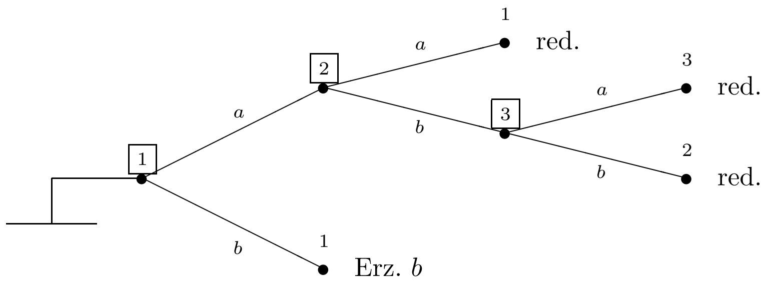
G. Nebe, M. Künzer 17.12.2004

Algebra I, WS 04/05

Lösung Klausur I

Aufgabe 1.

(1) Wählt man z.B. 1 als erstes Element der base, so erhalten wir folgenden Baum.



Daraus ergeben sich die folgenden strong generators.

$$\begin{aligned} w_1(1) &= 1 &&= \mathrm{id} \\ w_1(2) &= a &&= (1,2)(4,5) \\ w_1(3) &= ba &&= (1,3,2) \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{Stab}_G(1) = \langle b \rangle$.

Wählt man z.B. 2 als zweites Basiselement, so ergeben sich die strong generators

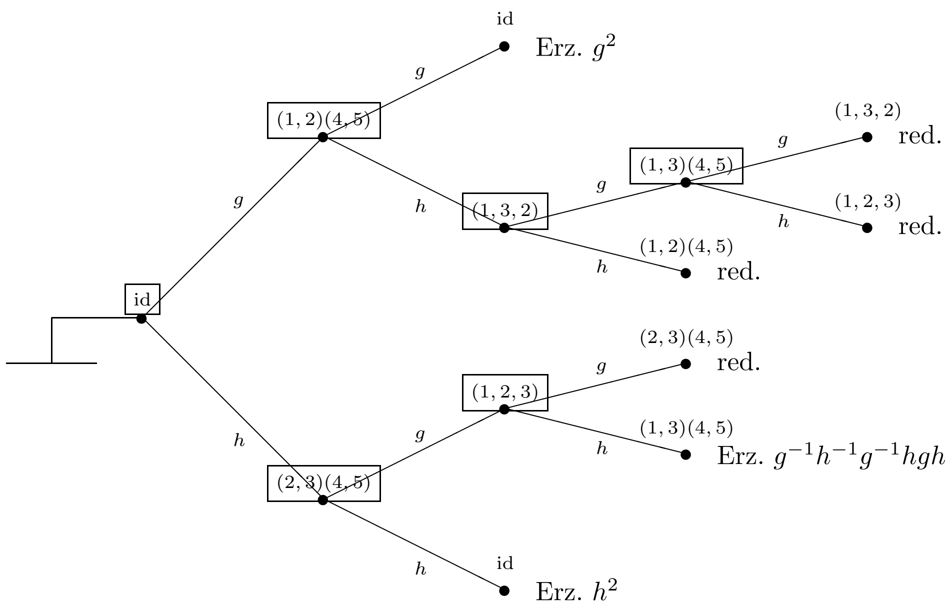
$$\begin{aligned} w_2(2) &= 1 &&= \mathrm{id} \\ w_2(3) &= b &&= (2,3)(4,5) \end{aligned}$$

Es ist nun bereits $\mathrm{Stab}_G(1,2) = 1$.

(2) Es ist $(1,3) \cdot 1 = 3$. Also ist $(1,3) \in G$ genau dann, wenn $w_1(3)^{-1}(1,3) = (1,3,2)^{-1}(1,3) = (2,3) \in \mathrm{Stab}_G(1)$.

Es ist $(2,3) \cdot 2 = 3$. Also ist $(2,3) \in \mathrm{Stab}_G(1)$ genau dann, wenn $w_2(3)^{-1}(2,3) = (4,5) \in \mathrm{Stab}_G(1,2) = 1$. Dies ist aber nicht der Fall. Also ist insgesamt $(1,3) \notin G$.

(3) Um die Relationen zu erhalten, betrachten wir G als F-Menge, mit $F = \mathrm{Fr}(g,h) = \langle g,h \rangle$, wobei g als Multiplikation mit a und h als Multiplikation mit b operiert. Wir erhalten folgenden Baum.



