2. Teil der Nachholklausur zur Algebra I
(WS 91/92)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 115 Minuten. In beiden Teilen der Klausur müssen zusammen mindestens 40 Punkte, in jeder Klausur jeweils mindestens 1 Punkt erzielt werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ sind irreduzibel, welche reduzibel? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
(a) $X^6 + 1$,
(b) $X^3 + 2X^2 - 3X + 1$,
(c) $X^7 + 6X^4 - 39X^3 + 12X - 12$. 6 Pkte.

Aufgabe 2.
Sei $K := \mathbb{Q}$ und $L := K(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$.
(a) Berechnen Sie $[L : K]$ und eine Basis von L über K.
(b) Bestimmen Sie ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.
(c) Ist $L \supseteq K$ eine Galoiserweiterung? Begründen Sie Ihre Antwort! 8 Pkte.

Aufgabe 3.
Sei $a := \sqrt[4]{5}$ und $b := a^3 - 1 \in \mathbb{Q}(a)$. Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 3$ und $f(a) = b^{-1}$. 6 Pkte.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie explizit einen Unterkörper K des Ringes $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$, der genau 8 Elemente hat, und geben Sie eine Matrix $A \in K$ der multiplikativen Ordnung 7 an. 7 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei L Zerfällungskörper $X^6 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
(a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$? Ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ abelsch? Begründen Sie Ihre Antworten!
(b) Geben Sie einen Unterkörper M von L an mit $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, sowie ein primitives Element β von M über $\mathbb{Q}$ und das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$. 8 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei $L \supseteq K$ endliche Körpererweiterung und $\mathrm{Char}(K)$ kein Teiler von $[L : K]$. Zeigen Sie: $L \supseteq K$ ist separabel. 6 Pkte.

Aufgabe 7.
Es sei $R = \mathbb{Z}_2[X]/(f)$ mit $f = X^4 + X^2 + 1$.
(a) Ist R ein Körper?
(b) Ist $\alpha = X + 1 + (f) \in R$ in R invertierbar? Wenn ja, geben Sie die Ordnung von α in der (multiplikativen) Einheitengruppe an.
Begründen Sie Ihre Antwort! 6 Pkte.