den Block von zyklischem Defekt von Co_3 angegeben.

In Abschnitt 4.4. sind die von mir mit den Systemen Moc und Cas durchgeführten Rechnungen wiedergegeben, dabei werden die in Kapitel 3. schon erfolgreich benutzten Schreibweisen weiterverwendet. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf das dortige Vorwort verwiesen. Die hier wiedergegebenen Rechnungen lassen deutlich ihren Ursprung in den Algorithmen des Systems Moc erkennen. Obwohl ich versucht habe, die daraus entstandenen Beweisschritte lokal zu optimieren, ist der Beweisgang möglicherweise global nicht ökonomisch bestmöglich. Zunächst gewinnt man durch Tensorieren, Induzieren und Einschränken sukzessive verbesserte Basen für die von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren des Hauptblocks erzeugte freie abelsche Gruppe von Klassenfunktionen.

In Abschnitt 4.5. beginnt die Analyse der vorher in gewisser Weise automatisch gewonnenen Ergebnisse. Hier werden weiterhin Methoden der Charaktertheorie angewendet. Insbesondere erlaubt die Gestalt der Präzerlegungsmatrix, sie ist unitriangulär, oder auf Neudeutsch 'Wedge Shape', erst einige Schlußweisen. Die Bedeutung dieser Begriffsbildung für das praktische Rechnen ist im Gegensatz zu ihrer theoretischen Bedeutung in der Literatur bisher wohl nur wenig dokumentiert. In diesem Abschnitt wird die Verwaltung der akkumulierten Ergebnisse weiterhin dem System Moc übertragen und in gewohnter Weise wiedergegeben. Wird ein Eintrag in der Präzerlegungsmatrix als Zerlegungszahl erkannt, so wird er hinfort in der Wiedergebe unterstrichen.

4.1. Untergruppenfusionen der maximalen Untergruppen

4.1.1. Bemerkung: **a)** Ist V ein irreduzibler KG-Modul oder ein irreduzibler FG-Modul, so ist V^* ebenfalls irreduzibel. Ist V ein projektiv-unzerlegbarer FG-Modul, so ist V^* ebenfalls projektiv-unzerlegbar. Also sind die Menge der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere, die Menge der irreduziblen Brauercharaktere und die Menge der projektiv-unzerlegbaren Charaktere von G invariant unter komplexer Konjugation. Ist φ der zu V gehörende gewöhnliche beziehungsweise Brauercharakter, so gilt $\varphi^*(g) = \varphi(g^{-1})$. In diesem Sinne bewirkt die komplexe Konjugation eine Permutation der Klassen von G.
b) Sind V ein ΛG-Modul und $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, so ist auch $\varrho\alpha : G \to \mathrm{End}_\Lambda(V) : g \mapsto (g\alpha^{-1})\varrho$ eine Darstellung. Also operiert $\mathrm{Aut}(G)$ auf der Menge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere, auf der Menge der irreduziblen Brauercharaktere und auf der Menge der projektiv-unzerlegbaren Charaktere von G.

4.1.2. Bemerkung: Durch Betrachtung der zugehörigen gewöhnlichen Charaktertafeln stellt man fest, daß die Untergruppenfusion von $McL{:}2$ nach Co_3 bis auf vier Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $22A/B$ und damit gekoppelt für die Klassen $11A/B$ von $McL{:}2$ und einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von $McL{:}2$. Letztere ist für die Berechnung von induzierten Brauercharakteren und projektiven Charakteren irrelevant. Da die Klassen $24A/B$ von $McL{:}2$ in die Klasse $24A$ von Co_3 fusionieren, kann die Vertauschung der Klassen $22A$ mit $22B$ und $24A$ mit $24B$ als die Wirkung der komplexen Konjugation auf dem Hauptblock interpretiert werden.

4.1.3. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von HS nach Co_3 bis auf acht Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $11A/B$, einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $8B/C$ und einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von HS. Die Vertauschung der Klasse $11A$ mit $11B$ kann als die Wirkung der komplexen Konjugation auf dem Hauptblock interpretiert werden. Die Vertauschung der Klasse $8A$ mit $8B$ und $11A$ mit $11B$ ist die Wirkung des äußeren Automorphismus von HS.

4.1.4. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten, die unter dem einzigen Tafelautomorphismus der gewöhnlichen Charaktertafel von $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ ineinander übergehen, festgelegt ist. Da der von $U_4(3){:}D_8$ auf $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ bewirkte äußere Automorphismus nichttrivial auf den Klassen von $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ operiert, kann diese Wahlmöglichkeit damit interpretiert werden.

4.1.5. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von M_{23} nach Co_3 bis auf vier Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $11A/B$ und einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $23A/B$ von M_{23}. Komplexe Konjugation läßt die beiden nichttrivialen Blöcke invariant und permutiert die Defekt-0-Charaktere von M_{23}. Daher läßt sich die Vertauschung der Klasse $11A$ mit $11B$ als die Wirkung der komplexen Konjugation auf dem Hauptblock interpretieren. Die Vertauschung der Klasse $23A$ mit $23B$ kann man als die Wirkung der komplexen Konjugtion auf den Defekt-0-Charakteren 770 und 770^* interpretieren.

4.1.6. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $3^5{:}(2 \times M_{11})$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $22A/B$ und damit gekoppelt für die Klassen $11A/B$ von $3^5{:}(2 \times M_{11})$. Da die Fusion der Klassen $8A$, $8B$, $8C$, $8D$, $24A$ und $24D$ von $3^5{:}2 \times M_{11}$ nach Co_3 festgelegt sind, kann die Vertauschung der Klassen $22A$ mit $22B$ und $11A$ mit $11B$ als Wirkung der komplexen Konjugation interpretiert werden.

4.1.7. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $2 \cdot S_6(2)$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von $2 \cdot S_6(2)$.

4.1.8. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $U_3(5){:}S_3$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von $U_3(5){:}S_3$. Insbesondere sind die Fusionen der Klassen $21A/B$ und $24A/B$ von $U_3(5){:}S_3$ nach Co_3 eindeutig bestimmt. Man beachte Bemerkung 3.7.15.

4.1.9. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $3^{1+4}{:}4S_6$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $20A/B$ von $3^{1+4}{:}4S_6$.

4.1.10. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusionen von $2^4 \cdot A_8$ und von $L_3(4){:}D_{12}$ nach Co_3 eindeutig festgelegt sind.

4.1.11. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $2 \times M_{12}$ nach Co_3 bis auf vier Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $22A/B$ und damit gekoppelt für die Klassen $11A/B$ von $2 \times M_{12}$ und einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $8A/B$ und damit gekoppelt für die Klassen $8C/D$ und $4C/D$ von $2 \times M_{12}$. Die Vertauschung der Klassen $22A$ mit $22B$ und $11A$ mit $11B$ kann man als die Wirkung der komplexen Konjugation interpretieren. Da die Klassen $4A/B$ von $2 \times M_{12}$ in die Klasse $4B$ von Co_3 fusionieren, kann man die Vertauschung der Klassen $22A$ mit $22B$, $11A$ mit $11B$, $8A$ mit $8B$, $8C$ mit $8D$, $4C$ mit $4D$ und $4A$ mit $4B$ als Wirkung des äußeren Automorphismus von $2 \times M_{12}$ interpretieren.

4.1.12. Bemerkung: Man stellt fest, daß die Untergruppenfusionen von $2^2.[2^7.3^2].S_3$, von $S_3 \times L_2(8){:}3$ und von $A_4 \times S_5$ nach Co_3 eindeutig festgelegt sind.

4.2. Blöcke von zyklischem Defekt für Co_1

4.2.1. Bemerkung: **a)** Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von Co_3 nach Co_1 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $23A/B$ von Co_1. Diese Wahlmöglichkeit kann man als Wirkung der komplexen Konjugation interpretieren.
b) Insbesondere findet man, daß die Klasse $5A$ von Co_1 mit der Untergruppe Co_3 leeren Schnitt besitzt, während das für die Klasse $5B$ nicht gilt.

4.2.2. Bemerkung: Die Brauer-Bäume für Co_1 für die fünf Blöcke von zyklischem Defekt findet man in Hiss-Lux, Seite 304-6. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$17250, 66602250, 175139250, 326939250 \text{ und } 94875, 21528000, 205300875, 278182125,$$

$$483000, 21049875, 77219625, 142428375 \text{ und } 822250, 1771000, 24129875, 183361750,$$

$$2877875, 5494125, 19299875, 41135500.$$

$$\begin{array}{r|cccc} 17250 & 1 & . & . & . \\ 66602250 & . & 1 & . & . \\ 241741500 & . & 1 & 1 & . \\ 326956500 & 1 & . & . & 1 \\ 502078500 & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 94875 & 1 & . & . & . \\ 21528000 & . & 1 & . & . \\ 205395750 & 1 & . & 1 & . \\ 299710125 & . & 1 & . & 1 \\ 483483000 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 483000 & 1 & . & . & . \\ 21049875 & . & 1 & . & . \\ 77702625 & 1 & . & 1 & . \\ 163478250 & . & 1 & . & 1 \\ 219648000 & . & . & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r|cccc} 822250 & 1 & . & . & . \\ 1771000 & . & 1 & . & . \\ 25900875 & . & 1 & 1 & . \\ 184184000 & 1 & . & . & 1 \\ 207491625 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} 2877875 & 1 & . & . & . \\ 5494125 & . & 1 & . & . \\ 24794000 & . & 1 & 1 & . \\ 44013375 & 1 & . & . & 1 \\ 60435375 & . & . & 1 & 1 \end{array}$$

4.2.3. Bemerkung: Es seien $B \trianglelefteq FG$ ein Block mit Blockdefektgruppe $D \leq G$ und V ein in B liegender FG-Modul. V ist dann D-projektiv, also existiert ein FD-Modul U, so daß V ein FG-direkter Summand von $U_D \nearrow^G$ ist. Nun seien $H \leq G$ eine Untergruppe und $\Delta \subseteq G$ ein D-H-Doppelnebenklassenrepräsentantensystem. Dann gilt

$$(U_D \nearrow^G)_H \cong \oplus_{g \in \Delta} (U^g_{D^g \cap H}) \nearrow^H$$

als FH-Moduln. Ist also $D^g \cap H = \{1\}$ für alle $g \in G$, so ist V_H als FH-Modul projektiv.

4.2.4. Bemerkung: **a)** Alle Klassen von Co_1 mit Elementen der Ordnung 5 sind rational. Unter Benutzung des zweiten Hauptsatzes über Blöcke von Brauer findet man sofort, daß die Erzeuger der Defektgruppen für die Blöcke von Co_1 mit zyklischem Defekt in den im ATLAS folgendermaßen bezeichneten Klassen liegen: $5B$, $5A$, $5A$, $5A$ respektive $5B$.
b) Mit Bemerkung 4.2.1.b) erhält man projektive Charaktere von Co_3 durch Einschränken der Defekt-0-Charaktere von Co_1, durch Einschränken der projektiv-unzerlegbaren Charaktere des ersten und fünften Blocks für Co_1 von zyklischem Defekt und durch Einschränken der gewöhnlichen, im zweiten, dritten oder vierten Block für Co_1 liegenden Charaktere.

4.3. Zerlegungszahlen für den Block von zyklischem Defekt

4.3.1. Bemerkung: Den Brauer-Baum für den Block von zyklischem Defekt von Co_3 findet man in HISS-LUX, Seite 203. Man indiziert die Spalten durch die folgenden Brauercharaktere:

$$275, 4025, 73325, 173075.$$

275	1	.	.	.
4025	.	1	.	.
73600	1	.	1	.
177100	.	1	.	1
246400	.	.	1	1

4.4. Zerlegungszahlen für den Hauptblock I

4.4.1. Bemerkung: **a)** Man erhält projektive Charaktere von Co_3 als Tensorprodukte der Defekt-0-Charaktere 9625 und 9625* mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3. Man wählt diejenigen aus, die mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3 Skalarprodukte kleiner als 1000 haben.
b) Man induziert die irreduziblen Brauercharaktere und die projektiv-unzerlegbaren Charaktere der in den Abschnitten 3.1. bis 3.4. angegebenen maximalen Untergruppen von Co_3 nach Co_3. Die jeweiligen Untergruppenfusionen wurden in Abschnitt 4.1. betrachtet.

4.4.2. Bemerkung: Damit erhält man die folgende erste Basis für die von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren des Hauptblocks erzeugte freie abelsche Gruppe von Klassenfunktionen als Hauptblockkomponenten der folgenden projektiven Charaktere, wie man durch Betrachtung der Skalarprodukte dieser Charaktere mit den gewöhnlichen Charakteren des Hauptblocks sofort nachprüft. Es werden die Schreibweisen aus Bemerkung 3.8.3. analog weiterverwendet.

$$\begin{array}{rcllrcl}
\Psi_1^1 & := & (\Phi_{1a})_{U_4(3):(2^2)_{133}} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_2^1 & := & (\Phi_{1c})_{U_4(3):(2^2)_{133}} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_3^1 & := & (\Phi_{230b})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_4^1 & := & (\Phi_{1b})_{U_4(3):(2^2)_{133}} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_5^1 & := & (\Phi_{896a})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_6^1 & := & (\Phi_{896^*a})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_7^1 & := & (210d)_{U_4(3):(2^2)_{133}} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_8^1 & := & (1750a)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_9^1 & := & (2750)_{HS} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_{10}^1 & := & (\Phi_{230a})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_{11}^1 & := & (\Phi_{896^*b})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_{12}^1 & := & (\Phi_{6490})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_{13}^1 & := & 9625 \otimes 896 - \ldots, & & \Psi_{14}^1 & := & (4500b)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\
\Psi_{15}^1 & := & (16500)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Psi_{16}^1 & := & 9625 \otimes 275 - \ldots, \\
\Psi_{17}^1 & := & 9625 \otimes 253a - \ldots, & & \Psi_{18}^1 & := & (4500a)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots.
\end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253a$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896*	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1771	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2024	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5544	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
7084	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8855	2	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
20608	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
20608*	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.
26082	.	1	.	1	1	1	.	.	3	.	2	1	1	1	.	.	.	.
31878	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	1	.	.
57960	2	1	1	.	3	3	3	1	2	.	2	.	1	.	1	.	1	.
80960	1	1	.	2	5	5	2	.	9	.	5	1	2	.	1	.	.	.
93312	.	2	1	2	4	4	1	.	6	.	6	2	2	.	1	1	.	.
$129536a$	2	2	2	1	5	5	2	1	5	1	5	2	2	.	2	1	1	.
$129536b$	2	2	.	3	8	8	3	.	12	.	8	3	2	.	1	.	.	.
184437	2	3	1	3	8	8	2	.	9	1	9	3	4	.	2	2	1	1
226688	2	4	1	4	11	11	3	.	14	.	14	4	6	1	2	2	1	1
249480	3	4	1	4	14	14	4	.	19	.	15	6	4	1	2	.	1	.
255024	3	3	1	3	13	13	5	.	18	.	13	5	4	.	3	1	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	u	.	.	.	.
Ω_1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-2	-2	1	3	-3

4.4.3. Bemerkung: Der Charakter Ψ^1_{14} ist projektiv-unzerlegbar. Dazu betrachtet man nur die Charaktergrade aller Subsummen.

4.4.4. Bemerkung: In Bemerkung 4.4.2. ist die Darstellung der Hauptblockkomponente des folgenden projektiven Charakters in der dort angegebenen Basis wiedergegeben:

$$\Omega_1 \quad := \quad (\Phi_{3038b})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots .$$

4.4.5. Bemerkung: Mit Bemerkung 4.3.4. erhält man die folgende zweite Basis als:

$$\Psi^2_{12} \quad := \quad \Psi^1_{12} - \Psi^1_{14}, \quad \Psi^2_{13} \quad := \quad \Psi^1_{14}, \quad \Psi^2_{14} \quad := \quad \Psi^1_{13} - \Psi^1_{14}.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253a$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896^*	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1771	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2024	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520^*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5544	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
7084	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8855	2	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
20608	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
20608^*	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.
26082	.	1	.	1	1	1	.	.	3	.	2	.	1	.	.	.	.	.
31878	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	1	.	.
57960	2	1	1	.	3	3	3	1	2	.	2	.	.	1	1	.	1	.
80960	1	1	.	2	5	5	2	.	9	.	5	1	.	2	1	.	.	.
93312	.	2	1	2	4	4	1	.	6	.	6	2	.	2	1	1	.	.
$129536a$	2	2	2	1	5	5	2	1	5	1	5	2	.	2	2	1	1	.
$129536b$	2	2	.	3	8	8	3	.	12	.	8	3	.	2	1	.	.	.
184437	2	3	1	3	8	8	2	.	9	1	9	3	.	4	2	2	1	1
226688	2	4	1	4	11	11	3	.	14	.	14	3	1	5	2	2	1	1
249480	3	4	1	4	14	14	4	.	19	.	15	5	1	3	2	.	1	.
255024	3	3	1	3	13	13	5	.	18	.	13	5	.	4	3	1	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	u	.	.	.	.	.
Ω_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	3	4	6	-5	-1	3	-6

4.4.6. Bemerkung: **a)** In Bemerkung 4.4.5. ist die Darstellung der Hauptblockkomponente des folgenden projektiven Charakters in der dort angegebenen Basis wiedergegeben:

$$\Omega_2 \quad := \quad (\Phi_{896b})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots .$$

b) Damit erkennt man den folgenden Charakter als projektiv:

$$\Omega_3 \quad := \quad \Psi_{11}^2 - 2 \cdot \Psi_{13}^2.$$

4.4.7. Bemerkung: **a)** Man erhält projektive Charaktere von Co_3 als Tensorprodukte der Defekt-0-Charaktere 23000, $31625a$, $31625b$ und $31625c$ mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3. Man wählt diejenigen aus, die mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3 Skalarprodukte kleiner als 1000 haben.
b) Man induziert die irreduziblen Brauercharaktere und die projektiv-unzerlegbaren Charaktere der in den Abschnitten 3.5., 3.6., 3.8. und 3.9. angegebenen maximalen Untergruppen von Co_3 nach Co_3. Die jeweiligen Untergruppenfusionen wurden in Abschnitt 4.1. betrachtet.

4.4.8. Bemerkung: Damit erhält man die folgende dritte Basis, wie man analog zu Bemerkung 4.4.2. feststellt:

$$
\begin{array}{rclrcl}
\Psi_1^3 & := & (\Phi_{1a})_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, & \Psi_2^3 & := & (5d)_{3_+^{1+4}:4S_6} \nearrow^{Co_3}, \\
\Psi_3^3 & := & (10c)_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, & \Psi_5^3 & := & (\Phi_{16a})_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, \\
\Psi_6^3 & := & (\Phi_{16a^*})_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, & \Psi_7^3 & := & 31625c \otimes 23, \\
\Psi_9^3 & := & (\Phi_{8f})_{3_+^{1+4}:4S_6} \nearrow^{Co_3}, & \Psi_{11}^3 & := & \Psi_{12}^2, \\
\Psi_{12}^3 & := & (\Phi_{16b^*})_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, & \Psi_{14}^3 & := & \Psi_{16}^2, \\
\Psi_{15}^3 & := & \Psi_{17}^2, & \Psi_{16}^3 & := & (10b)_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3}, \\
\Psi_{17}^3 & := & (10d)_{3^5:(2\times M_{11})} \nearrow^{Co_3} . & & &
\end{array}
$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253a$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$253b$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896^*	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1771	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2024	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520^*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5544	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
7084	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8855	2	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
20608	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
20608^*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
26082	.	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.
31878	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.
57960	2	.	.	.	2	2	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
80960	.	.	.	2	.	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	1	1	.
93312	.	1	1	2	.	.	.	.	2	.	2	2	.	1	.	1	.	.
$129536a$	2	1	1	1	2	2	.	1	3	1	2	2	.	1	1	.	.	.
$129536b$	1	1	.	3	1	1	1	.	5	.	3	1	.	.	.	1	1	.
184437	2	2	.	3	3	3	.	.	5	1	3	5	.	2	1	.	.	1
226688	2	2	1	4	3	3	.	.	5	.	3	6	1	2	1	1	.	1
249480	2	2	1	4	3	3	.	.	9	.	5	3	1	.	1	1	1	.
255024	2	1	.	3	3	3	1	.	9	.	5	3	.	1	1	1	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	u	.	.	.	u	u
Ω_3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-1	-1	2	3	1	1
Ω_4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	-1
Ω_5	.	.	1	.	.	.	.	1	.	4	1	.	-1	2	5	.	-1	1
Ω_6	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	1	.	.	.
Ω_7	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	-1	.	.	.	.	-1

4.4.9. Bemerkung: Die Charaktere Ψ^3_{17} und Ψ^3_{18} sind projektiv-unzerlegbar. Dazu betrachtet man nur die Charaktergrade aller Subsummen.