Das gibt die Präsentation

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G} \;:=\; \langle g, h \mid g^2, h^2, g^{-1}h^{-1}g^{-1}hgh \rangle \;=\; \langle g, h \mid g^2, h^2, (gh)^3 \rangle & \xrightarrow{\sim} & G \\ g & \longmapsto & a \\ h & \longmapsto & b \end{array}$$

(4) Für einen Automorphismus von G, der a und b vertauscht, können wir nach Identifikation mit $\tilde{G}$ einen Automorphismus von $\tilde{G}$ angeben, der g und h vertauscht. D.h. er soll $g \longmapsto g' := h$ und $h \longmapsto h' := g$ schicken. Damit dies wohldefiniert ist, rechnen wir nach, daß in $\tilde{G}$ in der Tat $g'^2 = h^2 = 1$, $h'^2 = g^2 = 1$ und insbesondere

$$(g'h')^3 \;=\; (hg)^3 \;=\; hghghg \;=\; {}^h(ghghgh) \;=\; {}^h1 \;=\; 1$$

gelten. Da $\tilde{G} = \langle g', h' \rangle = \langle h, g \rangle$, ist dieser Morphismus auch surjektiv, und damit wegen $\tilde{G} \simeq G$ endlich auch injektiv. Insgesamt liegt in der Tat ein Automorphismus vor.

Aufgabe 2.

Um die Anzahl der Bahnen zu bestimmen, bestimmen wir für je einen Vertreter σ der Konjugiertenklassen die Anzahl der Fixpunkte auf A, d.h. die Kardinalität von $\mathrm{Fix}_A(\sigma) = \{f \in A \;:\; \sigma\}$. Es ergibt sich unter Berücksichtigung von Einerzykeln folgende Tabelle.

σ	$\lvert\,\mathrm{Fix}_A(\sigma)\rvert$	$\lvert {}^{\mathcal{S}_4}\sigma \rvert$
$(1,2,3,4)$	3^1	6
$(1,2,3)(4)$	3^2	8
$(1,2)(3,4)$	3^2	3
$(1,2)(3)(4)$	3^3	6
$(1)(2)(3)(4)$	3^4	1

Mit Burnside erhalten wir

$$\frac{1}{24}\left(6 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4\right) \;(=\; 15)$$

Bahnen von $\mathcal{S}_4$ auf A.

Aufgabe 3.

Die zugehörige Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ hat die Elementarteilerform $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$. Es ergibt sich $G/G' \simeq C_9$.

Aufgabe 4.

Es ist $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

(1) Die Anzahl der 7-Sylowgruppen in G ist $\equiv_7 1$. Sie teilt $2^3 \cdot 3$. Sie ist ungleich 1, da G einfach ist. Also ist sie gleich 8. Nun hat C_7 genau die Untergruppen 1 und C_7. Also haben verschiedene Sylowgruppen Schnitt 1. Wir erhalten also $8 \cdot 6 = 48$ Elemente der Ordnung 7 in G.

(2) Wäre M eine transitive G-Menge, so gäbe es einen nichttrivialen Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_M \simeq \mathcal{S}_6$. Da G einfach ist, muß dieser Kern 1 haben, und somit injektiv sein. Sein Bild ist mithin eine Untergruppe von $\mathcal{S}_6$ von Ordnung 168. Da 168 jedoch kein Teiler von $6! = 720$ ist, ist dies nicht möglich.

(3) Hierzu genügt es wegen der Einfachheit von G zu zeigen, daß $\bigcap_{P\in \mathrm{Syl}_2(G)} P$ normal in G ist. Es genügt hierfür zu zeigen, daß $\bigcap_{P\in \mathrm{Syl}_2(G)} P \subseteq \bigcap_{P\in \mathrm{Syl}_2(G)} {}^xP$ ist für alle $x \in G$, die umgekehrte Inklusion folgt dann mit Konjugation mit x^{-1}. Ist g in der linken Seite enthalten, so ist g in jeder 2-Sylowgruppe enthalten. Sei nun $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Wir müssen zeigen, daß $g \in {}^xP$. Nun ist aber auch ${}^xP$ eine 2-Sylowgruppe, und somit in der Tat $g \in {}^xP$.

Aufgabe 5.

