Klausur Algebra I

Prof. Dr. Gerhard Hiß

Wintersemester 2006/07 1.3.2007

Begründen Sie alle Ihre Aussagen. Die Resultate der Vorlesung und Übung dürfen zitiert werden. Dabei müssen Sie nicht die genaue Abschnittsnummer in der Vorlesung wissen.
Insgesamt werden 50 Punkte verteilt, zum Bestehen sind 20 notwendig.

Aufgabe 1
Es sei G eine endliche Gruppe, $Z(G)$ das Zentrum von G und G' die Kommutatorgruppe.
Zeigen Sie, dass $|Z(G)| < |G|$ genau dann gilt, wenn $|G'| > 1$ ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2
Es sei H eine endliche Gruppe, $Z(H)$ das Zentrum von H und H' bzw. H'' die erste bzw. zweite Kommutatorgruppe. Zeigen Sie, dass aus $H' \leq Z(H)$ folgt, dass H'' einelementig ist. Gilt auch die Umkehrung? *(4 Punkte)*

Aufgabe 3
(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 99 abelsch ist. *(2 Punkte)*
(b) Geben Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99 an. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4
Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $R := \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$. Zeigen Sie, dass $2+\sqrt{3}$ in R eine Einheit ist. Zeigen Sie, dass $5 + 3\sqrt{3} \in R$ ein irreduzibles Element ist. Zeigen Sie, dass $-14 - 8\sqrt{3} \in R$ nicht irreduzibel ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe 5
Es sei $G := A_5 = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (3, 4, 5)\rangle$, also $|G| = 60$. Wieviele Elemente hat der Stabilisator $H := G_2 = \{g \in G \mid g(2) = 2\}$? Bestimmen Sie alle Elemente von G_2. Wieviele Elemente hat H_1? Welche sind dies? *(4 Punkte)*

Aufgabe 6
Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass n genau dann eine Primzahl ist, wenn $(X + 1)^n = X^n + 1$ ist im Polynomring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$. (Hier steht 1 für $1 + n\mathbb{Z}$.) *(5 Punkte)*

Aufgabe 7
Es sei p eine Primzahl, $q = p^k$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen und $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ der Primkörper von $\mathbb{F}_q$. Zeigen Sie:
(a) Die Körpererweiterung $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ ist galoissch. *(1 Punkt)*
(b) Sind $k, l \in \mathbb{N}$, dann ist $\mathbb{F}_{p^k}$ genau dann isomorph zu einem Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^l}$, wenn k ein Teiler von l ist. *(2 Punkte)*
(c) Wieviele Teilkörper hat $\mathbb{F}_{5^4}$? ($\mathbb{F}_{5^4}$ selbst mitgezählt.) *(2 Punkte)*

Aufgabe 8
Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung, $a \in L$ und $[K(a) : K] = 2007$. Zeigen Sie, dass dann $K(a) = K(a^2)$ ist. *(4 Punkte)*

Aufgabe 9
Beweisen Sie oder widerlegen Sie: $X^3 - X + 16 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel. *(4 Punkte)*

Aufgabe 10
Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom und es gebe einen Körper K mit $\mathbb{Q} \leq K \leq \mathbb{C}$ und $[K : \mathbb{Q}] < 60$, so dass f über K in Linearfaktoren zerfällt.
Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $f = 0$ durch Radikale auflösbar ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe 11
Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 12
Es sei K ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^{12} + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Was ist $[K : \mathbb{F}_2]$? *(3 Punkte)*