4.4.10. Bemerkung: In Bemerkung 4.4.8. ist unter anderen die Darstellung der Hauptblockkomponenten der folgenden projektiven Charaktere in der dort angegebenen Basis wiedergegeben:

$$\begin{array}{lclclcl} \Omega_4 & := & (5f)_{3_+^{1+4}:4S_6} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Omega_5 & := & (\Phi_{55})_{HS} \nearrow^{Co_3} - \ldots, \\ \Omega_6 & := & (\Phi_{230b})_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots, & & \Omega_7 & := & (15)_{2\cdot S_6(2)} \nearrow^{Co_3} - \ldots. \end{array}$$

4.4.11. Bemerkung: **a)** Man erhält projektive Charaktere von Co_3 als Tensorprodukte der Defekt-0-Charaktere 40250, 63250, 91125, 221375 und 253000 mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3. Man wählt diejenigen aus, die mit den gewöhnlichen Charakteren von Co_3 Skalarprodukte kleiner als 1000 haben.
b) Man induziert die irreduziblen Brauercharaktere und die projektiv-unzerlegbaren Charaktere der in den Abschnitten 3.10. bis 3.14. gegebenen maximalen Untergruppen von Co_3 nach Co_3. Die jeweiligen Untergruppenfusionen wurden in Abschnitt 4.1. betrachtet.
c) Man erhält projektive Charaktere von Co_3 durch Einschränkung der in Bemerkung 4.2.4.b) genannten Charaktere von Co_1 und als Tensorprodukte der projektiv-unzerlegbaren Charaktere des Blockes von zyklischem Defekt für Co_3 mit dem gewöhnlichen Charakter 23 von Co_3.

4.4.12. Bemerkung: Damit erhält man die folgende vierte Basis:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\Psi_2^4 & := & \Psi_2^3 - \Psi_{13}^3 - \Psi_{18}^3, & \Psi_3^4 & := & \Psi_3^3 - \Psi_{13}^3, & \Psi_4^4 & := & \Phi_{4025} \otimes 23, \\
\Psi_{11}^4 & := & \Psi_{11}^3 - \Psi_{17}^3, & \Psi_{12}^4 & := & \Psi_{12}^3 - \Psi_{13}^3, & \Psi_{14}^4 & := & \Psi_{14}^3 - \Psi_{18}^3.
\end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
253*a*	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
253*b*	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
896*	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1771	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2024	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3520*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5544	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
7084	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8855	2	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
20608	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
20608*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
31878	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.
57960	2	.	.	.	2	2	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	1	.
93312	.	1	1	1	.	.	.	.	2	.	2	2	.	1	.	1	.	.
129536*a*	2	1	1	1	2	2	.	1	3	1	2	2	.	1	1	.	.	.
129536*b*	1	1	.	1	1	1	1	.	5	.	2	1	.	.	.	1	1	.
184437	2	1	.	2	3	3	.	.	5	1	3	5	.	1	1	.	.	1
226688	2	.	.	2	3	3	.	.	5	.	3	5	1	1	1	1	.	1
249480	2	1	.	2	3	3	.	.	9	.	4	2	1	.	1	1	1	.
255024	2	1	.	1	3	3	1	.	9	.	4	3	.	1	1	1	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*u*	.	.	.	*u*	*u*

4.5. Zerlegungszahlen für den Hauptblock II

4.5.1. Bemerkung: Die Matrix in Bemerkung 4.4.12. ist unitriangulär, wie man nach Vertauschen der mit 80960 und 93312 indizierten Zeilen direkt sieht. Also gilt dies auch für die Zerlegungsmatrix für den Hauptblock. Somit ist jeder Spalte der Zerlegungsmatrix ein projektiv-unzerlegbarer Charakter kanonisch zugeordnet. Dieser werde mit Ψ_i für den Spaltenindex $i \in \{1, \ldots, 18\}$ bezeichnet.

4.5.2. Bemerkung: **a)** Man findet sofort folgende Möglichkeiten für die projektiv-unzerlegbaren Charaktere Ψ_{16} und Ψ_{14}:

$$\Psi_{16} = \begin{cases} \Psi_{16,1} := \Psi_{16}^4 \\ \Psi_{16,2} := \Psi_{16}^4 - \Psi_{17}^4 \end{cases} \quad \text{und } \Psi_{14} = \begin{cases} \Psi_{14,1} := \Psi_{14}^4 \\ \Psi_{14,2} := \Psi_{14}^4 - \Psi_{18}^4 \\ \Psi_{14,3} := \Psi_{14}^4 - \Psi_{16,2} \end{cases}$$

Dabei gilt notwendig $\Psi_{16} = \Psi_{16,2}$, falls $\Psi_{14} = \Psi_{14,3}$ gilt.
b) Man findet sofort folgende Möglichkeiten für den projektiv-unzerlegbaren Charakter Ψ_{15}:

$$\Psi_{15} = \begin{cases} \Psi_{15,1} := \Psi_{15}^4 \\ \Psi_{15,2} := \Psi_{15}^4 - \Psi_{18}^4 \end{cases}$$

c) Damit sind die Charaktere Ψ_{10}^4, Ψ_8^4, Ψ_7^4 und Ψ_3^4 projektiv-unzerlegbar.

4.5.3. Bemerkung: **a)** Man findet sofort folgende Möglichkeiten für den projektiv-unzerlegbaren Charakter Ψ_2:

$$\Psi_2 = \begin{cases} \Psi_{2,1} := \Psi_2^4 \\ \Psi_{2,2} := \Psi_2^4 - \Psi_3^4 \end{cases}$$

b) Man findet für den irreduziblen Brauercharakter $230b$ von $McL{:}2$ nach Induzieren die Hauptblockkomponente $\psi_2 := (230b)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots = 253a - 23$ als Linearkombination der gewöhnlichen Charaktere von Co_3. Damit ist Ψ_2^4 projektiv-unzerlegbar.

4.5.4. Bemerkung: **a)** Mit Ψ_{12}^4 ist auch Ψ_{12}^{4*} projektiv und die projektiv-unzerlegbaren Charaktere Ψ_{12} und Ψ_{12}^* sind Summanden von Ψ_{11}^4. Damit erhält man für Ψ_{12} die unten angegebenen Abschätzungen der Einträge.
b) Durch Betrachtung des Eintrags in der mit 31878 indizierten Zeile findet man, daß $\Psi_{12}^4 - \Psi_{14}$ ein projektiver Charakter ist. Man untersucht die drei möglichen Fälle und findet durch Betrachtung der Einträge in den mit 93312 und 18437 indizierten Zeilen, daß $\tilde{\Psi}_{12}^5 := \Psi_{12}^4 - \Psi_{14}^4$ ein projektiver Charakter ist.
c) Durch Betrachtung des Eintrags in der mit 184437 indizierten Zeile findet man, daß $\Psi_{12}^5 := \tilde{\Psi}_{12}^5 - 3 \cdot \Psi_{18}^4$ ein projektiver Charakter ist. Mit Ψ_{12}^5 ist dann auch $\Psi_{11}^5 := \Psi_{12}^{5*}$ ein projektiver Charakter.

	Ψ_{12}	$\tilde{\Psi}_{12}^5$	Ψ_{12}^5
20608	.	.	.
20608*	1	1	1
26082	.	.	.
31878	.	.	.
57960	.	.	.
80960	.	.	.
93312	≤ 1	1	1
$129536a$	≤ 1	1	1
$129536b$	≤ 1	1	1
184437	≤ 1	4	1
226688	≤ 1	4	1
249480	≤ 2	2	2
255024	≤ 2	2	2

4.5.5. Bemerkung: Damit erhält man die folgende fünfte Basis. Durch Inspektion erkennt man sofort die unterstrichenen Einträge als Zerlegungszahlen für die korrespondierenden gewöhnlichen Charaktere. Damit sind die Zerlegungszahlen für die unterstrichenen gewöhnlichen Charaktere bestimmt. Somit sind die ersten zehn Spalten der Zerlegungsmatrix durch die folgenden Brauercharaktere indiziert:

$$1, 23, 230, 253, 896, 896^*, 1771a, 1771b, 3520, 5290.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{23}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253a}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253b}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896^*}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{1771}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{2024}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{5544}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{7084}$	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{8855}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
20608	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.
20608^*	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
31878	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
57960	2	.	.	.	2	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
93312	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	.	.	.	.	2	.	1	1	.	1	.	$\underline{1}$	.	.
$129536a$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	2	2	.	$\underline{1}$	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
$129536b$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	5	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
184437	2	$\underline{1}$	.	2	3	3	.	.	5	$\underline{1}$	1	1	.	1	1	.	.	$\underline{1}$
226688	2	.	.	2	3	3	.	.	5	.	1	1	$\underline{1}$	1	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
249480	2	$\underline{1}$	.	2	3	3	.	.	9	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
255024	2	$\underline{1}$	.	1	3	3	$\underline{1}$	.	9	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
	.	u	u	.	.	.	u	u	.	u	.	.	u	.	.	.	u	u

4.5.6. Bemerkung: Man findet für den irreduziblen Brauercharakter $210b$ von $McL{:}2$ nach Induzieren die Hauptblockkomponente $\omega_1 := (210b)_{McL:2} \nearrow^{Co_3} - \ldots = 1 - 5544 + 31878$ als Linearkombination der gewöhnlichen Charaktere von Co_3. Also gilt $31878 + 1 = 5544 + \omega_1$. Somit ist der irreduzible Brauercharakter 253 von Co_3 Konstituent der 5-modularen Reduktion des gewöhnlichen Charakters 31878 von Co_3. Damit sind die Zerlegungszahlen dieses Charakters bekannt.

4.5.7. Bemerkung: **a)** Man findet sofort folgende Möglichkeiten für den projektiv-unzerlegbaren Charakter Ψ_{12}:

$$\Psi_{12} = \begin{cases} \Psi_{12,1} := \Psi_{12}^5 \\ \Psi_{12,2} := \Psi_{12}^5 - \Psi_{18}^5 \\ \Psi_{12,3} := \Psi_{12}^5 - \Psi_{16,2} \end{cases}$$

Dabei gilt notwendig $\Psi_{16} = \Psi_{16,2}$, falls $\Psi_{12} = \Psi_{12,3}$ gilt.
b) Man findet für die irreduziblen Brauercharaktere $\psi_2 = 230$ und 896^* von Co_3 die folgenden Skalarprodukte:

$$(230 \otimes 896^*, \Psi_{12,1})_{Co_3} = 0, (230 \otimes 896^*, \Psi_{12,2})_{Co_3} = -1, (230 \otimes 896^*, \Psi_{12,3})_{Co_3} = -1.$$

Also ist Ψ_{12}^5 projektiv-unzerlegbar. Damit ist auch Ψ_{11}^5 projektiv-unzerlegbar.

4.5.8. Bemerkung: **a)** Man findet sofort folgende Möglichkeiten für den unzerlegbaren Brauercharakter ψ_{11}:

$$\psi_{11} = \begin{cases} \psi_{11,1} := 20608 \\ \psi_{11,2} := 20608 - 3520 \end{cases}$$

b) Man findet mit Bemerkung 4.2.4.b). für den im vierten Block von zyklischem Defekt liegenden gewöhnlichen Charakter 25900875 von Co_1 nach Einschränken die folgenden Skalarprodukte:

$$((25900875)_{Co_3}, 20608)_{Co_3} \quad = \quad 0, \quad ((25900875)_{Co_3}, 20608 - 3520)_{Co_3} \quad = \quad -1.$$

Also bleibt 20608 nach 5-modularer Reduktion irreduzibel. Damit gilt dies auch für 20608^*.

4.5.9. Bemerkung: Mit den Bemerkungen 4.5.7.und 4.5.8. erhält man die folgende sechste Basis:

$$\Psi_9^6 \quad := \quad \Psi_9^5 - \Psi_{11}^5 - \Psi_{12}^5.$$

Nun erkennt man einige weitere Einträge als Zerlegungszahlen für die korrespondierenden gewöhnlichen Charaktere. Damit sind die ersten 14 Spalten der Zerlegungsmatrix durch die folgenden Brauercharaktere indiziert:

$$1, 23, 230, 253, 896, 896^*, 1771a, 1771b, 3520, 5290, 20608, 20608^*, ?, 26335.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{23}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253a}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253b}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896^*}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{1771}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{2024}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{5544}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{7084}$	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{8855}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
$\underline{31878}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
57960	2	.	.	.	2	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
93312	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	1	.	$\underline{1}$	.	.
$129536a$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	2	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
$129536b$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
184437	2	$\underline{1}$	.	2	3	3	.	.	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	1	1	.	.	$\underline{1}$
226688	2	.	.	2	3	3	.	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
249480	2	$\underline{1}$	.	2	3	3	.	.	5	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
255024	2	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	3	3	$\underline{1}$	.	5	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
	.	u	u	.	.	.	u	u	.	u	u	u	u	.	.	.	u	u

5. Kondensierte Moduln für Co_3, weitere Zerlegungszahlen

In diesem Kapitel sind die Ergebnisse der Strukturuntersuchung konkreter Moduln für Co_3 wiedergegeben. Die hier verwendeten Methoden sind also durchaus komplementär zu den in Kapitel 4. angewendeten. Die entsprechenden Rechnungen wurden mit dem Programmsystem MEAT-AXE durchgeführt.

Der Zusammenhang zwischen beiden Zugängen wird durch die Konstruktion von Permutationsdarstellungen in Abschnitt 5.1. hergestellt, deren Charakter sich einerseits leicht berechnen läßt, die andererseits aufgrund ihrer speziellen Struktur einer Handhabung auf dem Rechner, will sagen, den in Kapitel 2. bereitgestellten Methoden, zugänglich sind. Die Konkretisierung der abstrakten Gruppe Co_3 erfolgt über die mir von R. PARKER in einer privaten Mitteilung angegebenen, von ihm Standarderzeuger genannten, in Definition 5.1.3. wiedergegebenen darstellenden Matrizen. Daraus werden in kanonischer Weise Permutationsdarstellungen gewonnen. Mit Hilfe dieser Permutationsdarstellungen ist es unter Verwendung des Programmsystems CAYLEY ein leichtes, die angegebenen Isomorphietypen der konstruierten Untergruppen von Co_3 zu verifizieren.

In Abschnitt 5.2. werden aus den so konstruierten Permutationsdarstellungen kondensierte Moduln für Co_3 gewonnen und deren Struktur untersucht. Ziel der Analyse ist es, die in Abschnitt 2.1. abstrakt gegebene Korrespondenz von irreduziblen Moduln für Algebra und Hecke-Algebra konkret zu bestimmen. Dazu werden zunächst in den Bemerkungen 5.2.5. bis 5.2.9. sukzessive die Permutationsdarstellungen der Grade 276, 552, 11178 und 37950 untersucht. Die Analyse eines aus solch einer Permutationsdarstellung gewonnenen kondensierten Moduls, der auf dem Rechner als Modul für die Kondensationsalgebra vorliegt, beginnt mit der Bestimmung darin auftretenden Konstituenten. Mittels der schon bekannten Zerlegungszahlen können diese den Konstituenten für die Hecke-Algebra und ihren Urbildern, das heißt modular irreduziblen Darstellungen für Co_3, zugeordnet werden. Im Verlauf dieser Analysen wird der Stand der Dinge jeweils durch eine Tabelle dokumentiert, die dort verwendeten Bezeichnungen sind in Bemerkung 5.2.4. erläutert. Nach dieser Vorarbeit gelingt es in den Bemerkungen 5.2.10. bis 5.2.14., die Zerlegungszahlen für die gewöhnliche irreduzible Darstellung 57960 vollständig aus dem kondensierten Modul zur Permutationsdarstellung 170775 zu bestimmen. Die so erhaltenen Ergebnisse werden in Abschnitten 5.3. wie gewohnt mittels des Systems MOC akkumuliert.

Die konkrete Strukturuntersuchung geschieht unter Verwendung der in Kapitel 2. entwickelten Terminologie und Methoden, auf die hier ohne weiteren Kommentar zurückgegriffen wird. Dabei wird Algorithmus 2.5.2. nicht vollständig durchgeführt, sondern für die Analyse reicht es aus, die lokalen Teilmoduln des jeweils untersuchten Moduls mit ihren Inzidenzen unter der mengentheoretischen Inklusion zu bestimmen. Ein nicht mehr ganz triviales Beispiel einer solchen Inzidenzmatrix findet man in Bemerkung 5.2.11. Vielleicht wäre es an dieser Stelle ganz schön, ein Programm zur graphischen Aufbereitung zu haben, solch eines zu implementieren sei der geneigte Leser nur ermutigt. Da die hier betrachteten Moduln als Moduln für die Kondensationsalgebra gegeben sind, findet die allgemeine Formulierung der Aussagen in Kapitel 2., die ausdrücklich über die Formulierung für Gruppenalgebren hinausgeht, hier ihre Rechtfertigung. In praktischer Hinsicht stellt die Diskrepanz zwischen Hecke-Algebra und Kondensationsalgebra das schwierigste Problem dar und ist die Ursache für die Länge der hier wiedergegebenen Analysen. Neben dem Begriff des sogenannten genuinen Teilmoduls aus Definition 2.8.5. wird auch der Begriff des sogenannten genuinen Konstituenten benutzt, dessen Bedeutung unmittelbar klar ist, auch wenn dafür keine formale Definition gegeben wird.

In den Abschnitten 5.4. und 5.5. wird der oben beschriebene Prozeß für eine andere Kondensationsuntergruppe wiederholt. Im Vergleich der Ergebnisse der Abschnitte 5.2. versus 5.4. und 5.5. zeigt sich deutlich der Einfluß der gewählten Kondensationsuntergruppe im Wechselspiel zwischen den Zielen möglichst kleiner Dimension der kondensierten Moduln und möglichst treuer Kondensation. In Abschnitt 5.4. sind die wieder notwendig werdenden Vorarbeiten der Untersuchung der oben genannten Permutationsdarstellungen wiedergegeben. In Abschnitt 5.5. gelingt es dann durch Untersuchung des aus der Permutationsdarstellung vom Grad 1311552 gewonnenen Moduls, unter anderen die Zerlegungszahlen des gewöhnlichen Charakters 93312 vollständig zu bestimmen. Hier wie auch in den Abschnitten 5.2. und 5.4. weist die Darstellung der von mir vorgenommenen Rechnungen eine gewisse Monotonie auf, dies mag zwar ermüdend auf den Leser wirken, liegt aber in der Natur der Dinge.

Dieses und einige andere hier gewonnene Ergebnisse werden in Abschnitt 5.6. mittels des Systems Moc akkumuliert und stellen damit das Endergebnis dieses Textes dar. In Abschnitt 5.7. werden abschließend die noch offen gebliebenen Fragen diskutiert.

5.1. Transitive Permutationscharaktere, Konstruktion von Darstellungen

5.1.1. Bemerkung: **a)** Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von McL nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Wahlmöglichkeit für die Klassen $11A/B$ von McL.
b) Man stellt fest, daß die Untergruppenfusion von $U_3(5){:}3$ nach Co_3 eindeutig bestimmt ist.

5.1.2. Bemerkung: Unter Beachtung der Bemerkungen in Abschnitt 4.1. und 5.1.1. erhält man die nachfolgend angegebenen Permutationscharaktere von Co_3:

U	:	$[Co_3 : U]$	:	$1_U \nearrow^{Co_3}$
$McL{:}2$	:	276	:	$1 + 275$
McL	:	552	:	$1 + 23 + 253a + 275$
HS	:	11178	:	$1 + 23 + 275 + 2024 + 8855$
$U_4(3){:}(2^2)_{133}$	:	37950	:	$1 + 2 \cdot 275 + 5544 + 8855 + 23000$
M_{23}	:	48600	:	$1 + 23 + 253a + 275 + 2024 + 5544 + 8855 + 31625a$
$2 \cdot S_6(2)$	:	170775	:	$1 + 275 + 7084 + 8855 + 23000 + 57960 + 73600$
$U_3(5){:}3$	:	1311552	:	$1 + 253a + 253b + 275 + 2 \cdot 2024 + 8855 + 9625 + 9625^*$
				$+2 \cdot 23000 + 26082 + 31625a + 31625b + 31878 + 57960 + 63250$
				$+73600 + 91125 + 93312 + 2 \cdot 129536a + 226688 + 246400$

5.1.3. Definition: **a)** Es seien $A_1, A_2 \in \mathbb{Z}^{24\times 24}$ die in Abschnitt 6.2. wiedergegebenen, von R. Parker angegebenen Matrizen. Mit dem Gruppenerzeugnis $< A_1, A_2 > \leq \mathrm{GL}_{24}(\mathbb{Z})$ sei dann $2 \cdot Co_1 :=< A_1, A_2 >$.
b) Damit sei nach R. Parker $C_2 := (A_2^{19} A_1 A_2^6)^4 \in \mathrm{GL}_{24}(\mathbb{Z})$. Mit dem Gruppenerzeugnis $< A_1, C_2 > \leq \mathrm{GL}_{24}(\mathbb{Z})$ sei dann $2 \times Co_3 :=< A_1, C_2 >$.
c) Es sei $C_1 := A_1((A_1C_2)^3C_2)^{23} \in \mathrm{GL}_{24}(\mathbb{Z})$. Mit dem Gruppenerzeugnis $< C_1, C_2 > \in \mathrm{GL}_{24}(\mathbb{Z})$ sei dann $Co_3 :=< C_1, C_2 >$.