Es ist $C_8 = \langle x \mid x^8 \rangle$. Ein Automorphismus ist gegeben durch $x \longmapsto x^i$ mit $i \in \{1, 3, 5, 7\}$. Sei $\alpha : x \longmapsto x^3$, und sei $\beta : b \longmapsto b^5$. Wegen $\alpha \circ \beta : x \longrightarrow x^7$ erzeugen α und β die Gruppe $\mathrm{Aut}\, C_8$. Es ist $C_2 \times C_2 = \langle a, b \mid a^2,\, b^2,\, [a, b] \rangle$. Durch

$$\begin{array}{ccc} C_2 \times C_2 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\, C_8 \\ a & \longmapsto & \alpha \\ b & \longmapsto & \beta \end{array}$$

ist ein Gruppenmorphismus definiert, da $\alpha^2 = \mathrm{id}$, $\beta^2 = \mathrm{id}$ und $[\alpha, \beta] = \mathrm{id}$. Dieser ist wegen $\mathrm{Aut}\, C_8 = \langle \alpha, \beta \rangle$ surjektiv, und da beide Seiten 4 Elemente enthalten, auch injektiv.

Aufgabe 6.

Wir verwenden hierzu ein semidirektes Produkt $C_7 \rtimes C_3$. Damit die Gruppe nicht abelsch wird, müssen wir Sorge tragen, daß der definierende Morphismus $C_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C_7$ nicht trivial ist.

Sei $C_7 = \langle x \mid x^7 \rangle$, sei $C_3 = \langle a \mid a^3 \rangle$. Es gibt einen nichttrivialen Automorphismus $\alpha : C_7 \xrightarrow{\sim} C_7$, $x \longmapsto x^2$. Dieser ist von Ordnung 3, da $x^{2^3} = x$. Also gibt es einen Morphismus $C_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C_7$, $a \longmapsto \alpha$.

Das aus diesem Morphismus resultierende semidirekte Produkt $C_7 \rtimes C_3$ ist eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 21.

Aufgabe 7.

Wir bestimmen Urbilder unter dem surjektiven Ringmorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \times & \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} & \times & \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \\ z & \longmapsto & (z & , & z & , & z) \end{array}$$

von $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.

Ad $(1, 0, 0)$. Der euklidsche Algorithmus liefert $(-1) \cdot 35 + 9 \cdot 4 = 1$, und damit $-35 \longmapsto (1, 0, 0)$.

Ad $(0, 1, 0)$. Der euklidsche Algorithmus liefert $2 \cdot 28 - 11 \cdot 5 = 1$, und damit $56 \longmapsto (0, 1, 0)$.

Ad $(0, 0, 1)$. Der euklidsche Algorithmus liefert $(-1) \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 1$, und damit $-20 \longmapsto (0, 0, 1)$.

Damit können wir $x = -35a + 56b - 20c$ wählen.

Aufgabe 8.

(1) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $G = \mathcal{S}_4$. Wir haben $|\mathrm{Syl}_2(G)| = 3$ und $|\mathrm{Syl}_3(G)| = 4$, und somit bei keinem Primteiler p von $|G| = 2^3 \cdot 3$ eine normale p-Sylowgruppe.

Alternativ, wähle für G irgendeine nichtabelsche einfache Gruppe (z.B. $\mathcal{A}_n$ für $n \geq 5$). Dann hat $|G|$ wenigstens 2 Primteiler, so daß wegen G einfach keine Sylowgruppe von G ein Normalteiler sein darf.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $G = \mathcal{S}_3$, $N = \langle (1, 2, 3) \rangle$ und $U = \langle (1, 2) \rangle$. Es entspricht $((1, 2, 3), (1, 2)) \in N \rtimes U$ dem Element $(1, 3) \in \mathcal{S}_3$ unter dem Isomorphismus $N \rtimes U \xrightarrow{\sim} G$, $(n, u) \longmapsto nu$. Also hat $((1, 2, 3), (1, 2))$ die Ordnung 2, nicht die Ordnung $\mathrm{kgV}(|\langle (1, 2, 3) \rangle|, |\langle (1, 2) \rangle|) = 6$.

(3) Die Aussage ist wahr. Es ist $|G| = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Es ist $|\mathrm{Syl}_{17}(G)| = 1$, da diese Kardinalität ein Teiler von 6 und zugleich $\equiv_{17} 1$ sein muß. Damit hat G einen abelschen, insbesondere auflösbaren Normalteiler, nämlich die 17-Sylowgruppe P. Und auch der Quotient G/P ist auflösbar, da er Ordnung 6 hat (und somit eine abelsche normale 3-Sylowgruppe mit abelschem Quotienten besitzt).