Klausur zur Vorlesung Diskrete Strukturen, WS 2011/2012

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Dauer: 120 min. **Gesamtpunktzahl:** 50 **Mindestpunktzahl zum Bestehen:** 25

Aufgabe 1. Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\pi = \sigma \circ \tau$.

(a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

(b) Berechnen Sie das Signum von π. (1 P.)

(c) Sei k_0 das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $\pi^k = \mathrm{id}$. Berechnen Sie k_0. (2 P.)

(d) Schreiben Sie τ^{-1} als Produkt von disjunkten Zykeln. (2 P.)

$\pi =$ $\boxed{}$ $\operatorname{sgn}(\pi)=$ $\boxed{}$ $k_0 =$ $\boxed{}$ $\tau^{-1} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(329, 420)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $d = \lambda \cdot 329 + \mu \cdot 420$. (3 P.)

(b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl a mit $a \equiv 3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13^3 \pmod 9$. (2 P.)

(c) Berechnen Sie die kleinste natürliche Zahl x für die gilt $x \cdot 3 \equiv 1 \pmod{73}$. (2 P.)

$d =$ $\boxed{}$ $\lambda =$ $\boxed{}$ $\mu =$ $\boxed{}$ $a =$ $\boxed{}$ $x =$ $\boxed{}$

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{Q}$ seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & 4a \\ 1 & a+1 & 2a \\ -2 & -2a+1 & 3a-3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung? (2 P.)

(b) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ unendlich viele Lösungen? (2 P.)

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$ im Fall $a = 1$ an. (2 P.)

(d) Sei $a = -1$. Für welche $c \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ hat in diesem Fall das Gleichungssystems $Ax = c$ eine Lösung? (2 P.)

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

(a) Wieviele Zeichenfolgen entstehen durch Umordnen der Buchstaben des Wortes AACHEN? (3 P.)

(b) Sei M eine Menge mit 10 Elementen. Wieviele 3-elementige Teilmengen hat M? (3 P.)

(c) Es werden 3 gleiche Spielwürfel gleichzeitig geworfen. Wieviele Augenkombinationen gibt es, bei denen keine 6 vorkommt. (3 P.)

(d) Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von einer 5-elementigen Menge auf eine 3-elementige Menge? (3 P.)

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$

Aufgabe 5. Wir betrachten den gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \underline{8}$ und den Kanten E aus der folgenden Tabelle:

Kante	$\{1,7\}$	$\{2,7\}$	$\{2,5\}$	$\{6,7\}$	$\{2,6\}$	$\{7,8\}$	$\{1,8\}$	$\{2,3\}$	$\{3,7\}$	$\{4,8\}$	$\{5,7\}$	$\{4,6\}$	$\{5,6\}$
Gewicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

(a) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf auf der Teilmenge $\{1, 2, 3, 8\} \subset V$ induzierte Teilgraph von G? (2 P.)

(b) Besitzt der Graph G einen Eulerzug, eine Eulertour oder beides oder keines davon? (2 P.)

(c) Was ist der maximale Grad eines Knotens in G? (1 P.)

(d) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum von G und geben Sie die Gewichte seiner Kanten in aufsteigender Reihenfolge an. (2 P.)

(e) Wieviele Brücken besitzt der Graph G? (2 P.)

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$ (e) $\boxed{}$

Bearbeiten Sie die folgenden beiden Aufgaben **schriftlich und mit ausführlichen Begründungen** auf einem gesonderten Blatt.

Aufgabe 6. Sei $M = \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Die Relation R auf M enthalte die Paare $(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \in M \times M$, für die es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Beweisen Sie oder widerlegen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf M ist. (3 P.)

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ *symmetrisch*, wenn gilt $A = A^t$. Seien $A, B \in K^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass AB genau dann auch symmetrisch ist, wenn gilt $AB = BA$.

(3 P.)

Viel Erfolg!