5.1.4. Bemerkung: **a)** Man findet, daß A_1 ein Element der Ordnung 2 mit $\mathrm{Spur}(A_1) = -8$ und C_2 ein Element der Ordnung 3 ist. Weiter ist $(A_1C_2)^3C_2$ ein Element der Ordnung 46. Damit hat die in Definition 5.1.3.c) angegebene Untergruppe von $2 \times Co_3$ in der Tat den angegebenen Isomorphietyp.
b) Damit ist also Co_3 als konkrete Matrixgruppe realisiert. Nun kann man durch p-modulare Reduktion darstellende Matrizen für eine beliebige Primzahl p finden.

5.1.5. Definition: Es seien $D_1 := ((C_1C_2)^4C_2)^{11} \in Co_3$ und $D_2 := ((C_1C_2)^2C_2)^2 \in Co_3$. Für das Gruppenerzeugnis $< D_1, D_2 > \in Co_3$ sei dann $McL{:}2 :=< D_1, D_2 >$.

5.1.6. Bemerkung: **a)** In der 3-modularen Reduktion der Darstellung von Co_3 aus Definition 5.1.3. findet man den Konstituenten $22_{Co_3,3}$. Diese Darstellung ist selbstdual. Dem Modularen Atlas entnimmt man durch Betrachtung der Elemente der Ordnung 22 in Co_3, daß die Einschränkung dieser Darstellung von Co_3 auf $McL{:}2$ die Konstituenten $21b_{McL:2,3}$ und $1b_{McL:2,3}$ hat. Also hat man $(22_{Co_3,3})_{McL:2} \cong 21b_{McL:2,3} \oplus 1b_{McL:2,3}$ und $(22_{Co_3,3})_{McL} \cong 21_{McL,3} \oplus 1_{McL,3}$.
b) Nun operiert Co_3 in kanonischer Weise auf $\mathbb{F}_3^{1\times 22}$. Das ergibt eine Permutationsdarstellung von Co_3 auf den Vektoren von $\mathbb{F}_3^{1\times 22}$. Dabei wird von jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor aus dem unter $McL{:}2$ invarianten 1-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{F}_3^{1\times 22}$ unter der Operation von Co_3 eine Bahn der Länge $552 = [Co_3 : McL]$ erzeugt. Man erhält also eine Permutationsdarstellung $p552$ von Co_3.
c) Weiter operiert Co_3 in kanonischer Weise auf den 1-dimensionalen Teilräumen von $\mathbb{F}_3^{1\times 22}$. Damit erhält man analog eine Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 vom Grad $276 = [Co_3 : (McL{:}2)]$.

5.1.7. Bemerkung: Nun kann man mittels der Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 sofort nachprüfen, daß die in Definition 5.1.5. angegebene Untergruppe von Co_3 in der Tat den angegebenen Isomorphietyp hat.

5.1.8. Bemerkung: In der 2-modularen Reduktion der Darstellung von Co_3 aus Definition 5.1.3. findet man den Konstituenten $22_{Co_3,2}$. Diese Darstellung ist selbstdual. Dem Modularen Atlas entnimmt man, daß die Einschränkung dieser Darstellung von Co_3 auf HS die Konstituenten $20_{HS,2}$ und $1_{HS,2}$ mit der Vielfachheit 2 hat. Da $(22_{Co_3,2})_{HS}$ selbstdual ist, existiert ein unter HS invarianter 1-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{F}_2^{1\times 22}$. Damit erhält man eine Permutationsdarstellung $p11178$ von Co_3 vom Grad $11178 = [Co_3 : HS]$, indem man den 1-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 des Elements $C_1C_2 \in Co_3$ der Ordnung 20 in der Darstellung $22_{Co_3,2}$ betrachtet.

5.1.9. Bemerkung: Dem Modularen Atlas entnimmt man, daß die Einschränkung von $22_{Co_3,2}$ von Co_3 auf $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ die Konstituenten $20_{U_4(3):(2^2)_{133},2}$ und $1_{U_4(3):(2^2)_{133},2}$ mit der Vielfachheit 2 hat. Also existiert ein unter $U_4(3){:}(2^2)_{133}$ invarianter 1-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{F}_2^{1\times 22}$. Damit erhält man eine Permutationsdarstellung $p37950$ von Co_3 vom Grad $37950 = [Co_3 : (U_4(3){:}(2^2)_{133})]$, indem man den 1-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 des Elements $((C_1C_2^2)^2C_1C_2)^3C_2C_1C_2 \in Co_3$ der Ordnung 24 in der Darstellung $22_{Co_3,2}$ betrachtet.

5.1.10. Definition: Es sei $E_2 := ((C_1C_2)^3C_2)^{-1}(C_1C_2)^2C_2(C_1C_2)^2(C_1C_2^2)^2(C_1C_2)^3C_2 \in Co_3$. Für das Gruppenerzeugnis $< C_1, E_2 >\in Co_3$ sei dann $M_{23} :=< C_1, E_2 >$.

5.1.11. Bemerkung: Man kann mittels der Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 sofort nachprüfen, daß die in Definition 5.1.10. angegebene Untergruppe von Co_3 in der Tat den angegebenen Isomorphietyp hat.

5.1.12. Bemerkung: In der 5-modularen Reduktion der Darstellung von Co_3 aus Definition 5.1.3. findet man den Konstituenten $23_{Co_3,5}$. Diese Darstellung ist selbstdual. Dem Modularen Atlas entnimmt man, daß die Einschränkung dieser Darstellung von Co_3 auf M_{23} die Konstituenten $22_{M_{23},5}$ und $1_{M_{23},5}$ hat. Also hat man $(23_{Co_3,5})_{M_{23}} \cong 22_{M_{23},5} \oplus 1_{M_{23},5}$. Damit erhält man eine Permutationsdarstellung $p48600$ von Co_3 vom Grad $48600 = [Co_3 : M_{23}]$.

5.1.13. Bemerkung: Mit Bemerkung 5.1.4. ist C_1 ein Element der Klasse $2A$ von Co_3. Es ist $N_{Co_3}(C_1) \cong 2 \cdot S_6(2)$. Weiter ist $(C_1C_2)^4C_2$ ein Element der Ordnung 22, also ist $((C_1C_2)^4C_2)^{11}$ ein Element der Klasse $2B$ von Co_3. Nun ist das Gruppenerzeugnis zweier nichtkonjugierter Involutionen einer Gruppe isomorph zu einer Diedergruppe mit nichttrivialem Zentrum. Damit findet man sofort normalisierende Elemente.

5.1.14. Definition: Es seien

$$\begin{array}{lcllcl} F_3 & := & ((C_1C_2)^4C_2)^{11}, & F_4 & := & (C_1C_2)^3C_2, \\ F_1 & := & (C_1F_4^{-2}F_3F_4^2)^3 \cdot (C_1F_4^{-3}F_3F_4^3)^4, & F_2 & := & (C_1F_4^{-4}F_3F_4^4)^5 \cdot (C_1F_4^{-5}F_3F_4^5)^6 \in Co_3. \end{array}$$

Für das Gruppenerzeugnis $< F_1, F_2 >\leq Co_3$ sei dann $2 \cdot S_6(2) :=< F_1, F_2 >$.

5.1.15. Bemerkung: Mit Bemerkung 5.1.13. ist $< F_1, F_2 >\leq N_{Co_3}(C_1)$. Man kann mittels der Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 sofort nachprüfen, daß für die in Definition 5.1.14. angegebene Untergruppe von Co_3 in der Tat Gleichheit gilt.

5.1.16. Bemerkung: Man betrachtet das symmetrische Tensorquadrat von $22_{Co_3,3}$. Diese Darstellung der Dimension 253 hat die Konstituenten $1_{Co_3,3}$ und die zueinander dualen $126_{Co_3,3}$ und $126^*_{Co_3,3}$. Unter einer dieser Darstellungen findet man einen unter $2 \cdot S_6(2)$ invarianten 1-dimensionalen Teilraum, unter der anderen nicht. Damit erhält man eine Permutationsdarstellung $p170775$ von Co_3 vom Grad $170775 = [Co_3 : (2 \cdot S_6(2))]$.

5.1.17. Bemerkung: **a)** Es sei $U_3(5) \cong U < Co_3$ als Gruppen. Man kann $U{:}2 < McL{:}2$ annehmen. Mit Bemerkung 5.1.6. hat man $(22_{Co_3,3})_{McL:2} \cong 21b_{McL:2,3} \oplus 1b_{McL:2,3}$. Unter Benutzung des Modularen Atlas findet man durch Betrachtung der Klasse $2A$ von $McL{:}2$ sofort $(22_{Co_3,3})_{U:2} \cong 1b_{U:2,3} \oplus 21b_{U:2,3}$ und $(22_{Co_3,3})_U \cong 1_{U,3} \oplus 21_{U,3}$. Mittels Clifford-Theorie findet man, daß $(22_{Co_3,3})_{U:S_3} \cong 1b_{U:S_3,3} \oplus 21b_{U:S_3,3}$ und $(22_{Co_3,3})_{U:3} \cong 1_{U:3,3} \oplus 21_{U:3,3}$ gilt. Also existiert ein unter $U{:}S_3$ invarianter 1-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{F}_3^{1\times 22}$, auf dem $U{:}3$ trivial operiert, aber nicht $U{:}S_3$.
b) Man betrachtet das Element $(C_1C_2)^2C_2 \in Co_3$ der Ordnung 10 in der Darstellung $22_{Co_3,3}$. Man findet durch Berechnung des Brauercharakterwerts für dieses Element sofort, daß es in der Klasse $10A$ von Co_3 liegt. Durch Betrachtung des 2-dimensionalen Eigenvektorraums zum Eigenwert 1 findet man zunächst einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, der unter der Operation von Co_3 eine Bahn der Länge 552 erzeugt. Dazu beachte man Bemerkung 5.1.6. Dann findet man einen bis auf

skalare Vielfache eindeutigen von diesem linear unabhängigen Vektor, der unter der Operation von Co_3 eine Bahn der Länge $1311552 = [Co_3 : (U{:}3)]$ erzeugt, und damit eine Permutationsdarstellung $p1311552$ von Co_3. Die weiteren vom Nullvektor verschiedenen Vektoren dieses Eigenvektorraums erzeugen unter der Operation von Co_3 Bahnen größerer Länge.

5.2. Kondensationsuntergruppe $SL_2(7)$

5.2.1. Definition: Es seien

$$\begin{aligned} G_3 &:= (D_1D_2(D_1D_2^2)^2D_1D_2)^{-1}D_2(D_1D_2(D_1D_2^2)^2D_1D_2), \\ G_1 &:= D_1((D_1G_3)^2G_3(D_1G_3)^3G_3)^{-1}, \\ G_2 &:= (D_1G_3)^2G_3(D_1G_3)^2(D_1G_3^2)^2((D_1G_3)^2G_3D_1G_3^2(D_1G_3)^3G_3)^{-1} \in Co_3. \end{aligned}$$

Für das Gruppenerzeugnis $< G_1, G_2 >< Co_3$ sei dann $SL_2(7) :=< G_1, G_2 >$.

5.2.2. Bemerkung: Man kann mittels Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 sofort nachprüfen, daß die in Definition 5.2.1. angegebene Untergruppe von Co_3 in der Tat den angegebenen Isomorphietyp hat.

5.2.3. Bemerkung: Durch Betrachtung der zugehörigen gewöhnlichen Charaktertafeln stellt man fest, daß die Untergruppenfusion von $SL_2(7)$ nach Co_3 bis auf zwei Möglichkeiten festgelegt ist. Diese ergeben sich aus einer Unbestimmtheit der Untergruppenfusion auf den Klassen $8A/B$ von $SL_2(7)$. Es ist aber $SL_2(7) < McL{:}2$. Dies legt die Untergruppenfusion eindeutig fest.

5.2.4. Bemerkung: **a)** Für das der Untergruppe $SL_2(7)$ zugeordnete Idempotent $e_{SL_2(7)} := \frac{1}{336}\sum_{h\in SL_2(7)} h \in \mathbb{F}_5Co_3$ und die in Abschnitt 5.2. konstruierten Permutationsdarstellungen berechnet man mittels der Kondensationsformel aus Satz 2.6.6. die zugehörigen kondensierten Moduln für die Kondensationsalgebra $(\mathbb{F}_5Co_3)_{e_{SL_2(7)}\{C_i\}e_{SL_2(7)}}$. Die im folgenden betrachteten Moduln sind also als Moduln für die Kondenationsalgebra aufzufassen.
b) Die Dimensionen dieser Moduln und auch der in ihnen enthaltenen Konstituenten, soweit diese schon aus den bisherigen Ergebnissen über Zerlegungszahlen in Bemerkung 4.5.9. bekannt sind, berechnet man mittels der Formel aus Lemma 2.6.8. als Skalarprodukte.
c) In den nachfolgend angegebenen Tabellen sind für die jeweils betrachtete Darstellung nebeneinander aufgeführt: Die gewöhnlichen Konstituenten χ, die Dimensionen über $\mathbb{F}_5$ der aus diesen unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Moduln, die jeweiligen Konstituenten φ nach 5-modularer Reduktion, die Dimensionen über $\mathbb{F}_5$ der aus letzteren unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Moduln und die ihnen jeweils zugeordneten irreduziblen Moduln für die Kondensationsalgebra. Wird solch eine Zuordnung bereits aus einer vorhergehenden Tabelle übernommen, so ist der entsprechende Eintrag unterstrichen.
d) Die Algebra $e_{SL_2(7)}\mathbb{F}_5Co_3e_{SL_2(7)}$ wird im folgenden als Hecke-Algebra bezeichnet. Schließlich sei noch auf Definition 2.8.5. hingewiesen.

5.2.5. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p276$ gehörenden kondensierten Modul für die Kondensationsalgebra $kd276$ der Dimension 6 findet man die Konstituenten $kd1a$ und $kd5a$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 1 und 275 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation die genuinen Konstituenten $kd1a$ respektive $kd5a$.

χ	:	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	φ	:	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$kd1a$
275	:	5	:	275	:	5	:	$kd5a$

5.2.6. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p552$ gehörenden kondensierten Modul $kd552$ der Dimension 12 findet man die Konstituenten $kd1a$, $kd2a$ mit der Vielfachheit 2, $kd2b$ und $kd5a$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 23 und 230 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also die genuinen Konstituenten $kd2a$ respektive $kd2b$.

χ	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	φ	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	
1	1	1	1	$\underline{kd1a}$
23	2	23	2	$kd2a$
$253a$	4	23	2	$kd2a$
		230	2	$kd2b$
275	5	275	5	$\underline{kd5a}$

5.2.7. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p11178$ gehörenden kondensierten Modul $kd11178$ der Dimension 55 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 3, $kd2a$ mit der Vielfachheit 2, $kd2b$, $kd2c$, $kd2d$, $kd5a$, $kd8a$ mit der Vielfachheit 2 und $kd21a$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 896, 896^*, $1771b$ und 5290 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also die genuinen Konstituenten $kd2c$, $kd2d$, $kd8a$ respektive $kd21a$. Dabei wird die Darstellung 896 durch die Zuordnung von $kd2c$ definiert.

χ	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	φ	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	
1	1	1	1	$\underline{kd1a}$
23	2	23	2	$\underline{kd2a}$
275	5	275	5	$\underline{kd5a}$
2024	12	23	2	$\underline{kd2a}$
		230	2	$\underline{kd2b}$
		$1771b$	8	$kd8a$
8855	35	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		896	2	$kd2c$
		896^*	2	$kd2d$
		$1771b$	8	$kd8a$
		5290	21	$kd21a$

5.2.8. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p37950$ gehörenden kondensierten Modul $kd37950$ der Dimension 141 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 4, $kd1b$, $kd1c$, $kd2c$, $kd2d$, $kd5a$ mit der Vielfachheit 2, $kd8a$, $kd21a$ und $kd71a$. Der Konstituent $kd71a$ entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten 23000, ist also genuin. Nun erwartet man einen weiteren Konstituenten der Dimension 2 in $kd37950hb$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus der irreduziblen Darstellung 253 entsteht. Man findet aber zwei Konstituenten $kd1b$ und $kd1c$. Diese sind also nicht genuin.

χ	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	φ	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	
1	1	1	1	$\underline{kd1a}$
275	5	275	5	$\underline{kd5a}$
275	5	275	5	$\underline{kd5a}$
5544	24	1	1	$\underline{kd1a}$
		253	2	$kd1b \cdot kd1c$
		5290	21	$\underline{kd21a}$
8855	35	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		896	2	$\underline{kd2c}$
		896^*	2	$\underline{kd2d}$
		$1771b$	8	$\underline{kd8a}$
		5290	21	$\underline{kd21a}$
23000	71	23000	71	$kd71a$

5.2.9. Bemerkung: **a)** Somit ist die Kondensationsalgebra eine echte Unteralgebra der Hecke-Algebra.
b) Mit Bemerkung 5.2.8. tritt $kd71$ als genuiner direkter Summand von $kd37950$ auf. Weiter entstehen die Konstituenten $kd5a$ unter Fixpunkt-Kondensation aus den im Block mit zyklischem Defekt liegenden Konstituenten 275. Also findet man einen genuinen direkten Summanden von $kd37950$, der genau die beiden Konstituenten $kd5a$ enthält. Durch Abspalten dieser zwei Summanden erhält man den verbleibenden Modul $kd37950hb$ der Dimension 60. Dieser entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus der Hauptblockkomponente von $p37950$. Weiter findet man genau einen Teilmodul $U_{24} < kd37950hb$, der genau die aus den im gewöhnlichen Konstituenten 5544 nach 5-modularer Reduktion enthaltenen irreduziblen Darstellungen unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Konstituenten enthält. Die analoge Aussage gilt für den gewöhnlichen Konstituenten 8855 für genau einen Teilmodul $U_{35} < kd37950hb$. Mit dem Satz von Zassenhaus sind diese Teilmoduln genuin. Ferner ist $U := U_{24} \cap U_{35}$ genuin. Die Untersuchung zeigt, daß U_{5544}/U ein uniserieller Modul mit aufsteigender Kompositionsreihe $kd1b$, $kd1c$ ist.

5.2.10. Bemerkung: **a)** Für den zur Darstellung $p170775$ gehörenden kondensierten Modul $kd170775$ der Dimension 537 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 6, $kd2c$ mit der Vielfachheit 3, $kd2d$ mit der Vielfachheit 3, $kd5a$ mit der Vielfachheit 2, $kd7a$ mit der Vielfachheit 2, $kd8a$ mit der Vielfachheit 2, $kd12a$, $kd21a$, $kd71a$, $kd158a$ und $kd217a$.
b) Die Konstituenten $kd217a$ und $kd5a$ entstehen unter Fixpunkt-Kondensation aus dem im Block mit zyklischem Defekt liegenden irreduziblen Darstellungen 73325 und 275. Also findet man einen genuinen direkten Summanden von $kd170775$, der genau die Konstituenten $kd5a$ mit der Vielfachheit 2 und $kd217a$ enthält. Der Konstituent $kd71$ entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten 23000. Also tritt $kd71$ als genuiner direkter Summand von $kd170775$ auf. Durch Abspalten dieser zwei Summanden erhält man den verbleibenden Modul $kd170995hb$ der Dimension 239. Dieser entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus der Hauptblockkomponente von $p170775$.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$ mit der Vielfachheit 2, $kd2c$, $kd2d$, $kd7a$ mit der Vielfachheit 2, $kd12a$ und $kd158$.

