Klausur zu “Diskrete Strukturen”, WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(1,3)(7,8) \circ \sigma \circ (1,5)(4,6) = \pi$ gilt. (3 P.)
Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi =$ $\boxed{}$ $\operatorname{sgn}(\pi) =$ $\boxed{}$ $\sigma =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{16}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

b) Berechnen Sie $d = \operatorname{ggT}(825, 682)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 825 + \mu \cdot 682 = d$. (3 P.)

c) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{825}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{682} = \overline{616}$ an. (2 P.)

$x \in R^*$								
x^{-1}								

$d =$ $\boxed{}$ $\lambda =$ $\boxed{}$ $\mu =$ $\boxed{}$ $x =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Ordnen Sie jedem Ausdruck auf der linken Seite der Tabelle genau einen Ausdruck auf der rechten Seite zu. Die Zuordnung ist durch Eintragung der Buchstaben A–F in der freien Spalte zu kennzeichnen. (Es bezeichnet $S_{n,k}$ die Stirling-Zahl 2. Art, und $s_{n,k}$ die Stirling-Zahl 1. Art.)

		A–F	
A	$S_{n,k+1}$		keins davon
B	$S_{n+1,k}$		2^n
C	$S_{n+1,n+1}$		$\binom{n}{2}$
D	$s_{n,n-1}$		$n!$
E	$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}$		$S_{n-1,k-2} + (2k-1)S_{n-1,k-1} + k^2 S_{n-1,k}$
F	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$		$S_{n-1,k} + kS_{n-1,k+1} + S_{n-1,k+1}$

— bitte wenden —

☐

Aufgabe 4. (12 Punkte)

a) Skizzieren Sie (für sich) den Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \underline{9}$ und (5 P.)

$$E = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,9\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,9\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}.$$

Die Anzahl der Brücken in G beträgt ☐; die Komponentenzahl beträgt ☐.

Der Graph G hat folgende Eigenschaften (alle ankreuzen):

☐ Baum ☐ Wald ☐ kreisfrei ☐ zusammenhängend ☐ keine davon

b) Gesucht sind zwei Graphen G und H derart, dass die Knotengrade in G genau $2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$ lauten, und in H genau $2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4$. Welcher der beiden Graphen existiert? Skizzieren Sie diesen und begründen Sie, warum der andere nicht existiert. (7 P.)

Graph ☐ existiert nicht, weil ☐.

Skizze des existierenden Graphen:

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 3 schwarze und 3 gelbe Trikots an 6 Spieler zu verteilen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Passwörter der Länge 4 über einem Alphabet mit 5 Zeichen gibt es, in denen mindestens ein Buchstabe doppelt vorkommt? (3 P.)

c) Wieviele Äquivalenzrelationen R gibt es auf einer 7-elementigen Menge, so dass R genau drei Äquivalenzklassen von der Mächtigkeit 2, 2 und 3 hat? (3 P.)

a) ☐ b) ☐ c) ☐

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Es seien p und q zwei beliebige Primzahlen. Gesucht ist die Anzahl $A(p, q)$ der natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq pq$, die weder durch p noch durch q teilbar sind.

a) Geben Sie eine möglichst einfache geschlossene Formel für $A(p, q)$ an. (1 P.)

b) Beweisen Sie Ihre Formel aus a) bzw. leiten Sie ihre Formel mittels aus der Vorlesung bekannter kombinatorischer Prinzipien her. (4 P.)

c) Zeigen Sie, dass $A(p, q)$ durch $p - 1$ teilbar ist. (1 P.)

Viel Erfolg!