χ	:	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	φ	:	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
275	:	5	:	275	:	5	:	$\underline{kd5a}$
7084	:	24	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	2	:	$\underline{kd2c}$
				896*	:	2	:	$\underline{kd2d}$
				$1771a$	:	7	:	?
				3520	:	12	:	?
8855	:	35	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	2	:	$\underline{kd2c}$
				896*	:	2	:	$\underline{kd2d}$
				$1771b$	:	8	:	$\underline{kd8a}$
				5290	:	21	:	$\underline{kd21a}$
23000	:	71	:	23000	:	71	:	$\underline{kd71a}$
57960	:	179	:	?	:	?	:	?
				$1771a$	:	7	:	?
				$1771b$	:	8	:	$\underline{kd8a}$
73600	:	222	:	275	:	5	:	$\underline{kd5a}$
				73325	:	217	:	$kd217a$

5.2.11. Bemerkung: Nun bestimmt man via Deltawort-Kondensation die lokalen Teilmoduln von $kd170775hb$ und erhält die folgende Inzidenzmatrix bezüglich der mengentheoretischen Inklusion. Dabei ist jeder solche Teilmodul mit seiner Dimension bezeichnet und der Isomorphietyp des jeweiligen Radikalfaktormoduls angegeben.

$m1$	1	+++
$m3$	$2d$	−++
$m10$	7	−−+−++−−+++++++++−−++++++++++++++++++++++++
$m11$	8	−−−+−−++++++++++−++++++++++++++++++++++++++
$m12$	$2c$	−−−−++−−−−−−−−−−+−−+++++−−+++++++++++++++++
$m13a$	1	−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++
$m13b$	$2c$	−−−−−−++−−−−−−−−−+++++++−−+++++++++++++++++
$m14$	1	−−−−−−−+−−−−−−−−−+++++++−−−−−−−−+++++++++++
$m20a$	$2c$	−−−−−−−−+−−−−−+−−−−+++++−−+++++++++++++++++
$m20b$	$2c$	−−−−−−−−−+−−+−−−−−−+++++−−+++++++++++++++++
$m20c$	$2c$	−−−−−−−−−−+−−−−+−−−++++++++++++++++++++++++
$m20d$	$2c$	−−−−−−−−−−−+−+−−−−−+++++−−+++++++++++++++++
$m21a$	1	−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++++++
$m21b$	1	−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++++++
$m21c$	1	−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++++++
$m21d$	1	−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−+++++++++++++++++++
$m24$	12	−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−+−−−−−−++−−−−−−+++++
$m35$	21	−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++−−−−−−−−+++++++++++
$m36$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m45a$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m45b$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m45c$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m45d$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m59$	$2d$	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−−−++
$m179$	158	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+++++++++++++++++++
$m180$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−−++
$m182a$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−−−++
$m182b$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−++−−−−−−−−−++
$m182c$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−−++
$m182d$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−−−++
$m196$	$2d$	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−++−−−−−−−−−++
$m203$	7	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−−−−++
$m204a$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−+−++
$m204b$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−−−−+++
$m204c$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−++−−−++
$m204d$	1	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−+−−++
$m206$	$2d$	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−++−−−++
$m214$	8	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−−++
$m218a$	$2d$	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−−++
$m218b$	$2d$	−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−+−++
$m218c$	$2d$	−−+++
$m238$	$2c$	−−−++
$m239$	1	−−+

5.2.12. Bemerkung: **a)** Mit dem Satz von Zassenhaus existiert ein genuiner 35-dimensionaler Teilmodul $U_{35} < kd170775hb$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus dem gewöhnlichen Konstituenten 8855 entsteht. Dieser muß den Konstituenten $kd21a$ enthalten, also gilt $U_{35} = m35$. $m35$ ist uniseriell mit der Kompositionsreihe $\{0\} < m1 < m3 < m11 < m13b < m14 < m35$, also mit den Kompositionsfaktoren $kd1a$, $kd2d$, $kd8a$, $kd2c$, $kd1a$ und $kd21a$, wie man der Inzidenzmatrix mittels des Satzes von Benson-Conway entnimmt. Somit sind alle Teilmoduln von $m35$ genuin, da nach 5-modularer Reduktion die gewöhnliche Darstellung 8855 die Kompositionslänge 7 hat.
b) Für den gewöhnlichen Konstituenten 7084 existiert analog ein genuiner 24-dimensionaler Teilmodul $U_{24} < kd170775hb$. U_{24} enthält den $kd8a$-lokalen Teilmodul $m11$ nicht, da alle Teilmoduln von $m11$ genuin sind. Daraus folgt sofort $U_{24} = m24$. Dieser ist uniseriell mit der Kompositionsreihe $\{0\} < m1 < m3 < m10 < m12 < m24$, also mit den Kompositionsfaktoren $kd1a$, $kd2d$, $kd7a$, $kd2c$ und $kd12a$. Somit sind alle Teilmoduln von $m24$ genuin, da nach 5-modularer Reduktion die gewöhnliche Darstellung 7084 die Kompositionslänge 5 hat.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$ mit der Vielfachheit 2, $kd2c$,

$kd2d$ und $kd158$.

χ	:	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	φ	:	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	
7084	:	24	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	2	:	$\underline{kd2c}$
				896^*	:	2	:	$\underline{kd2d}$
				$1771a$	:	7	:	$kd7a$
				3520	:	12	:	$kd12a$

5.2.13. Bemerkung: **a)** Mit dem Satz von Zassenhaus existiert ein genuiner 179-dimensionaler Teilmodul $U_{179} < kd170775hb$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus dem gewöhnlichen Konstituenten 57960 entsteht. Dieser muß aus Dimensionsgründen den Konstituenten $kd158a$ enthalten, also ist $U_{179} = m179$. Es sind $m1 < m3 < m10, m11 < m20c < m21d < m179$ genau die in $m179$ enthaltenen lokalen Teilmoduln. Man findet als aufsteigende Loewy-Reihe $kd1a$, $kd2d$, $kd7a \oplus kd8a$, $kd2c$, $kd1a$, $kd158a$.
b) Man findet weiter $m179 \cap m35 = m11$ und $m179 \cap m24 = m10$. Also sind alle Teilmoduln von $m179$, die im Urbild der dritten Loewy-Schicht liegen, genuin.
c) Damit enthält die gewöhnliche Darstellung 57960 nach 5-modularer Reduktion die Konstituenten 896^* und damit auch 896 jeweils mit der Vielfachheit 1, den Konstituenten 1 mindestens mit der Vielfachheit 1 und den Konstituenten 3520 nicht.
d) Somit ist auch das Urbild der vierten Loewy-Schicht genuin. Damit verbleiben als noch nicht zugeordente Konstituenten: $kd1a$ und $kd158$.

χ	:	$((\chi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	φ	:	$((\varphi)_{SL_2(7)}, 1)_{SL_2(7)}$	:	
57960	:	179	:	?	:	?	:	?
				1	:	1	:	$kd1a$
				896	:	2	:	$kd2c$
				896^*	:	2	:	$kd2d$
				$1771a$	:	7	:	$\underline{kd7a}$
				$1771b$	:	8	:	$\underline{kd8a}$

5.2.14. Bemerkung: **a)** Mit dem Satz von Zassenhaus und den dort angegebenen Bezeichnungen existiert ein $\mathcal{R}_\wp$-reiner Teilmodul $V_{15940} < p170775hb$ vom Typ $1 + 7084 + 8855$, wobei $p170775hb$ die Hauptblockkomponente von $p170775$ bezeichnet. Mit Lemma 2.8.7. ist $p170775hb/V_{15940}$ ein $\mathcal{R}_\wp$-freier $\mathcal{R}_\wp G$-Modul vom Typ 57960. Also existiert ein genuiner 60-dimensionaler Teilmodul $U_{60} < kd170775hb$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus der gewöhnlichen Darstellung $1 + 7084 + 8855$ entsteht, für den $kd170775hb/U_{60}$ unter Fixpunkt-Kondensation aus der gewöhnlichen Darstellung 57960 entsteht.
b) Unter Verwendung des Satzes von Benson-Conway findet man, daß $kd170775hb$ genau einen Teilmodul der Dimension 60 enthält. Die Untersuchung ergibt, daß $kd170775hb/U_{60}$ den Konstituenten $kd158a$ im Sockel enthält.
c) *Angenommen*, der Konstituent $kd158a$ wäre nicht genuin. Dann ist $m179/m20c$ genuin, nicht aber $m21d/m20c$. Damit existiert ein irreduzibler 159-dimensionaler Modul für die Hecke-Algebra, der bei Einschränkung auf die Kondensationsalgebra einen uniseriellen Modul mit aufsteigender Kompositionsreihe $kd1a$, $kd158a$ ergibt. Dieser ist aber auch Konstituent von $kd170775hb/U_{60}$ für die Hecke-Algebra und in der Einschränkung dieses Moduls auf die Kondensationsalgebra kann $kd158a$ nicht im Sockel vorkommen, *Widerspruch*.
Also ist der Konstituent $kd158a$ genuin und die gewöhnliche Darstellung 57960 enthält nach 5-modularer Reduktion den Konstituenten 1 mit der Vielfachheit 2. Damit sind die Zerlegungszahlen für den gewöhnlichen Charakter 57960 bekannt.

χ	:	$((\chi)_{SL_2(7)},1)_{SL_2(7)}$	:	φ	:	$((\varphi)_{SL_2(7)},1)_{SL_2(7)}$	:	
57960	:	1	:	1	:	1	:	$kd1a$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	2	:	$\underline{kd2c}$
				896^*	:	2	:	$\underline{kd2d}$
				$1771a$	:	7	:	$\underline{kd7a}$
				$1771b$	:	8	:	$\underline{kd8a}$
				52624	:	158	:	$kd158a$

5.3. Zerlegungszahlen für den Hauptblock III

5.3.1. Bemerkung: Unter Beachtung der Bemerkungen 4.5.2.b), 4.5.9. und 5.2.14. findet man die folgende siebte Basis:

$$\Psi_5^7 \;:=\; \Psi_5^6 - \Psi_{15,2}, \quad \Psi_6^7 \;:=\; \Psi_6^6 - \Psi_{15,2}, \quad \Psi_9^7 \;:=\; \Psi_9^6 - \Psi_{15,2}.$$

Schließlich erkennt man noch einige weitere Einträge als Zerlegungszahlen für die korrespondierenden gewöhnlichen Charaktere. Damit sind die ersten 15 Spalten der Zerlegungsmatrix durch die folgenden Brauercharaktere indiziert:

$$1, 23, 230, 253, 896, 896^*, 1771a, 1771b, 3520, 5290, 20608, 20608^*, ?, 26335, 52624.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{23}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253a}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253b}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896^*}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{1771}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{2024}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{5544}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{7084}$	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{8855}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
$\underline{31878}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
$\underline{57960}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
93312	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	1	.	$\underline{1}$	.	.
$\underline{129536a}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
$129536b$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
184437	2	$\underline{1}$	.	2	3	3	.	.	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	1	1	.	.	$\underline{1}$
226688	2	.	.	2	3	3	.	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
249480	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
255024	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
	.	u	u	.	.	.	u	u	.	u	u	u	u	.	.	.	u	u

5.4. Kondensationsuntergruppe 3^5:11 I

5.4.1. Definition: Es seien

$$\begin{array}{llllllllll} H_3 & := & (C_1C_2)^3C_2, & H_4 & := & (C_1C_2)^2C_2(C_1C_2)^3C_2, & H_5 & := & H_4H_3^2H_4^2H_3^4, \\ H_1 & := & C_1H_5^{-1}C_2H_5, & H_2 & := & (H_1^3H_5^{-1}C_2H_5)^5 \in Co_3. \end{array}$$

Für das Gruppenerzeugnis $< H_1, H_2 >< Co_3$ sei dann $3^5{:}11 :=< H_1, H_2 >$.

5.4.2. Bemerkung: Man kann mittels der Permutationsdarstellung $p276$ von Co_3 sofort nachprüfen, daß die in Definition 5.4.1. angegebene Untergruppe von Co_3 in der Tat den angegebenen Isomorphietyp hat.

5.4.3. Bemerkung: Es ist $3^5{:}11 < 3^5{:}(2 \times M_{11}) < Co_3$. Damit entnimmt man dem ATLAS direkt die Untergruppenfusion von 3^5:11 nach Co_3.

5.4.4. Bemerkung: **a)** Für das der Untergruppe 3^5:11 zugeordnete Idempotent $e := e_{3^5:11} := \frac{1}{2673} \sum_{h \in 3^5:11} h \in \mathbb{F}_5 Co_3$ hat man die Hecke-Algebra $e\mathbb{F}_5 Co_3 e$. Es seien

$$I_1 := eC_1C_2^2e, I_2 := eC_1eC_2e(C_1C_2)^2e \in e\mathbb{F}_5Co_3.$$

Im folgenden wird das Algebrenerzeugnis $< I_1, I_2 >\subseteq e\mathbb{F}_5Co_3e$ als Kondensationsalgebra bezeichnet.
b) Für die in Abschnitt 5.2. konstruierten Permutationsdarstellungen berechnet und untersucht man die zugehörigen kondensierten Moduln für die Kondensationsalgebra. Dabei werden die oben genannten Erzeuger für die Kondensationsalgebra gewählt, um die im folgenden auftretenden 1-dimensionalen Konstituenten möglichst weitgehend unterscheiden zu können.

5.4.5. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p276$ gehörenden kondensierten Modul $kd276$ der Dimension 2 findet man die Konstituenten $kd1a$ und $kd1b$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 1 und 275 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation die genuinen Konstituenten $kd1a$ respektive $kd1b$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$kd1a$
275	:	1	:	275	:	1	:	$kd1b$

5.4.6. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p552$ gehörenden kondensierten Modul $kd552$ der Dimension 4 findet man die Konstituenten $kd1a$, $kd1b$ und $kd1c$ mit der Vielfachheit 2. Somit ergibt die irreduzible Darstellung 23 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation den genuinen Konstituenten $kd1c$, während 230 unter dem Idempotent e verschwindet.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
23	:	1	:	23	:	1	:	$kd1c$
$253a$	:	1	:	23	:	1	:	$kd1c$
				230	:	0	:	$\{0\}$
275	:	1	:	275	:	1	:	$\underline{kd1b}$

5.4.7. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p11178$ gehörenden kondensierten Modul $kd11178$ der Dimension 10 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 3, $kd1b$, $kd1c$ mit der Vielfachheit 2, $kd1d$ mit der Vielfachheit 2, $kd1e$, $kd1f$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 896, 896^* und $1771b$ von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also die genuinen Konstituenten $kd1e$, $kd1f$ respektive $kd1d$, während 5290 unter dem Idempotent e verschwindet. Dabei kann ohne Einschränkung die Zuordnung von $kd1e$ zu 896 angenommen werden, man beachte dazu Bemerkung 5.2.7.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
23	:	1	:	23	:	1	:	$\underline{kd1c}$
275	:	1	:	275	:	1	:	$\underline{kd1b}$
2024	:	2	:	23	:	1	:	$\underline{kd1c}$
				230	:	0	:	$\{0\}$
				$1771b$	:	1	:	$kd1d$
8855	:	5	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	1	:	$kd1e$
				896*	:	1	:	$kd1f$
				$1771b$	:	1	:	$kd1d$
				5290	:	0	:	$\{0\}$

5.4.8. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p37950$ gehörenden kondensierten Modul $kd37950$ der Dimension 20 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 4, $kd1b$ mit der Vielfachheit 2, $kd1d$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ und $kd10a$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen 253 und 23000 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also die genuinen Konstituenten $kd1g$ respektive $kd10a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
275	:	1	:	275	:	1	:	$\underline{kd1b}$
275	:	1	:	275	:	1	:	$\underline{kd1b}$
5544	:	2	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				253	:	1	:	$kd1g$
				5290	:	0	:	$\{0\}$
8855	:	5	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	1	:	$\underline{kd1e}$
				896*	:	1	:	$\underline{kd1f}$
				$1771b$	:	1	:	$\underline{kd1d}$
				5290	:	0	:	$\{0\}$
23000	:	10	:	23000	:	10	:	$kd10a$

5.4.9. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p48600$ gehörenden kondensierten Modul $kd48600$ der Dimension 28 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 4, $kd1b$, $kd1c$ mit der Vielfachheit 3, $kd1d$ mit der Vielfachheit 2, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ und $kd15a$. Somit ergibt die irreduzible Darstellung $31625a$ von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also den genuinen Konstituenten $kd15a$.

χ	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	φ	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	
1	1	1	1	$\underline{kd1a}$
23	1	23	1	$\underline{kd1c}$
$253a$	1	23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
275	1	275	1	$\underline{kd1b}$
2024	2	23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
5544	2	1	1	$\underline{kd1a}$
		253	1	$\underline{kd1g}$
		5290	0	$\{0\}$
8855	5	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
		5290	0	$\{0\}$
$31625a$	15	$31625a$	15	$kd15a$

5.4.10. Bemerkung: Für den zur Darstellung $p170775$ gehörenden kondensierten Modul $kd170775$ der Dimension 85 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 6, $kd1b$ mit der Vielfachheit 2, $kd1d$ mit der Vielfachheit 2, $kd1e$ mit der Vielfachheit 3, $kd1f$ mit der Vielfachheit 3, $kd1h$ mit der Vielfachheit 2, $kd10a$, $kd24a$ und $kd33a$. Somit ergeben die irreduziblen Darstellungen $1771a$, 52624 und 73325 von Co_3 unter Fixpunkt-Kondensation also die genuinen Konstituenten $kd1h$, $kd24a$ respektive $kd33a$.

χ	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	φ	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	
1	1	1	1	$\underline{kd1a}$
275	1	275	1	$\underline{kd1b}$
7084	4	1	1	$\underline{kd1a}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771a$	1	$kd1h$
		3520	0	$\{0\}$
8855	5	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
		5290	0	$\{0\}$
23000	10	23000	10	$\underline{kd10a}$
57960	30	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771a$	1	$kd1h$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
		52624	24	$kd24a$
73600	34	275	1	$\underline{kd1b}$
		73325	33	$kd33a$

5.5. Kondensationsuntergruppe 3^5:11 II

5.5.1. Bemerkung: **a)** Für den zur Darstellung $p1311552$ gehörenden kondensierten Modul $kd1311552$ der Dimension 544 findet man die Konstituenten $kd1a$ mit der Vielfachheit 10, $kd1b$ mit der Vielfachheit 6, $kd1c$ mit der Vielfachheit 6, $kd1d$ mit der Vielfachheit 6, $kd1e$ mit der Vielfachheit 5, $kd1f$ mit der Vielfachheit 5, $kd1g$ mit der Vielfachheit 11, $kd1h$, $kd10a$ mit der Vielfachheit 2, $kd10b$, $kd13a$ mit der Vielfachheit 2, $kd15a$, $kd15b$ mit der Vielfachheit 5, $kd15c$, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd20a$, $kd23a$, $kd24a$ mit der Vielfachheit 4, $kd33a$ mit der Vielfachheit 2, $kd35a$ und $kd63a$.
b) Es enthält $p1311552$ die Konstituenten 20608 und 20608^* jeweils mit der Vielfachheit 4, wie aus den bisher bereits berechneten Zerlegungszahlen sofort folgt. Unter Fixpunkt-Kondensation entstehen daraus je vier 1-dimensionale Konstituenten von $kd1311552$. Aus den Vielfachheiten der in $kd1311552$ für die Kondensationsalgebra auftretenden Konstituenten folgt, daß dies je vier Konstituenten $kd1b$ und $kd1g$ sind. Diese sind also nicht genuin, sondern setzen für die Hecke-Algebra zu den unter Fixpunkt-Kondensation aus 20608 respektive 20608^* entstehenden Konstituenten fort. Durch die Zuordnung von $kd1b$ zu 20608 wird diese Darstellung definiert.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 3, $kd10b$, $kd13a$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 5, $kd15c$, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd20a$, $kd23a$, $kd24a$, $kd35a$ und $kd63a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11},1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11},1)_{3^5:11}$	:	
1	:	1	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
$253a$	:	1	:	23	:	1	:	$\underline{kd1c}$
				230	:	0	:	$\{0\}$
$253b$	:	1	:	253	:	1	:	$\underline{kd1g}$
275	:	1	:	275	:	1	:	$\underline{kd1b}$
2024	:	2	:	23	:	1	:	$\underline{kd1c}$
				230	:	0	:	$\{0\}$
				$1771b$	:	1	:	$\underline{kd1d}$
2024	:	2	:	23	:	1	:	$\underline{kd1c}$
				230	:	0	:	$\{0\}$
				$1771b$	:	1	:	$\underline{kd1d}$
8855	:	5	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	1	:	$\underline{kd1e}$
				896^*	:	1	:	$\underline{kd1f}$
				$1771b$	:	1	:	$\underline{kd1d}$
				5290	:	0	:	$\{0\}$
9625	:	5	:	9625	:	5	:	?
9625^*	:	5	:	9625^*	:	5	:	?
23000	:	10	:	23000	:	10	:	$\underline{kd10a}$
23000	:	10	:	23000	:	10	:	$\underline{kd10a}$
26082	:	14	:	?	:	?	:	?
				?	:	?	:	?
$31625a$	:	15	:	$31625a$	:	15	:	$\underline{kd15a}$
$31625b$	:	15	:	$31625b$	:	15	:	?
31878	:	16	:	253	:	1	:	$\underline{kd1g}$
				5290	:	0	:	$\underline{\{0\}}$
				26335	:	15	:	?
57960	:	30	:	1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				1	:	1	:	$\underline{kd1a}$
				896	:	1	:	$\underline{kd1e}$
				896^*	:	1	:	$\underline{kd1f}$
				$1771a$	:	1	:	$\underline{kd1h}$
				$1771b$	:	1	:	$\underline{kd1d}$
				52624	:	24	:	$\underline{kd24a}$

63250	20	63250	20	?
73600	34	275	1	$\underline{kd1b}$
		73325	33	$\underline{kd33a}$
91125	35	91125	35	?
93312	34	?	?	?
		?	?	?
		23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
		20608	1	$kd1b$
		20608^*	1	$kd1g$
$129536a$	48	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
		253	1	$\underline{kd1g}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
		5290	0	$\{0\}$
		20608	1	$kd1b$
		20608^*	1	$kd1g$
		26335	15	?
		52624	24	$\underline{kd24a}$
$129536a$	48	1	1	$\underline{kd1a}$
		1	1	$\underline{kd1a}$
		23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
		253	1	$\underline{kd1g}$
		896	1	$\underline{kd1e}$
		896^*	1	$\underline{kd1f}$
		$1771b$	1	$\underline{kd1d}$
		5290	0	$\{0\}$
		20608	1	$kd1b$
		20608^*	1	$kd1g$
		26335	15	?
		52624	24	$\underline{kd24a}$
226688	96	?	?	?
		?	?	?
		?	?	?
		?	?	?
		20608	1	$kd1b$
		20608^*	1	$kd1g$
246400	96	73325	33	$\underline{kd33a}$
		173075	63	?
χ	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	φ	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	

5.5.2. Bemerkung: Damit kommen in der 5-modularen Reduktion der gewöhnlichen Darstellung 226688 die irreduziblen Konstituenten 1, 896 und 896^* jeweils höchstens mit der Vielfachheit 1 vor.

5.5.3. Bemerkung: **a)** Man bestimmt ein normiertes Deltawort zu $kd63a$ und den $kd63a$-lokalen Teilmodul $U_{96} < kd1311552$. Dieser ist uniseriell mit aufsteigender Kompositionsreihe $kd33a$, $kd63a$. Da die beiden Konstituenten $kd33a$ unter Fixpunkt-Kondensation aus den im Block von zyklischem Defekt liegenden Konstituenten 73325 entstehen, liegt U_{96} in dem unter Fixpunkt-Kondensation aus

dem Block von zyklischem Defekt entstehenden Summanden von $kd1311552$ und ist genuin. Der Konstituent $kd63a$ entsteht also unter Fixpunkt-Kondensation aus der irreduziblen Darstellung 173075. Man untersucht den 448-dimensionalen Faktormodul $F_{448} := kd1311552/U_{96}$ weiter.
b) Man bestimmt den $kd33a$-lokalen Teilmodul $U_{34} < F_{448}$. Dieser ist genuin und uniseriell mit aufsteigender Kompositionsreihe $kd1b$, $kd33a$. Der im Sockel von U_{34} liegende Konstituent entsteht also unter Fixpunkt-Kondensation aus der irreduziblen Darstellung 275 und ist genuin. Man untersucht den Faktormodul $F_{414} := F_{448}/U_{34}$ weiter.
c) Man findet genau einen 1-dimensionalen $kd1b$-lokalen Teilmodul $U_1 < F_{414}$. Dieser entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus der im Block von zyklischem Defekt liegenden irreduziblen Darstellung 275 und ist damit genuin. Man untersucht $F_{413} := F_{414}/U_1$ weiter.
d) Man findet leicht einen Teilmodul $U_{20} < F_{413}$, der genau die beiden Konstituenten $kd10a$ enthält. U_{20} entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus den Defekt-0-Konstituenten 23000 und ist genuin. Man untersucht $F_{393} := F_{413}/U_{20}$ weiter.
e) Man bestimmt den $kd15a$-lokalen Teilmodul $U_{15} < F_{393}$. Dieser entsteht unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten 31625a und ist genuin. Man untersucht $F_{378} := F_{393}/U_{15}$ weiter.
f) Der Konstituent $kd10b$ zerfällt über $\mathbb{F}_{25}$ in eine direkte Summe zweier zueinander dualer 5-dimensionaler Moduln. Daraus folgt sofort, daß der $kd10b$-lokale Teilmodul $U_{10} < F_{378}$ unter Fixpunkt-Kondensation aus den Defekt-0-Konstituenten 9625 und 9625* entsteht und genuin ist. Man untersucht $F_{368} := F_{378}/U_{10}$ weiter.
f) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konsituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 3, $kd13a$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 5, $kd15c$, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd20a$, $kd23a$, $kd24a$ und $kd35a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
9625	:	5	:	9625	:	5	:	$\frac{1}{2} \cdot kd10b$
9625*	:	5	:	9625*	:	5	:	$\frac{1}{2} \cdot kd10b$
246400	:	96	:	73325	:	33	:	$\underline{kd33a}$
				173075	:	63	:	$kd63a$

5.5.4. Bemerkung: **a)** Man bestimmt ein normiertes Deltawort zu $kd1g$ und untersucht den unter Deltawort-Kondensation aus F_{368} entstehenden 11-dimensionalen Modul. Durch Betrachtung der in dem 5-dimensionalen Sockel dieses Moduls liegenden Vektoren findet man sofort, daß genau ein 1-dimensionaler $kd1g$-lokaler Teilmodul $U_1 < F_{368}$ existiert. Mit dem Satz von Zassenhaus ist dieser als der unter Fixpunkt-Kondensation aus der gewöhnlichen Darstellung $253b$ entstehende Modul genuin.
b) Die gewöhnliche Darstellung 26082 ergibt unter Fixpunkt-Kondensation einen genuinen Teilmodul der Dimension 14, der mit Bemerkung 5.5.3.f) die Konstituenten $kd13a$ und $kd1?$ haben muß. In der Tat findet man genau einen Teilmodul $U_{14} < F_{368}$, der den Konstituenten $kd13a$ enthält und Dimension kleiner als 15 hat. Dieser ist uniseriell mit aufsteigender Kompositionsreihe $kd1g$, $kd13a$ und es ist $U_1 < U_{14}$. Also sind die Konstituenten von U_{14} genuin und der Konstituent 253 kommt in der 5-modularen Reduktion der gewöhnlichen Darstellung 26082 vor.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 5, $kd15c$, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd20a$, $kd23a$, $kd24a$ und $kd35a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
26082	:	14	:	253	:	1	:	$kd1g$
				?	:	13	:	$kd13a$
				?	:	?	:	?

5.5.5. Bemerkung: **a)** Mit dem Satz von Zassenhaus existiert ein genuiner Teilmodul $U_{16} < F_{368}$ der Dimension 16, der unter Fixpunkt-Kondensation aus der gewöhnlichen Darstellung 31878 entsteht. U_{16} hat die Konstituenten $kd1g$ und $kd15?$. Weiter existiert ein genuiner Teilmodul $U_{15} < F_{368}$ der Dimension 15, der unter Fixpunkt-Kondensation aus der Defekt-0-Darstellung $31625b$ entsteht. U_{15} hat den Konstituenten $kd15?$. Man findet, daß kein $kd15d$-lokaler Teilmodul von F_{368} eine Dimension kleiner als 17 hat. Damit entsteht der Konstituent $kd15b$ unter Fixpunkt-Kondensation aus

der irreduziblen Darstellung 26335. Weiter findet man, daß genau ein $kd15b$-lokaler Teilmodul von F_{368} mit Dimension kleiner als 17 existiert. Damit entsteht der Konstituent $kd15c$ unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten $31625b$. Man findet den genuinen $kd15c$-lokalen Teilmodul $U_{15} < F_{368}$ und untersucht $F_{353} := F_{368}/U_{15}$ weiter.
b) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 2, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd20a$, $kd23a$, $kd24a$ und $kd35a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
31878	:	16	:	253	:	1	:	$\underline{kd1g}$
				5290	:	0	:	$\{0\}$
				26335	:	15	:	$kd15b$
$31625b$	:	15	:	$31625b$	:	15	:	$kd15c$

5.5.6. Bemerkung: **a)** Es existiert ein genuiner 20-dimensionaler Teilmodul von F_{353}, der unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten 63250 entsteht.
Angenommen, dieser Teilmodul hätte nicht den Konstituenten $kd20a$. Dann hat er den Konstituenten $kd15?$. Man stellt sofort fest, daß kein Teilmodul von F_{353} der Dimension kleiner 21 exisitert, der den Konstituenten $kd15d$ enthält. Weiter stellt man sofort fest, daß genau ein solcher mit dem Konstituenten $kd15b$ existiert. Mit Bemerkung 5.4.5. liegt dieser aber in der aus der Hauptblockkomponente von $p1311552$ unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Komponente von $kd1311552$, *Widerspruch*.
Also entsteht $kd20a$ unter Fixpunkt-Kondensation aus der Darstellung 63250. Man findet sofort den $kd20a$-lokalen Teilmodul $U_{20} < F_{353}$ und untersucht $F_{333} := F_{353}/U_{20}$ weiter.
b) Es existiert ein genuiner 35-dimensionaler Teilmodul von F_{333}, der unter Fixpunkt-Kondensation aus dem Defekt-0-Konstituenten 91125 entsteht.
Angenommen, dieser Teilmodul hätte nicht den Konstituenten $kd35a$. Dann hat er die Konstituenten $kd15?$, $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 2. Nun seien φ_1 und φ_2 die bisher unbekannten in den gewöhnlichen Darstellungen 93312 respektive 226688 nach 5-modularer Reduktion vorkommenden irreduziblen Darstellungen. Unter diesen Voraussetzungen bestimmt man leicht aus den bisher bekannten Zerlegungszahlen die möglichen Dimensionen der aus ihnen unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Konstituenten. Dies führt man mit Bemerkung 5.5.5.b) durch numerische Rechnung sofort zu einem *Widerspruch*.
Also entsteht $kd35a$ unter Fixpunkt-Kondensation aus der Darstellung 91125. Man findet sofort den $kd35a$-lokalen Teilmodul $U_{35} < F_{333}$ und untersucht $kd1311552hb := F_{298} := F_{333}/U_{33}$ weiter. In der Tat ist nun $kd1311552hb$ zu der aus der Hauptblockkomponente von $p1311552$ unter Fixpunkt-Kondensation entstehenden Komponente von $kd1311552$ isomorph.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 2, $kd15d$ mit der Vielfachheit 2, $kd23a$ und $kd24a$.

χ	:	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	φ	:	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	:	
63250	:	20	:	63250	:	20	:	$kd20a$
91125	:	35	:	91125	:	35	:	$kd35a$

5.5.7. Bemerkung: **a)** Der aus der irreduziblen Darstellung φ_2 unter Fixpunkt-Kondensation entstehende Konstituent von F_{298} für die Hecke-Algebra bleibt bei Einschränkung auf die Kondensationsalgebra nicht notwendig irreduzibel. Immerhin folgt aus einer Dimensionsbetrachtung für φ_1, daß der Konstituent $kd23a$ in der Fixpunkt-Kondensation von φ_2 vorkommt.
b) Man findet durch Betrachtung der sechs $kd15d$-lokalen Teilmoduln von F_{298}, daß genau einer von ihnen eine Dimension kleiner als 97 hat, dieser hat Dimension 32. Nun existiert mit dem Satz von Zassenhaus ein 96-dimensonaler Teilmodul $U_{96} < F_{298}$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus der gewöhnlichen Darstellung 226688 entsteht. Daraus folgt sofort, daß der Konstituent $kd15d$ in der Fixpunkt-Kondensation von φ_2 nicht vorkommt, und damit, daß er in der Fixpunkt-Kondensation von φ_1 vorkommt.
c) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$, $kd1g$ mit der Vielfachheit 2, $kd15b$ mit der Vielfachheit 2 und $kd24a$.

5.5.8. Bemerkung: **a)** Es sei nun das homomorphe Bild in F_{298} des in Bemerkung 5.5.5. definierten Teilmoduls $U_{16} < F_{368}$ wieder mit $U_{16} < F_{298}$ bezeichnet. U_{16} hat die Konstituenten $kd1g$ und $kd15b$ und enthält den eindeutig bestimmten $kd15b$-lokalen Teilmodul $U_{15} < F_{298}$ mit Dimension kleiner als 17. Durch Untersuchung des Sockels von F_{298}/U_{15} findet man, daß $U_{16} = U_{15} \oplus U_1$ gilt, wobei $U_1 < F_{298}$ das homomorphe Bild des in Bemerkung 5.5.4. ebenso genannten Teilmoduls bezeichnet. **b)** Nun findet man für den $kd15d$-lokalen Teilmodul $U_{32} < F_{298}$ der Dimension 32, daß $U_1, U_{15} < U_{32}$ und damit $U_{16} < U_{32}$ gilt. Daraus folgt sofort, daß in der 5-modularen Reduktion der gewöhnlichen Darstellung 93312 die irreduziblen Darstellungen 253 und 26335 vorkommen. Damit sind die Zerlegungszahlen dieses gewöhnlichen Charakters bekannt, es ist $\varphi_1 = 25255$ und $kd15d$ ist genuin.
c) Nun ist mit Bemerkung 5.5.7. bereits $U_{32} < U_{96}$, damit enthält auch der genuine Teilmodul U_{96} die genuinen Konstituenten $kd1g$ und $kd15b$. Also kommen die irreduziblen Darstellungen 253 und 26335 in der 5-modularen Reduktion der gewöhnlichen Darstellung 226688 mit der Vielfachheit 1 vor.
d) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$, $kd1f$ und $kd24a$.

χ	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	φ	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	
93312	34	23	1	$\underline{kd1c}$
		230	0	$\{0\}$
		253	1	$kd1g$
		20608	1	$\underline{kd1b}$
		20608*	1	$\underline{kd1g}$
		26335	15	$kd15b$
		25255	15	$kd15d$

5.5.9. Bemerkung: **a)** *Angenommen*, der aus φ_2 unter Fixpunkt-Kondensation entstehende Konstituent von $kd1311552$ enthielte für die Kondensationsalgebra neben dem Konstituenten $kd23a$ auch den Konstituenten $kd24a$. Nun findet man aber für den $kd23a$-lokalen Teilmodul $U_{64} < U_{96} < F_{298}$ die oberen zwei Loewy-Schichten als $kd23a$, $kd24a$. Also tritt in jeder aufsteigenden Kompositionsreihe von U_{96} der Konstituent $kd24a$ vor dem Konstituenten $kd23a$ auf. Andererseits existiert ein genuiner Teilmodul $U_{202} < F_{298}$, der unter Fixpunkt-Kondensation aus dem gewöhnlichen Komplement von 226688 in der Hauptblockkomponente von $p1311552$ entsteht. Man untersucht F_{298}/U_{202}, indem man die transponierte Darstellung $traF_{298}$, die man durch Transponieren der darstellenden Matrizen erhält, betrachtet. Wiederum findet man für den $kd23a$-lokalen Teilmodul $traU_{64} < traF_{298}$ die oberen zwei Loewy-Schichten als $kd23a$, $kd24a$. Also tritt in jeder aufsteigenden Kompositionsreihe von F_{298}/U_{202} der Konstituent $kd24a$ hinter dem Konstituenten $kd23a$ auf, *Widerspruch*.
Also kommt in der 5-modularen Reduktion der gewöhnlichen Darstellung 226688 die irreduzible Darstellung 52624 vor.
b) Damit verbleiben als noch nicht zugeordnete Konstituenten: $kd1a$, $kd1e$ und $kd1f$.

χ	$((\chi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	φ	$((\varphi)_{3^5:11}, 1)_{3^5:11}$	
226688	96	253	1	$kd1g$
		?	13	$\underline{kd13a}$
		20608	1	$\underline{kd1b}$
		20608*	1	$\underline{kd1g}$
		26335	15	$kd15b$
		52624	24	$kd24a$
		25255	15	$\underline{kd15d}$
		?	?	?
		?	?	?

5.6. Zerlegungszahlen für den Hauptblock IV

5.6.1. Bemerkung: Unter Beachtung der Bemerkungen 5.5.2., 5.5.4., 5.5.8. und 5.5.9. erkennt man noch einige weitere Einträge als Zerlegungszahlen für die korrespondierenden gewöhnlichen Charaktere, drei Charaktere als projektiv-unzerlegbar und findet die folgende achte Basis:

$$\begin{array}{rclrcl} \Psi_1^8 & := & \Psi_1^7 - \Psi_{18}^7, & \Psi_3^8 & := & \Psi_3^7 - \Psi_{18}^7, \\ \Psi_4^8 & := & \Psi_4^7 - \Psi_{18}^7, & \Psi_5^8 & := & \Psi_5^7 - \Psi_{18}^7. \end{array}$$

Damit sind die ersten 16 Spalten der Zerlegungsmatrix durch die folgenden Brauercharaktere indiziert:

$$1, 23, 230, 253, 896, 896^*, 1771a, 1771b, 3520, 5290, 20608, 20608^*, ?, 26335, 52624, 25255.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{23}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253a}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253b}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896^*}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{1771}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{2024}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{5544}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{7084}$	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{8855}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	1	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
$\underline{31878}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
$\underline{57960}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
$\underline{93312}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.
$\underline{129536a}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
$129536b$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
184437	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	1	.	.	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$
226688	1	.	.	$\underline{1}$	1	1	.	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
249480	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
255024	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
	.	u	u	u	.	.	u	u	.	u	u	u	u	u	u	.	u	u
Ω_8	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	−1

5.6.2. Bemerkung: In Bemerkung 5.6.1. ist die Darstellung der Hauptblockkomponente des folgenden projektiven Charakters in der dort angegebenen Basis wiedergegeben:

$$\Omega_8 \quad := \quad (\Phi_{8f})_{3_+^{1+4}:4S_6} \nearrow^{Co_3} - \ldots .$$

5.6.3. Bemerkung: Mit Bemerkung 5.6.2. findet man die folgende neunte Basis:

$$\Psi_9^9 \quad := \quad \Psi_9^8 - \Psi_{18}^8.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{23}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253a}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{253b}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{896^*}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{1771}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{2024}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{3520^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{5544}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{7084}$	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{8855}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	.
$\underline{20608^*}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
26082	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	1	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
$\underline{31878}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
$\underline{57960}$	$\underline{2}$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	.	.	.
80960	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
$\underline{93312}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.
$\underline{129536a}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
$129536b$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	3	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.
184437	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	1	.	.	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	$\underline{1}$
226688	1	.	.	$\underline{1}$	1	1	.	.	2	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
249480	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
255024	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	4	.	$\underline{2}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.
	.	u	u	u	.	.	u	u	.	u	u	u	u	u	u	.	u	u

5.7. Ausblick: Offene Fragen

5.7.1. Bemerkung: Um die Zerlegungszahlen für den Hauptblock von Co_3 vollständig zu bestimmen, müssen noch die folgenden in der Sprache der projektiven Charaktere gestellten Fragen beantwortet werden. Dies ergibt in der Tat noch 120 mögliche Fälle.
a) Ist $\Psi_{16}^9 - \Psi_{17}^9$ ein projektiver Charakter?
b) Ist $\Psi_9^9 - \Psi_{17}^9$ ein projektiver Charakter?
c) Ist $\Psi_9^9 - 2 \cdot \Psi_{17}^9$ ein projektiver Charakter?
d) Ist $\Psi_9^9 - \Psi_{13}^9$ ein projektiver Charakter?
e) Ist $\Psi_9^9 - \Psi_{18}^9$ ein projektiver Charakter?
f) Falls $\Psi_9^9 - \Psi_{13}^9$ kein projektiver Charakter ist, ist $\Psi_9^9 - 2 \cdot \Psi_{18}^9$ ein projektiver Charakter?
g) Ist $\Psi_6^9 - \Psi_{18}^9$ und damit auch $\Psi_5^9 - \Psi_{18}^9$ ein projektiver Charakter?
h) Ist $\Psi_1^9 - \Psi_{18}^9$ ein projektiver Charakter?

5.7.2. Bemerkung: **a)** Theoretisch sollte es möglich sein, die Fragen in den Bemerkungen 5.7.1.g) und h) durch die Untersuchung von $kd1311552hb$ zu beantworten. Immerhin korrespondiert die hinter diesen Fragen stehende Unbestimmtheit der Zerlegungszahlen direkt mit den noch nicht zugeordneten Konstituenten von $kd1311552hb$ aus Bemerkung 5.5.9. In der Tat stößt man aber bei der Strukturuntersuchung dieses Moduls wegen der Diskrepanz zwischen Hecke-Algebra und Kondensationsalgebra auf große Schwierigkeiten, die vermutlich eine Entscheidung dieser Fragen unter Verwendung von $kd1311552hb$ unmöglich machen. Dies wäre zu untersuchen.
b) Weiterhin bietet es sich zum einen an, eine weitere geeignete Permutationsdarstellung zu konstruieren und zu untersuchen, was wohl nahe an die Grenzen sowohl der überschaubaren Komplexität des

entstehenden Moduls als auch der Handhabbarkeit auf dem Rechner im Hinblick auf Speicherplatzbedarf und Rechenzeit gehen dürfte. Zum anderen kann man eine weitere Kondensationsuntergruppe wählen, was wohl zur Untersuchung des zur Darstellung 3520 gehörenden projektiv-unzerlegbaren Charakters ohnehin nötig wäre, die dann aber einige an das Problem angepaßte Eigenschaften haben müßte. Immerhin könnte man einen zur Vorgehensweise in den Abschnitten 5.2., 5.4. und 5.5. analogen Prozeß durchführen und eventuell auch eine Permutationsdarstellung noch höheren Grades erfolgreich untersuchen.
c) Schließlich wäre auch die Anwendbarkeit anderer Methoden, wie etwa des in Abschnitt 2.7. skizzierten Algorithmus, so er denn implementiert ist, zu untersuchen.

6. Epilog

6.1. Erwähnte Literatur

M. Aigner: Kombinatorik I, Springer, 1975.

J. Alperin: Local Representation Theory, Cambridge, 1986.

Atlas: Atlas Of Finite Groups, herausgegeben von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson, Clarendon, 1985.

D. Benson, J. Conway: Diagrams For Modular Lattices, Journal Of Pure And Applied Algebra, 37, 1985.

T. Breuer: Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1991.

Cas: User's Reference Manual, herausgegeben vom Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1988.

Cayley: A Language For Group Theory, Manchester, 1988.

C. Curtis, I. Reiner: Representation Theory Of Finite Groups And Associative Algebras, Wiley, 1988.

W. Feit: The Representation Theory Of Finite Groups, North Holland, 1982.

Gap: Getting Started And Reference Manual, herausgegeben von W. Nickel, A. Niemeyer, M. Schönert, RWTH Aachen, 1988.

G. Hiss, K. Lux: Brauer Trees Of Sporadic Groups, Oxford, 1989.

B. Huppert: Endliche Gruppen I, Springer, 1983.

M. Isaacs: Character Theory Of Finite Groups, Academic Press, 1976.

C. Jansen: Irreduzibilitätskriterien in der modularen Darstellungstheorie, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1991.

P. Landrock: Finite Group Algebras And Their Modules, Cambridge, 1983.

Modularer Atlas: Atlas Of Finite Groups: Modular Character Tables, unveröffentlicht.

W. Müller: Darstellungstheorie von endlichen Gruppen, Teubner, 1980.

J. Neubüser, W. Plesken, H. Pahlings: Cas; Design And Use Of A System For The Handling Of Characters Of Finite Groups, Computational Group Theory, 1984.

W. Nickel: Endliche Körper in dem gruppentheoretischen Programmsystem Gap, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1988.

R. Parker: The Computer Calculation Of Modular Characters, Computational Group Theory, 1984.

A. Ryba: Condensation Programs And Their Application To The Decomposition Of Modular Representations, Journal Of Symbolic Computation, 1990.

E. Stiefel, A. Fässler: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung, Teubner, 1979.

J. Thackray: Modular Representations Of Some Finite Groups, Dissertation, Cambridge, 1981.

6.2. Standarderzeuger

$$A_1 := \begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-2 & -1 & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & -1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & -1 & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-2 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-2 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & -1 & -1 & . & . & . & . & -1 & 1 & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & -1 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-2 & . & -1 & 2 & 1 & 1 & . & 1 & . & -1 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-4 & -2 & -1 & 2 & 1 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-2 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & . & 2 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & . & -2 & -1 & -1 & . & -1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & . & . & -2 & -1 & -1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . \\
3 & 1 & 1 & -3 & -1 & -1 & . & -2 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & . & -2 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & . & -2 & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . \\
. & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . \\
. & . & -1 & -1 & -1 & -1 & . & -1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . \\
-1 & -1 & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 & -1 & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1
\end{bmatrix}$$

$$
A_2 := \begin{bmatrix}
. & 2 & 1 & 3 & 3 & . & 1 & 3 & -1 & -1 & -2 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . \\
2 & -1 & . & -3 & -3 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & -1 & 1 & . & . \\
. & -1 & . & -1 & -1 & 1 & . & -2 & . & . & 2 & -1 & . & . & -1 & . & -1 & 1 & -1 & -1 & . & -1 & . & . \\
4 & . & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & . & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-3 & . & . & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & . & -1 & -1 & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . \\
2 & 3 & . & . & 1 & -1 & 1 & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 1 & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . \\
1 & 2 & 1 & . & 1 & . & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
2 & . & 2 & -3 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & 1 & -1 & 1 & . & 1 & . & 1 & -1 & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & 2 & 2 & 2 & 1 & . & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . \\
11 & -1 & 1 & -16 & -11 & -5 & -3 & -11 & 4 & 6 & 6 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -2 & . & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & . & -1 & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & -1 & . & 1 \\
6 & 2 & 1 & -7 & -4 & -3 & -1 & -4 & 1 & 2 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 & . & -1 & -1 & . & -1 & 1 & . & 1 \\
-6 & 2 & 1 & 12 & 8 & 4 & 3 & 9 & -4 & -5 & -5 & 1 & -2 & -1 & . & -2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & . & 1 & -1 \\
. & -2 & -1 & -2 & -2 & . & -1 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & . & . & -1 & . & . & -1 & . & -1 & . & . \\
2 & . & 1 & -1 & . & -1 & . & 1 & -1 & . & -1 & 1 & -1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & -1 \\
-2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 2 & 3 & -2 & -2 & -2 & . & -1 & -1 & . & -1 & 1 & . & . & . & 1 & -1 & . & . \\
-8 & . & -1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & -1 & -3 & -2 & . & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & . & . \\
-1 & . & -2 & -1 & -1 & . & 1 & -3 & 1 & 1 & 2 & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & . & -1 & -1 & . & -1 & -1 & . \\
8 & . & -1 & -1. & -8 & -4 & -3 & -7 & 3 & 4 & 3 & . & 2 & . & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 1 & . & 1 \\
8 & -1 & -1 & -11 & -8 & -5 & -4 & -7 & 3 & 6 & 3 & -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & . & -3 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
8 & -1 & . & -12 & -8 & -4 & -3 & -8 & 3 & 5 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & -1 & . \\
12 & -2 & . & -17 & -12 & -6 & -5 & -1. & 4 & 7 & 5 & . & 3 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\
-2 & . & -1 & 2 & 2 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & .
\end{bmatrix}
$$

6.3. Benutzte Charaktertafeln

6.3.1. Bemerkung: **a)** Die im vorliegenden Text verwendeten gewöhnlichen Charaktertafeln entstammen dem System Cas. Diese sind bis auf die im folgenden wiedergegebenen Ausnahmen identisch mit den im Atlas angegebenen Charaktertafeln, sofern diese überhaupt dort genannt sind. Die nicht im Atlas vorkommenden Charaktertafeln sind im folgenden wiedergegeben, sofern sie nicht als Kronecker-Produkte aus im Atlas angegebenen Charaktertafeln entstehen.
b) Für HS sind die oben mit $1925a$ respektive $1925b$ bezeichneten gewöhnlichen Charaktere im Atlas in umgekehrter Reihenfolge angegeben. Entsprechendes gilt für die Charaktere $105b$ und $105c$ respektive $189b$ und $189c$ von $2 \cdot S_6(2)$ sowie die Charaktere $469945476a$ und $469945476b$ von Co_1. Schließlich sind noch die Charaktere $253a$ und $253b$ respektive $129536a$ und $129536b$ von Co_3 im Atlas in umgekehrter Reihenfolge angegeben und auf die Charaktere $31625a$, $31625b$ und $31625c$ von Co_3 ist die Permutation (acb) anzuwenden, um die Reihenfolge des Atlas zu erhalten.

6.3.2. Bemerkung: Anschließend sind die gewöhnlichen Charaktertafeln der folgenden Gruppen im Format des Systems Cas wiedergegeben:
a) $U_4(3){:}(2^2)_{133}$,
b) $3^5{:}(2 \times M_{11})$,
c) $U_3(5){:}S_3$,
d) $3_+^{1+4}{:}4S_6$,
e) $2^4 \cdot A_8$,
f) $L_3(4){:}D_{12}$,
g) $2^2.[2^7.3^2].S_3$.

a) $U_4(3){:}(2^2)_{133}$

2	9	9	5	3	2	7	6	2	5	3	1	5	.	4	7	6	8	8	4	2	2	5	2	4	2	1	6	6	2	6	6	4	2	3	3	6	6	2	6	6	4	2	3	3
3	6	2	6	5	4	1	.	.	2	2	.	.	3	1	3	2	2	.	3	2	2	.	.	2	2	.	2	1	2	1	.	.	.	1	1	2	1	2	1	.	.	.	1	1
5	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
7	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	1a	2a	3a	3b	3c	4a	4b	5a	6a	6b	7a	8a	9a	12a	2b	2c	4c	4d	6c	6d	6e	8b	10a	12b	12c	14a	2d	4e	6f	8c	8d	8e	10b	12d	24a	2e	4f	6g	8f	8g	8h	10c	12e	24b
2P	1a	1a	3a	3b	3c	2a	2a	5a	3a	3b	7a	4a	9a	6a	1a	1a	2a	2a	3a	3b	3c	4a	5a	6a	6b	7a	1a	2a	3c	4a	4a	4b	5a	6a	12a	1a	2a	3c	4a	4a	4b	5a	6a	12a
3P	1a	2a	1a	1a	1a	4a	4b	5a	2a	2a	7a	8a	3a	4a	2b	2c	4c	4d	2b	2c	2b	8b	10a	4c	4c	14a	2d	4e	2d	8c	8d	8e	10b	4e	8c	2e	4f	2e	8f	8g	8h	10c	4f	8f
5P	1a	2a	3a	3b	3c	4a	4b	1a	6a	6b	7a	8a	9a	12a	2b	2c	4c	4d	6c	6d	6e	8b	2c	12b	12c	14a	2d	4e	6f	8c	8d	8e	2d	12d	24a	2e	4f	6g	8f	8g	8h	2e	12e	24b
7P	1a	2a	3a	3b	3c	4a	4b	5a	6a	6b	1a	8a	9a	12a	2b	2c	4c	4d	6c	6d	6e	8b	10a	12b	12c	2b	2d	4e	6f	8c	8d	8e	10b	12d	24a	2e	4f	6g	8f	8g	8h	10c	12e	24b
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.5	21	5	-6	3	3	1	1	1	2	-1	.	-1	.	-2	-7	1	5	-3	2	1	-1	-1	1	2	-1	.	1	-3	1	3	-1	-1	1	.	.	1	-3	1	3	-1	-1	1	.	.
X.6	21	5	-6	3	3	1	1	1	2	-1	.	-1	.	-2	7	-1	-5	3	-2	-1	1	1	-1	-2	1	.	1	-3	1	3	-1	-1	1	.	.	-1	3	-1	-3	1	1	-1	.	.
X.7	21	5	-6	3	3	1	1	1	2	-1	.	-1	.	-2	-7	1	5	-3	2	1	-1	-1	1	2	-1	.	-1	3	-1	-3	1	1	-1	.	.	-1	3	-1	-3	1	1	-1	.	.
X.8	21	5	-6	3	3	1	1	1	2	-1	.	-1	.	-2	7	-1	-5	3	-2	-1	1	1	-1	-2	1	.	-1	3	-1	-3	1	1	-1	.	.	1	-3	1	3	-1	-1	1	.	.
X.9	70	6	16	7	-2	6	-2	.	.	3	.	-2	1	.	14	-10	-2	-2	-4	-1	2	-2	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.10	70	6	16	7	-2	6	-2	.	.	3	.	-2	1	.	-14	10	2	2	4	1	-2	2	.	-4	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.11	90	10	9	9	.	-2	2	.	1	1	-1	.	.	1	6	10	10	2	-3	1	.	.	.	1	1	-1	.	4	.	2	-2	.	.	1	-1	.	4	.	2	-2	.	.	1	-1
X.12	90	10	9	9	.	-2	2	.	1	1	-1	.	.	1	-6	-10	-10	-2	3	-1	.	.	.	-1	-1	1	.	4	.	2	-2	.	.	1	-1	.	-4	.	-2	2	.	.	-1	1
X.13	90	10	9	9	.	-2	2	.	1	1	-1	.	.	1	6	10	10	2	-3	1	.	.	.	1	1	-1	.	-4	.	-2	2	.	.	-1	1	.	-4	.	-2	2	.	.	-1	1
X.14	90	10	9	9	.	-2	2	.	1	1	-1	.	.	1	-6	-10	-10	-2	3	-1	.	.	.	-1	-1	1	.	-4	.	-2	2	.	.	-1	1	.	4	.	2	-2	.	.	1	-1
X.15	140	12	5	-4	5	4	.	.	-3	.	.	.	-1	1	28	.	4	4	1	.	1	.	.	1	-2	.	10	2	1	2	2	.	.	-1	-1	10	2	1	2	2	.	.	-1	-1
X.16	140	12	5	-4	5	4	.	.	-3	.	.	.	-1	1	-28	.	-4	-4	-1	.	-1	.	.	-1	2	.	10	2	1	2	2	.	.	-1	-1	-10	-2	-1	-2	-2	.	.	1	1
X.17	140	12	5	-4	5	4	.	.	-3	.	.	.	-1	1	28	.	4	4	1	.	1	.	.	1	-2	.	-10	-2	-1	-2	-2	.	.	1	1	-10	-2	-1	-2	-2	.	.	1	1
X.18	140	12	5	-4	5	4	.	.	-3	.	.	.	-1	1	-28	.	-4	-4	-1	.	-1	.	.	-1	2	.	-10	-2	-1	-2	-2	.	.	1	1	10	2	1	2	2	.	.	-1	-1
X.19	189	-3	27	.	.	5	1	-1	3	.	.	1	.	-1	21	9	-3	-3	3	.	.	1	-1	3	.	.	9	1	.	1	1	-1	-1	1	1	9	1	.	1	1	-1	-1	1	1
X.20	189	-3	27	.	.	5	1	-1	3	.	.	1	.	-1	-21	-9	3	3	-3	.	.	-1	1	-3	.	.	9	1	.	1	1	-1	-1	1	1	-9	-1	.	-1	-1	1	1	-1	-1
X.21	189	-3	27	.	.	5	1	-1	3	.	.	1	.	-1	21	9	-3	-3	3	.	.	1	-1	3	.	.	-9	-1	.	-1	-1	1	1	-1	-1	-9	-1	.	-1	-1	1	1	-1	-1
X.22	189	-3	27	.	.	5	1	-1	3	.	.	1	.	-1	-21	-9	3	3	-3	.	.	-1	1	-3	.	.	-9	-1	.	-1	-1	1	1	-1	-1	9	1	.	1	1	-1	-1	1	1
X.23	210	2	21	3	3	-2	-2	.	5	-1	.	.	.	1	14	-10	10	2	5	-1	-1	.	.	1	1	.	-10	2	-1	4	.	.	.	-1	1	-10	2	-1	4	.	.	.	-1	1
X.24	210	2	21	3	3	-2	-2	.	5	-1	.	.	.	1	-14	10	-10	-2	-5	1	1	.	.	-1	-1	.	-10	2	-1	4	.	.	.	-1	1	10	-2	1	-4	.	.	.	1	-1
X.25	210	2	21	3	3	-2	-2	.	5	-1	.	.	.	1	14	-10	10	2	5	-1	-1	.	.	1	1	.	10	-2	1	-4	.	.	.	1	-1	10	-2	1	-4	.	.	.	1	-1
X.26	210	2	21	3	3	-2	-2	.	5	-1	.	.	.	1	-14	10	-10	-2	-5	1	1	.	.	-1	-1	.	10	-2	1	-4	.	.	.	1	-1	-10	2	-1	4	.	.	.	-1	1
X.27	1120	-32	40	22	4	.	.	.	-8	-2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.28	630	22	-18	9	.	-2	-2	.	-2	1	.	2	.	-2	-42	-10	14	-2	-6	-1	.	2	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.29	630	22	-18	9	.	-2	-2	.	-2	1	.	2	.	-2	42	10	-14	2	6	1	.	-2	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.30	420	4	-39	6	-3	4	.	.	1	-2	.	.	.	1	28	.	12	-4	1	.	1	.	.	-3	.	.	-10	-2	-1	2	2	.	.	1	-1	-10	-2	-1	2	2	.	.	1	-1
X.31	420	4	-39	6	-3	4	.	.	1	-2	.	.	.	1	-28	.	-12	4	-1	.	-1	.	.	3	.	.	-10	-2	-1	2	2	.	.	1	-1	10	2	1	-2	-2	.	.	-1	1
X.32	420	4	-39	6	-3	4	.	.	1	-2	.	.	.	1	28	.	12	-4	1	.	1	.	.	-3	.	.	10	2	1	-2	-2	.	.	-1	1	10	2	1	-2	-2	.	.	-1	1
X.33	420	4	-39	6	-3	4	.	.	1	-2	.	.	.	1	-28	.	-12	4	-1	.	-1	.	.	3	.	.	10	2	1	-2	-2	.	.	-1	1	-10	-2	-1	2	2	.	.	1	-1
X.34	1120	-32	-68	4	4	.	.	.	4	4	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.35	1280	.	-16	-16	2	.	.	.	.	.	-1	.	2	.	-64	.	.	.	8	.	2	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.36	1280	.	-16	-16	2	.	.	.	.	.	-1	.	2	.	64	.	.	.	-8	.	-2	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.37	729	9	.	.	.	-3	1	-1	.	.	1	-1	.	.	-27	9	9	1	.	.	.	-1	-1	.	.	1	9	-3	.	3	-1	1	-1	.	.	9	-3	.	3	-1	1	-1	.	.
X.38	729	9	.	.	.	-3	1	-1	.	.	1	-1	.	.	27	-9	-9	-1	.	.	.	1	1	.	.	-1	9	-3	.	3	-1	1	-1	.	.	-9	3	.	-3	1	-1	1	.	.
X.39	729	9	.	.	.	-3	1	-1	.	.	1	-1	.	.	-27	9	9	1	.	.	.	-1	-1	.	.	1	-9	3	.	-3	1	-1	1	.	.	-9	3	.	-3	1	-1	1	.	.
X.40	729	9	.	.	.	-3	1	-1	.	.	1	-1	.	.	27	-9	-9	-1	.	.	.	1	1	.	.	-1	-9	3	.	-3	1	-1	1	.	.	9	-3	.	3	-1	1	-1	.	.
X.41	896	.	32	-4	-4	.	.	1	.	.	.	.	-1	.	.	16	.	.	.	-2	.	.	1	.	.	.	16	.	-2	.	.	.	1	.	.	16	.	-2	.	.	.	1	.	.
X.42	896	.	32	-4	-4	.	.	1	.	.	.	.	-1	.	.	-16	.	.	.	2	.	.	-1	.	.	.	16	.	-2	.	.	.	1	.	.	-16	.	2	.	.	.	-1	.	.
X.43	896	.	32	-4	-4	.	.	1	.	.	.	.	-1	.	.	16	.	.	.	-2	.	.	1	.	.	.	-16	.	2	.	.	.	-1	.	.	-16	.	2	.	.	.	-1	.	.
X.44	896	.	32	-4	-4	.	.	1	.	.	.	.	-1	.	.	-16	.	.	.	2	.	.	-1	.	.	.	-16	.	2	.	.	.	-1	.	.	16	.	-2	.	.	.	1	.	.

b) $3^5{:}(2 \times M_{11})$

2	5	4	3	5	4	2	3	2	1	1	.	4	3	1	.	2	1	4	4	1	1	5	5	2	2	4	2	2	1	2	1	4	3	4	3	1	1
3	7	7	6	4	3	4	3	4	4	4	4	1	1	1	1	2	2	.	.	.	.	2	3	3	2	2	2	2	.	2	2	1	1	1	1	.	.
5	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
11	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1
	1a	3a	3b	2a	6a	6b	6c	3c	9a	3d	9b	4a	12a	5a	15a	6d	18a	8a	8b	11a	11b	2b	2c	6e	6f	4b	12b	12c	10a	6g	6h	8c	24a	8d	24b	22a	22b
2P	1a	3a	3b	1a	3a	3a	3b	3c	9a	3d	9b	2a	6a	5a	15a	3c	9a	4a	4a	11b	11a	1a	1a	3b	3c	2a	6c	6a	5a	3c	3d	4a	12a	4a	12a	11b	11a
3P	1a	1a	1a	2a	2a	2a	2a	1a	3a	1a	3a	4a	4a	5a	5a	2a	6b	8a	8b	11a	11b	2b	2c	2c	2b	4b	4b	4b	10a	2c	2c	8c	8c	8d	8d	22a	22b
5P	1a	3a	3b	2a	6a	6b	6c	3c	9a	3d	9b	4a	12a	1a	3b	6d	18a	8b	8a	11a	11b	2b	2c	6e	6f	4b	12b	12c	2b	6g	6h	8d	24b	8c	24a	22a	22b
11P	1a	3a	3b	2a	6a	6b	6c	3c	9a	3d	9b	4a	12a	5a	15a	6d	18a	8a	8b	1a	1a	2b	2c	6e	6f	4b	12b	12c	10a	6g	6h	8c	24a	8d	24b	2b	2b
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	10	10	10	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	.	.	-1	-1	.	.	-1	-1	10	2	2	1	2	2	2	.	-1	-1	.	.	.	.	-1	-1
X.3	10	10	10	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	A	/A	-1	-1	10	-2	-2	1	.	.	.	.	1	1	A	A	/A	/A	-1	-1
X.4	10	10	10	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	/A	A	-1	-1	10	-2	-2	1	.	.	.	.	1	1	/A	/A	A	A	-1	-1
X.5	11	11	11	3	3	3	3	2	2	2	2	-1	-1	1	1	.	.	-1	-1	.	.	11	3	3	2	-1	-1	-1	1	.	.	-1	-1	-1	-1	.	.
X.6	16	16	16	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	.	.	.	.	B	/B	16	.	.	-2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	B	/B
X.7	16	16	16	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	.	.	.	.	/B	B	16	.	.	-2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	/B	B
X.8	44	44	44	4	4	4	4	-1	-1	-1	-1	.	.	-1	-1	1	1	.	.	.	.	44	4	4	-1	.	.	.	-1	1	1	.	.	.	.	.	.
X.9	45	45	45	-3	-3	-3	-3	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	-1	-1	1	1	45	-3	-3	.	1	1	1	.	.	.	-1	-1	-1	-1	1	1
X.10	55	55	55	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	.	.	-1	-1	1	1	.	.	55	-1	-1	1	-1	-1	-1	.	-1	-1	1	1	1	1	.	.
X.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.12	10	10	10	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	.	.	-1	-1	.	.	-1	-1	-10	-2	-2	-1	-2	-2	-2	.	1	1	.	.	.	.	1	1
X.13	10	10	10	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	A	/A	-1	-1	-10	2	2	-1	.	.	.	.	-1	-1	/A	/A	A	A	1	1
X.14	10	10	10	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	/A	A	-1	-1	-10	2	2	-1	.	.	.	.	-1	-1	A	A	/A	/A	1	1
X.15	11	11	11	3	3	3	3	2	2	2	2	-1	-1	1	1	.	.	-1	-1	.	.	-11	-3	-3	-2	1	1	1	-1	.	.	1	1	1	1	.	.
X.16	16	16	16	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	.	.	.	.	B	/B	-16	.	.	2	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	-B	-/B
X.17	16	16	16	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	.	.	.	.	/B	B	-16	.	.	2	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	-/B	-B
X.18	44	44	44	4	4	4	4	-1	-1	-1	-1	.	.	-1	-1	1	1	.	.	.	.	-44	-4	-4	1	.	.	.	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.
X.19	45	45	45	-3	-3	-3	-3	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	-1	-1	1	1	-45	3	3	.	-1	-1	-1	.	.	.	1	1	1	1	-1	-1
X.20	55	55	55	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	.	.	-1	-1	1	1	.	.	-55	1	1	-1	1	1	1	.	1	1	-1	-1	-1	-1	.	.
X.21	22	-5	4	6	3	-3	.	4	-2	-2	1	2	-1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	-2	1	.	.	.	2	-1	2	-1	.	.
X.22	22	-5	4	6	3	-3	.	4	-2	-2	1	2	-1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-4	2	-1	.	.	.	-2	1	-2	1	.	.
X.23	198	-45	36	6	3	-3	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	-2	1	.	.	.	-2	1	-2	1	.	.
X.24	198	-45	36	6	3	-3	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-4	2	-1	.	.	.	2	-1	2	-1	.	.
X.25	220	-50	40	12	6	-6	.	4	-2	-2	1	-4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.26	220	-50	40	-12	-6	6	.	4	-2	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	/A	/C	A	.	.
X.27	220	-50	40	-12	-6	6	.	4	-2	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	/C	A	C	/A	.	.
X.28	352	-80	64	.	.	.	.	-8	4	4	-2	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.29	220	4	-5	20	-4	2	-1	4	1	1	-2	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	8	-1	.	4	1	-2	.	2	-1	.	.	.	.	.	.
X.30	220	4	-5	20	-4	2	-1	4	1	1	-2	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	-8	1	.	-4	-1	2	.	-2	1	.	.	.	.	.	.
X.31	220	4	-5	4	4	4	-5	4	1	1	-2	.	.	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	-8	1	.	4	1	-2	.	-2	1	.	.	.	.	.	.
X.32	220	4	-5	4	4	4	-5	4	1	1	-2	.	.	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	8	-1	.	-4	-1	2	.	2	-1	.	.	.	.	.	.
X.33	440	8	-10	-24	.	-6	6	8	2	2	-4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.34	880	16	-20	16	-8	-2	4	-2	-5	4	1	.	.	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.35	880	16	-20	-16	8	2	-4	-2	-5	4	1	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.36	880	16	-20	.	.	.	.	-2	4	-5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-16	2	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.
X.37	880	16	-20	.	.	.	.	-2	4	-5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	-2	.	.	.	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	.

```
n = 8    A = -/A = w3 -w5 = sqrt(-2)
n = 11   B = w +w3 +w4 +w5 +w9 = (-1 + sqrt(-11)) / 2
n = 8    C = -/C = 2w3 -2w5 = 2 * sqrt(-2)
```

c) $U_3(5){:}S_3$

2	5	5	3	4	2	1	3	.	3	2	4	4	2	3	1	2	2	2	4	.	4	2	3	1	.	.	3	3	1
3	3	2	3	1	1	.	2	1	1	1	1	1	1	.	.	1	.	.	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
5	3	1	.	.	3	2	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1
7	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.
	1a	2a	3a	4a	5a	5b	6a	7a	8a	10a	2b	4b	6b	8b	10b	12a	20a	20b	3b	3c	6c	6d	12b	15a	21a	21b	24a	24b	30a
2P	1a	1a	3a	2a	5a	5b	3a	7a	4a	5a	1a	2a	3a	4a	5b	6a	10a	10a	3b	3c	3b	3b	6c	15a	21b	21a	12b	12b	15a
3P	1a	2a	1a	4a	5a	5b	2a	7a	8a	10a	2b	4b	2b	8b	10b	4b	20a	20b	1a	1a	2a	2a	4a	5a	7a	7a	8a	8a	10a
5P	1a	2a	3a	4a	1a	1a	6a	7a	8a	2a	2b	4b	6b	8b	2b	12a	4b	4b	3b	3c	6c	6d	12b	3b	21a	21b	24a	24b	6c
7P	1a	2a	3a	4a	5a	5b	6a	1a	8a	10a	2b	4b	6b	8b	10b	12a	20a	20b	3b	3c	6c	6d	12b	15a	3c	3c	24b	24a	30a
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.4	20	-4	2	.	-5	.	2	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	A	/A	-4	-1	-4	2	.	1	-1	-1	.	.	1
X.5	20	-4	2	.	-5	.	2	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	/A	A	-4	-1	-4	2	.	1	-1	-1	.	.	1
X.6	40	-8	4	.	-10	.	4	-2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	4	-2	.	-1	1	1	.	.	-1
X.7	21	5	3	1	-4	1	-1	.	-1	.	1	5	1	-1	1	-1	.	.	-3	.	5	-1	1	2	.	.	-1	-1	.
X.8	21	5	3	1	-4	1	-1	.	-1	.	-1	-5	-1	1	-1	1	.	.	-3	.	5	-1	1	2	.	.	-1	-1	.
X.9	42	10	6	2	-8	2	-2	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	-5	1	-1	-2	.	.	1	1	.
X.10	84	12	3	.	9	-1	3	.	.	-3	4	4	1	.	-1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.11	84	12	3	.	9	-1	3	.	.	-3	-4	-4	-1	.	1	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.12	84	-4	3	.	9	-1	-1	.	.	1	4	-4	1	.	-1	-1	1	1	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	-2
X.13	84	-4	3	.	9	-1	-1	.	.	1	-4	4	-1	.	1	1	-1	-1	.	.	8	2	.	.	.	.	.	.	-2
X.14	168	-8	6	.	18	-2	-2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-8	-2	.	.	.	.	.	.	2
X.15	105	1	-3	1	5	.	1	.	-1	1	5	1	-1	-1	.	1	1	1	9	.	1	1	1	-1	.	.	-1	-1	1
X.16	105	1	-3	1	5	.	1	.	-1	1	-5	-1	1	1	.	-1	-1	-1	9	.	1	1	1	-1	.	.	-1	-1	1
X.17	210	2	-6	2	10	.	2	.	-2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-9	.	-1	-1	-1	1	.	.	1	1	-1
X.18	125	5	-1	1	.	.	-1	-1	1	.	5	5	-1	1	.	-1	.	.	5	-1	5	-1	1	.	-1	-1	1	1	.
X.19	125	5	-1	1	.	.	-1	-1	1	.	-5	-5	1	-1	.	1	.	.	5	-1	5	-1	1	.	-1	-1	1	1	.
X.20	250	10	-2	2	.	.	-2	-2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-5	1	-5	1	-1	.	1	1	-1	-1	.
X.21	126	6	.	-2	1	1	.	.	.	1	6	-6	.	.	1	.	-1	-1	6	.	6	.	-2	1	.	.	.	.	1
X.22	126	6	.	-2	1	1	.	.	.	1	-6	6	.	.	-1	.	1	1	6	.	6	.	-2	1	.	.	.	.	1
X.23	252	12	.	-4	2	2	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	-6	.	2	-1	.	.	.	.	-1
X.24	252	-12	.	.	2	2	.	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	12	.	-12	.	.	2	.	.	.	.	-2
X.25	252	-12	.	.	2	2	.	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	6	.	.	-1	.	.	B	*B	1
X.26	252	-12	.	.	2	2	.	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	6	.	.	-1	.	.	*B	B	1
X.27	288	.	.	.	-12	-2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	.	.	.	1	1	.	.	.
X.28	288	.	.	.	-12	-2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	C	*C	.	.	.
X.29	288	.	.	.	-12	-2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	*C	C	.	.	.

n = 20   A = -/A = w7 +w9 -w11 -w13 = sqrt(-5)
n = 24   B = /B = w7 +w11 +w13 +w17 = - sqrt(6)
n = 21   C = /C = -w2 -w8 -w10 -w11 -w13 -w19 = (-1 + sqrt(21)) / 2

d) $3_+^{1+4}{:}4S_6$

2	6	5	2	6	5	5	4	2	5	2	5	2	3	2	.	3	2	1	1	5	5	5	4	5	4	2	1	3	2	3	2	2	2	2
3	7	7	6	3	3	4	4	3	3	3	2	2	5	5	4	5	5	4	4	2	1	2	2	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3
5	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
	1a	3a	3b	2a	6a	2b	6b	6c	2c	6d	2d	6e	3c	3d	9a	3e	3f	3g	9b	4a	4b	4c	12a	4d	12b	5a	15a	6f	6g	6h	6i	6j	6k	6l
2P	1a	3a	3b	1a	3a	1a	3a	3b	1a	3b	1a	3b	3c	3d	9a	3e	3f	3g	9b	2a	2a	2a	6a	2a	6a	5a	15a	3c	3d	3e	3f	3e	3f	3f
3P	1a	1a	1a	2a	2a	2b	2b	2b	2c	2c	2d	2d	1a	1a	3a	1a	1a	1a	3a	4a	4b	4c	4c	4d	4d	5a	5a	2a	2a	2a	2a	2b	2b	2b
5P	1a	3a	3b	2a	6a	2b	6b	6c	2c	6d	2d	6e	3c	3d	9a	3e	3f	3g	9b	4a	4b	4c	12a	4d	12b	1a	3a	6f	6g	6h	6i	6j	6k	6l
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
X.3	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
X.4	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.5	5	5	5	5	5	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	-1	-1	-1	-1	5	-3	-3	-3	1	1	.	.	2	2	-1	-1	1	1	1
X.6	5	5	5	5	5	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-5	-3	3	3	1	1	.	.	2	2	-1	-1	-1	-1	-1
X.7	5	5	5	5	5	3	3	3	3	3	1	1	-1	-1	-1	2	2	2	2	5	-1	-1	-1	1	1	.	.	-1	-1	2	2	.	.	.
X.8	5	5	5	5	5	1	1	1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-5	3	-3	-3	1	1	.	.	2	2	-1	-1	1	1	1
X.9	5	5	5	5	5	3	3	3	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	-5	1	-1	-1	1	1	.	.	-1	-1	2	2	.	.	.
X.10	5	5	5	5	5	-3	-3	-3	-3	-3	1	1	-1	-1	-1	2	2	2	2	5	1	1	1	1	1	.	.	-1	-1	2	2	.	.	.
X.11	5	5	5	5	5	-3	-3	-3	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2	-5	-1	1	1	1	1	.	.	-1	-1	2	2	.	.	.
X.12	5	5	5	5	5	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	2	2	2	-1	-1	-1	-1	5	3	3	3	1	1	.	.	2	2	-1	-1	-1	-1	-1
X.13	8	8	8	-8	-8	.	.	.	.	.	.	.	-4	-4	-4	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.	-2	-2	4	4	-2	-2	.	.	.
X.14	8	8	8	-8	-8	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	-4	-4	-4	-4	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	4	4	.	.	.
X.15	9	9	9	9	9	-3	-3	-3	3	3	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	-9	3	-3	-3	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.16	9	9	9	9	9	-3	-3	-3	-3	-3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	9	-3	-3	-3	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.17	9	9	9	9	9	3	3	3	-3	-3	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	-9	-3	3	3	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.18	9	9	9	9	9	3	3	3	3	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	9	3	3	3	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.19	10	10	10	10	10	2	2	2	-2	-2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	-10	2	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	1	1	-1	-1	-1
X.20	10	10	10	10	10	2	2	2	2	2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	1	10	-2	-2	-2	-2	-2	.	.	1	1	1	1	-1	-1	-1
X.21	10	10	10	10	10	-2	-2	-2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	-10	-2	2	2	-2	-2	.	.	1	1	1	1	1	1	1
X.22	10	10	10	10	10	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	1	10	2	2	2	-2	-2	.	.	1	1	1	1	1	1	1
X.23	16	16	16	16	16	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	16	.	.	.	.	.	1	1	-2	-2	-2	-2	.	.	.
X.24	16	16	16	-16	-16	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	.	.	.	.	.	.	1	1	2	2	2	2	.	.	.
X.25	16	16	16	-16	-16	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	.	.	.	.	.	.	1	1	2	2	2	2	.	.	.
X.26	16	16	16	16	16	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-16	.	.	.	.	.	1	1	-2	-2	-2	-2	.	.	.
X.27	20	20	20	-20	-20	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	.
X.28	20	20	20	-20	-20	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	2	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2	-2	.	.	.
X.29	80	80	-1	.	.	8	8	-1	8	-1	8	-1	8	8	-1	8	8	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2
X.30	80	80	-1	.	.	-8	-8	1	8	-1	-8	1	8	8	-1	8	8	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2
X.31	80	80	-1	.	.	-8	-8	1	-8	1	8	-1	8	8	-1	8	8	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2
X.32	80	80	-1	.	.	8	8	-1	-8	1	-8	1	8	8	-1	8	8	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2
X.33	160	160	-2	.	.	16	16	-2	.	.	.	.	-8	-8	1	4	4	4	-5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	-2
X.34	160	160	-2	.	.	.	.	.	16	-2	.	.	-8	-8	1	4	4	-5	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.35	160	160	-2	.	.	.	.	.	-16	2	.	.	-8	-8	1	4	4	-5	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.36	160	160	-2	.	.	-16	-16	2	.	.	.	.	-8	-8	1	4	4	4	-5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2
X.37	320	320	-4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	-1	-16	-16	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.38	18	-9	.	2	-1	6	-3	.	.	.	.	.	-6	3	.	6	-3	.	.	.	.	-2	1	2	-1	-2	1	2	-1	2	-1	.	3	-3
X.39	18	-9	.	2	-1	-6	3	.	.	.	.	.	-6	3	.	6	-3	.	.	.	.	2	-1	2	-1	-2	1	2	-1	2	-1	.	-3	3
X.40	72	-36	.	-8	4	.	.	.	.	.	.	.	12	-6	.	6	-3	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	4	-2	-2	1	-6	3	3
X.41	72	-36	.	-8	4	.	.	.	.	.	.	.	12	-6	.	6	-3	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	4	-2	-2	1	6	-3	-3
X.42	72	-36	.	-8	4	.	.	.	.	.	.	.	-6	3	.	-12	6	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	4	-2	.	.	.
X.43	72	-36	.	-8	4	.	.	.	.	.	.	.	-6	3	.	-12	6	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	-2	1	4	-2	.	.	.
X.44	90	-45	.	10	-5	-18	9	.	.	.	.	.	6	-3	.	12	-6	.	.	.	.	-2	1	2	-1	.	.	-2	1	4	-2	.	.	.
X.45	90	-45	.	10	-5	6	-3	.	.	.	.	.	-12	6	.	-6	3	.	.	.	.	6	-3	2	-1	.	.	4	-2	-2	1	.	3	-3
X.46	90	-45	.	10	-5	-6	3	.	.	.	.	.	-12	6	.	-6	3	.	.	.	.	-6	3	2	-1	.	.	4	-2	-2	1	.	-3	3
X.47	90	-45	.	10	-5	18	-9	.	.	.	.	.	6	-3	.	12	-6	.	.	.	.	2	-1	2	-1	.	.	-2	1	4	-2	.	.	.
X.48	162	-81	.	18	-9	-18	9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	-3	2	-1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.49	162	-81	.	18	-9	18	-9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	3	2	-1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.50	180	-90	.	20	-10	-12	6	.	.	.	.	.	-6	3	.	6	-3	.	.	.	.	-4	2	-4	2	.	.	2	-1	2	-1	.	3	-3
X.51	180	-90	.	20	-10	12	-6	.	.	.	.	.	-6	3	.	6	-3	.	.	.	.	4	-2	-4	2	.	.	2	-1	2	-1	.	-3	3
X.52	288	-144	.	-32	16	.	.	.	.	.	.	.	12	-6	.	-12	6	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	4	-2	4	-2	.	.	.
X.53	288	-144	.	32	-16	.	.	.	.	.	.	.	12	-6	.	-12	6	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	-4	2	-4	2	.	.	.
X.54	360	-180	.	-40	20	.	.	.	.	.	.	.	-12	6	.	12	-6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-4	2	-4	2	.	.	.

	18a	6m	6n	8a	8b	8c	24a	8d	8e	24b	10a	30a	12c	12d	12e	12f	12g	12h	20a	20b
2	1	2	1	5	5	4	3	4	4	3	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	.	.	1	1	.	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	.	.
5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1
2P	9b	3e	3g	4d	4d	4d	12b	4d	4d	12b	5a	15a	6f	6h	6f	6g	6g	6f	10a	10a
3P	6b	2c	2c	8a	8b	8c	8c	8d	8e	8e	10a	10a	4a	4a	4c	4c	4c	4b	20a	20b
5P	18a	6m	6n	8b	8a	8c	24a	8d	8e	24b	2a	6a	12c	12d	12e	12f	12g	12h	4a	4a
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
X.3	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
X.4	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
X.5	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.
X.6	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	.
X.7	.	.	.	-1	-1	1	1	1	-1	-1	.	.	-1	2	-1	-1	-1	-1	.	.
X.8	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	.
X.9	.	.	.	1	1	1	1	-1	-1	-1	.	.	1	-2	-1	-1	-1	1	.	.
X.10	.	.	.	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	-1	2	1	1	1	1	.	.
X.11	.	.	.	1	1	-1	-1	1	-1	-1	.	.	1	-2	1	1	1	-1	.	.
X.12	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.
X.13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
X.14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.
X.15	.	.	.	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	1	1
X.16	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	-1	-1
X.17	.	.	.	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	1	1
X.18	.	.	.	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	-1	-1
X.19	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	1	1	1	-1	.	.
X.20	-1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.
X.21	1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	-1	-1	-1	1	.	.
X.22	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-1	-1	-1	-1	.	.
X.23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-2	-2	.	.	.	.	1	1
X.24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	.	.	.	.	.	.	C	/C
X.25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	-1	.	.	.	.	.	.	/C	C
X.26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	2	.	.	.	.	-1	-1
X.27	.	.	.	A	/A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.28	.	.	.	/A	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.29	-1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.30	1	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.31	1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.32	-1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.33	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.34	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.35	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.36	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.38	.	.	.	.	.	2	-1	.	-2	1	2	-1	.	.	-2	1	1	.	.	.
X.39	.	.	.	.	.	-2	1	.	-2	1	2	-1	.	.	2	-1	-1	.	.	.
X.40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.42	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	B	/B	.	.	.
X.43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	/B	B	.	.	.
X.44	.	.	.	.	.	-2	1	.	2	-1	.	.	.	.	-2	1	1	.	.	.
X.45	.	.	.	.	.	-2	1	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.46	.	.	.	.	.	2	-1	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.47	.	.	.	.	.	2	-1	.	2	-1	.	.	.	.	2	-1	-1	.	.	.
X.48	.	.	.	.	.	2	-1	.	-2	1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.49	.	.	.	.	.	-2	1	.	-2	1	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	-1	.	.	.
X.51	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	1	.	.	.
X.52	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.53	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.54	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

```
n = 8    A = -/A = 2w3 -2w5 = 2 * sqrt(-2)
n = 4    B = -/B = 3w = 3 * sqrt(-1)
n = 20   C = -/C = w7 +w9 -w11 -w13 = sqrt(-5)
```

e) $2^4 \cdot A_8$

2	10	10	9	7	9	7	7	2	3	3	6	6	5	4	4	.	2	2	2	1	1	1	1	.	.
3	2	1	.	1	1	1	.	2	2	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1
5	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
7	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.
	1a	2a	4a	2b	4b	2c	4c	3a	3b	6a	8a	8b	8c	4d	8d	5a	6b	12a	6c	7a	14a	7b	14b	15a	15b
2P	1a	1a	2a	1a	2a	1a	2a	3a	3b	3b	4a	4a	4a	2c	4c	5a	3a	6a	3b	7a	7a	7b	7b	15a	15b
3P	1a	2a	4a	2b	4b	2c	4c	1a	1a	2a	8a	8b	8c	4d	8d	5a	2c	4b	2b	7b	14b	7a	14a	5a	5a
5P	1a	2a	4a	2b	4b	2c	4c	3a	3b	6a	8a	8b	8c	4d	8d	1a	6b	12a	6c	7b	14b	7a	14a	3a	3a
7P	1a	2a	4a	2b	4b	2c	4c	3a	3b	6a	8a	8b	8c	4d	8d	5a	6b	12a	6c	1a	2a	1a	2a	15b	15a
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	7	7	-1	-1	-1	3	3	4	1	1	-1	-1	-1	1	1	2	.	-1	-1	.	.	.	.	-1	-1
X.3	14	14	6	6	6	2	2	-1	2	2	2	2	2	.	.	-1	-1	.	.	.	.	.	.	-1	-1
X.4	20	20	4	4	4	4	4	5	-1	-1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	-1	-1	-1	-1	.	.
X.5	21	21	-3	-3	-3	1	1	6	.	.	1	1	1	-1	-1	1	-2	.	.	.	.	.	.	1	1
X.6	21	21	-3	-3	-3	1	1	-3	.	.	1	1	1	-1	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	B	/B
X.7	21	21	-3	-3	-3	1	1	-3	.	.	1	1	1	-1	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	/B	B
X.8	28	28	-4	-4	-4	4	4	1	1	1	.	.	.	.	.	-2	1	-1	-1	.	.	.	.	1	1
X.9	35	35	3	3	3	-5	-5	5	2	2	-1	-1	-1	-1	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
X.10	45	45	-3	-3	-3	-3	-3	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	A	A	/A	/A	.	.
X.11	45	45	-3	-3	-3	-3	-3	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	/A	/A	A	A	.	.
X.12	56	56	8	8	8	.	.	-4	-1	-1	.	.	.	.	.	1	.	-1	-1	.	.	.	.	1	1
X.13	64	64	.	.	.	.	.	4	-2	-2	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	1	1	1	1	-1	-1
X.14	70	70	-2	-2	-2	2	2	-5	1	1	-2	-2	-2	.	.	.	-1	1	1	.	.	.	.	.	.
X.15	15	-1	3	-1	-5	3	-1	.	3	-1	-3	1	1	1	-1	.	.	1	-1	1	-1	1	-1	.	.
X.16	45	-3	1	-3	9	-3	1	.	.	.	-1	3	-1	1	-1	.	.	.	.	A	-A	/A	-/A	.	.
X.17	45	-3	1	-3	9	-3	1	.	.	.	-1	3	-1	1	-1	.	.	.	.	/A	-/A	A	-A	.	.
X.18	90	-6	10	-6	-6	6	-2	.	.	.	-2	-2	2	.	.	.	.	.	.	-1	1	-1	1	.	.
X.19	105	-7	5	-7	13	-3	1	.	3	-1	3	-1	-1	-1	1	.	.	1	-1	.	.	.	.	.	.
X.20	120	-8	8	-8	8	.	.	.	-3	1	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	1	-1	1	-1	.	.
X.21	105	-7	-3	1	5	9	-3	.	3	-1	3	-1	-1	1	-1	.	.	-1	1	.	.	.	.	.	.
X.22	105	-7	5	1	-19	-3	1	.	3	-1	-1	3	-1	-1	1	.	.	-1	1	.	.	.	.	.	.
X.23	210	-14	2	2	-14	6	-2	.	-3	1	2	2	-2	.	.	.	.	1	-1	.	.	.	.	.	.
X.24	315	-21	-9	3	15	3	-1	.	.	.	-3	1	1	-1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.25	315	-21	-1	3	-9	-9	3	.	.	.	1	-3	1	1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

```
n = 7    A = w +w2 +w4 = (-1 + sqrt(-7)) / 2
n = 15   B = -w7 -w11 -w13 -w14 = (-1 + sqrt(-15)) / 2
```

f) $L_3(4){:}D_{12}$

2	8	8	2	6	1	1	5	5	2	4	2	1	2	3	1	3	.	.	5	5	2	4	1	4	2	5	5	1
3	3	1	3	.	1	1	3	1	3	.	2	2	1	2	2	1	1	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.
5	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
7	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
	1a	2a	3a	4a	5a	7a	2b	4b	6a	8a	6b	6c	12a	3b	3c	6d	15a	21a	2c	4c	6e	8b	14a	2d	6f	8c	8d	10a
2P	1a	1a	3a	2a	5a	7a	1a	2a	3a	4a	3b	3c	6d	3b	3c	3b	15a	21a	1a	2a	3a	4a	7a	1a	3a	4a	4a	5a
3P	1a	2a	1a	4a	5a	7a	2b	4b	2b	8a	2b	2b	4b	1a	1a	2a	5a	7a	2c	4c	2c	8b	14a	2d	2d	8c	8d	10a
5P	1a	2a	3a	4a	1a	7a	2b	4b	6a	8a	6b	6c	12a	3b	3c	6d	3b	21a	2c	4c	6e	8b	14a	2d	6f	8c	8d	2d
7P	1a	2a	3a	4a	5a	1a	2b	4b	6a	8a	6b	6c	12a	3b	3c	6d	15a	3c	2c	4c	6e	8b	2c	2d	6f	8c	8d	10a
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X.3	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
X.4	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
X.5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.6	2	2	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.7	20	4	2	.	.	-1	2	-2	2	.	-1	-1	1	5	-1	1	.	-1	6	2	.	.	-1	.	.	-2	2	.
X.8	20	4	2	.	.	-1	2	-2	2	.	-1	-1	1	5	-1	1	.	-1	-6	-2	.	.	1	.	.	2	-2	.
X.9	20	4	2	.	.	-1	-2	2	-2	.	1	1	-1	5	-1	1	.	-1	6	2	.	.	-1	.	.	2	-2	.
X.10	20	4	2	.	.	-1	-2	2	-2	.	1	1	-1	5	-1	1	.	-1	-6	-2	.	.	1	.	.	-2	2	.
X.11	40	8	4	.	.	-2	4	-4	4	.	1	1	-1	-5	1	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.12	40	8	4	.	.	-2	-4	4	-4	.	-1	-1	1	-5	1	-1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.13	105	9	-3	1	.	.	3	3	3	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	7	-1	1	-1	.	5	-1	1	1	.
X.14	105	9	-3	1	.	.	-3	-3	-3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	7	-1	1	-1	.	-5	1	-1	-1	.
X.15	105	9	-3	1	.	.	3	3	3	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	-7	1	-1	1	.	-5	1	-1	-1	.
X.16	105	9	-3	1	.	.	-3	-3	-3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-7	1	-1	1	.	5	-1	1	1	.
X.17	90	-6	.	2	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	-1	6	-2	.	2	-1	.	.	.	.	.
X.18	90	-6	.	2	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	.	-1	-6	2	.	-2	1	.	.	.	.	.
X.19	180	-12	.	4	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.20	126	-2	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	6	.	-2	-2	1
X.21	126	-2	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	6	.	-2	1	.	.	.	.	.	.	-6	.	2	2	-1
X.22	252	-4	.	-4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-6	.	2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.23	64	.	1	.	-1	1	8	.	-1	.	2	-1	.	4	1	.	-1	1	8	.	-1	.	1	4	1	.	.	-1
X.24	64	.	1	.	-1	1	8	.	-1	.	2	-1	.	4	1	.	-1	1	-8	.	1	.	-1	-4	-1	.	.	1
X.25	64	.	1	.	-1	1	-8	.	1	.	-2	1	.	4	1	.	-1	1	8	.	-1	.	1	-4	-1	.	.	1
X.26	64	.	1	.	-1	1	-8	.	1	.	-2	1	.	4	1	.	-1	1	-8	.	1	.	-1	4	1	.	.	-1
X.27	128	.	2	.	-2	2	16	.	-2	.	-2	1	.	-4	-1	.	1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.28	128	.	2	.	-2	2	-16	.	2	.	2	-1	.	-4	-1	.	1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

g) $2^2.[2^7.3^2].S_3$

2	10	10	8	7	7	6	7	5	5	3	3	2	9	9	7	7	8	6	7	7	5	5	4	3	3	3	2	2	2	6	6	6	6	6	6	5	5	5	4	4	3	2	2	3	3
3	3	2	1	1	1	1	.	1	2	3	2	2	1	1	1	1	.	1	.	.	.	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
	1a	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d	4e	4f	4g	4h	4i	6a	6b	6c	6d	6e	6f	6g	6h	8a	8b	8c	8d	8e	8f	8g	8h	8i	12a	12b	12c	12d	12e	24a	24b
2P	1a	1a	1a	1a	1a	1a	1a	1a	3a	3b	3c	3d	2a	2a	2a	2b	2a	2a	2b	2a	2b	3a	3a	3b	3c	3a	3c	3b	3d	4a	4a	4e	4e	4e	4e	4a	4e	4e	6a	6a	6a	6c	6d	12a	12a
3P	1a	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	1a	1a	1a	1a	4a	4b	4c	4d	4e	4f	4g	4h	4i	2a	2a	2a	2b	2e	2g	2c	2d	8a	8b	8c	8d	8e	8f	8g	8h	8i	4a	4b	4f	4c	4d	8a	8b
X.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X.2	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
X.3	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1
X.4	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
X.5	2	2	2	.	2	2	.	.	-1	2	2	-1	2	2	.	.	2	2	.	.	2	-1	-1	2	2	-1	.	.	-1	2	2	.	.	.	.	.	.	2	-1	-1	-1	.	.	-1	-1
X.6	2	2	2	.	2	.	.	2	2	2	-1	-1	2	2	.	2	2	.	2	.	.	2	2	2	-1	.	-1	.	-1	.	.	2	2	.	.	2	.	.	2	2	.	.	-1	.	.
X.7	2	2	2	.	2	.	.	-2	2	2	-1	-1	2	2	.	-2	2	.	-2	.	.	2	2	2	-1	.	1	.	-1	.	.	-2	-2	.	.	-2	.	.	2	2	.	.	1	.	.
X.8	2	2	2	.	2	-2	.	.	-1	2	2	-1	2	2	.	.	2	-2	.	.	-2	-1	-1	2	2	1	.	.	-1	-2	-2	.	.	.	.	.	.	-2	-1	-1	1	.	.	1	1
X.9	4	4	4	.	4	.	.	.	-2	4	-2	1	4	4	.	.	4	.	.	.	.	-2	-2	4	-2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	-2	.	.	.	.	.
X.10	6	6	6	-2	6	.	-2	.	.	-3	.	.	6	6	-2	.	6	.	.	-2	.	.	.	-3	.	.	.	1	.	.	.	.	.	-2	-2	.	-2	.	.	.	.	1	.	.	.
X.11	6	6	6	2	6	.	2	.	.	-3	.	.	6	6	2	.	6	.	.	2	.	.	.	-3	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	2	2	.	2	.	.	.	.	-1	.	.	.
X.12	9	9	5	3	-3	-3	-1	-1	.	.	3	.	-3	-3	3	1	1	-3	1	-1	-1	.	.	.	-1	.	-1	.	.	3	3	-1	-1	3	-1	1	-1	1	.	.	.	.	1	.	.
X.13	9	9	5	-3	-3	-3	1	1	.	.	3	.	-3	-3	-3	-1	1	-3	-1	1	-1	.	.	.	-1	.	1	.	.	3	3	1	1	-3	1	-1	1	1	.	.	.	.	-1	.	.
X.14	9	9	5	-3	-3	3	1	-1	.	.	3	.	-3	-3	-3	1	1	3	1	1	1	.	.	.	-1	.	-1	.	.	-3	-3	-1	-1	-3	1	1	1	-1	.	.	.	.	1	.	.
X.15	9	9	5	3	-3	3	-1	1	.	.	3	.	-3	-3	3	-1	1	3	-1	-1	1	.	.	.	-1	.	1	.	.	-3	-3	1	1	3	-1	-1	-1	-1	.	.	.	.	-1	.	.
X.16	18	18	10	.	-6	.	.	-2	.	.	-3	.	-6	-6	.	2	2	.	2	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	-2	-2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	-1	.	.
X.17	18	18	10	.	-6	.	.	2	.	.	-3	.	-6	-6	.	-2	2	.	-2	.	.	.	.	.	1	.	-1	.	.	.	.	2	2	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	1	.	.
X.18	27	27	3	-3	3	3	-3	-3	.	.	.	.	3	3	-3	-3	-5	3	-3	-3	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	1	1	1	1	1	1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.19	27	27	3	3	3	-3	3	-3	.	.	.	.	3	3	3	-3	-5	-3	-3	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-3	-3	1	1	-1	-1	1	-1	1	.	.	.	.	.	.	.
X.20	27	27	3	-3	3	-3	-3	3	.	.	.	.	3	3	-3	3	-5	-3	3	-3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	-3	-3	-1	-1	1	1	-1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
X.21	27	27	3	3	3	3	3	3	.	.	.	.	3	3	3	3	-5	3	3	3	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
X.22	9	9	-3	3	-3	-1	-1	-3	3	.	.	.	5	5	3	3	1	-1	3	-1	1	3	3	.	.	-1	.	.	.	1	1	1	1	-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	.	.	1	1
X.23	9	9	-3	3	-3	1	-1	3	3	.	.	.	5	5	3	-3	1	1	-3	-1	-1	3	3	.	.	1	.	.	.	-1	-1	-1	-1	-1	3	1	-1	1	-1	-1	1	.	.	-1	-1
X.24	9	9	-3	-3	-3	1	1	-3	3	.	.	.	5	5	-3	3	1	1	3	1	-1	3	3	.	.	1	.	.	.	-1	-1	1	1	1	-3	-1	1	1	-1	-1	1	.	.	-1	-1
X.25	9	9	-3	-3	-3	-1	1	3	3	.	.	.	5	5	-3	-3	1	-1	-3	1	1	3	3	.	.	-1	.	.	.	1	1	-1	-1	1	-3	1	1	-1	-1	-1	-1	.	.	1	1
X.26	18	18	-6	.	-6	2	.	.	-3	.	.	.	10	10	.	.	2	2	.	.	-2	-3	-3	.	.	-1	.	.	.	-2	-2	.	.	.	.	.	.	2	1	1	-1	.	.	1	1
X.27	18	18	-6	.	-6	-2	.	.	-3	.	.	.	10	10	.	.	2	-2	.	.	2	-3	-3	.	.	1	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	.	-2	1	1	1	.	.	-1	-1
X.28	18	18	-6	-6	2	.	2	.	.	.	.	3	-6	-6	-6	.	2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	2	2	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.
X.29	18	18	-6	6	2	.	-2	.	.	.	.	3	-6	-6	6	.	2	.	.	-2	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	-2	-2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.
X.30	36	36	-12	.	4	.	.	.	.	.	.	-3	-12	-12	.	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X.31	12	-4	.	2	.	-2	-2	.	-3	3	.	.	4	-4	-2	6	.	2	-2	2	.	5	-1	-1	.	1	.	-1	.	2	-2	2	-2	.	.	.	.	.	1	-1	-1	1	.	-1	1
X.32	12	-4	.	-2	.	-2	2	.	-3	3	.	.	4	-4	2	-6	.	2	2	-2	.	5	-1	-1	.	1	.	1	.	2	-2	-2	2	.	.	.	.	.	1	-1	-1	-1	.	-1	1
X.33	12	-4	.	-2	.	2	2	.	-3	3	.	.	4	-4	2	6	.	-2	-2	-2	.	5	-1	-1	.	-1	.	1	.	-2	2	2	-2	.	.	.	.	.	1	-1	1	-1	.	1	-1
X.34	12	-4	.	2	.	2	-2	.	-3	3	.	.	4	-4	-2	-6	.	-2	2	2	.	5	-1	-1	.	-1	.	-1	.	-2	2	-2	2	.	.	.	.	.	1	-1	1	1	.	1	-1
X.35	24	-8	.	-4	.	.	4	.	6	-3	.	.	8	-8	4	.	.	.	.	-4	.	-2	-2	1	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-2	.	1	.	.	.
X.36	24	-8	.	4	.	.	-4	.	6	-3	.	.	8	-8	-4	.	.	.	.	4	.	-2	-2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-2	.	-1	.	.	.
X.37	24	-8	.	.	.	4	.	.	3	6	.	.	8	-8	.	.	.	-4	.	.	.	-5	1	-2	.	1	.	.	.	-4	4	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	-1	.	.	-1	1
X.38	24	-8	.	.	.	-4	.	.	3	6	.	.	8	-8	.	.	.	4	.	.	.	-5	1	-2	.	-1	.	.	.	4	-4	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	1	.	.	1	-1
X.39	36	-12	.	-6	.	-2	-2	.	3	.	.	.	-4	4	6	6	.	2	-2	2	.	3	-3	.	.	1	.	.	.	-2	2	-2	2	.	.	.	.	.	-1	1	-1	.	.	1	-1
X.40	36	-12	.	6	.	2	2	.	3	.	.	.	-4	4	-6	6	.	-2	-2	-2	.	3	-3	.	.	-1	.	.	.	2	-2	-2	2	.	.	.	.	.	-1	1	1	.	.	-1	1
X.41	36	-12	.	6	.	-2	2	.	3	.	.	.	-4	4	-6	-6	.	2	2	-2	.	3	-3	.	.	1	.	.	.	-2	2	2	-2	.	.	.	.	.	-1	1	-1	.	.	1	-1
X.42	36	-12	.	-6	.	2	-2	.	3	.	.	.	-4	4	6	-6	.	-2	2	2	.	3	-3	.	.	-1	.	.	.	2	-2	2	-2	.	.	.	.	.	-1	1	1	.	.	-1	1
X.43	48	-16	.	.	.	.	.	.	-6	-6	.	.	16	-16	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	2	.	.	.	.	.
X.44	72	-24	.	.	.	4	.	.	-3	.	.	.	-8	8	.	.	.	-4	.	.	.	-3	3	.	.	1	.	.	.	4	-4	.	.	.	.	.	.	.	1	-1	-1	.	.	1	-1
X.45	72	-24	.	.	.	-4	.	.	-3	.	.	.	-8	8	.	.	.	4	.	.	.	-3	3	.	.	-1	.	.	.	-4	4	.	.	.	.	.	.	.	1	-1	1	.	.	-1	1