## Ankreuzteil

**Aufgabe A1.** Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{k-l}\binom{n}{l}$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = 2^n$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = n!$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

**Aufgabe A2.** Es sei $|M| = 4$ und $|N| = 3$. Die Anzahl

der injektiven Abbildungen $f\colon N \to M$ ist ........ ☐

der injektiven Abbildungen $f\colon M \to M$ ist ........ ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon N \to M$ ist ........ ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon M \to N$ ist ........ ☐

**Aufgabe A3.** Ist $K$ ein Körper und $f, g \in K[x]$, so gilt:

$f = g \iff f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$f$ ist in $K[x]$ invertierbar $\iff f(a) \neq 0$ für alle $a \in K$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$\{f \in K[x] \mid f(1) = 0\} \trianglelefteq K[x]$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

$\{f \in K[x] \mid \mathrm{Grad}\, f \leq 3\} \trianglelefteq K[x]$ ........ ☐ Ja ☐ Nein

**Aufgabe A4.** Es sei $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ und $R = \mathbb{Z}_2[x] \,/\, f\,\mathbb{Z}_2[x]$. Dann gilt:

Die Anzahl der Elemente von $R$ ist ........ ☐

$R$ ist ein Körper. ........ ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\alpha = [x^2 + 1]_f$, so ist $\alpha^3 = \alpha + 1$. ........ ☐ Ja ☐ Nein

**Aufgabe A5.** Ist $G = (V, E)$ ein nummerierter Graph mit Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ und Inzidenzmatrix $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ und $V = \{\, v_1, \dots, v_n \,\}$, so ist der Grad $d(v_i)$

die Summe der Einträge der $i$-ten Zeile von $A$, ........ ☐ Ja ☐ Nein

die Summe der Einträge der $i$-ten Spalte von $A$, ........ ☐ Ja ☐ Nein

die Summe der Einträge der $i$-ten Spalte von $B$. ........ ☐ Ja ☐ Nein

## Rechenaufgaben ohne Begründung

**Aufgabe R1.** (4 Punkte)
Die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf einer 4-elementigen Menge ist ................. ☐

**Aufgabe R2.** (3 Punkte) Es sei $a = (1\ 2)\,(3\ 4\ 5)\,(6\ 7\ 8\ 9)$ aus $S_9$.
Die Ordnung von $a$ ist ................................................................. ☐

Die kleinste natürliche Zahl $i$ mit $a^i = a^{99}$ ist ........................................... ☐

Die Zyklendarstellung von $a^{125}$ ist ...................... ☐

**Aufgabe R3.** (5 Punkte)
Es sei $\varphi$ die eulersche $\varphi$-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(1000)$. .............................. ☐

Es sei $m = 12345678987603$. Was sind die letzten drei Ziffern von $7^m$? .................. ☐

**Aufgabe R4.** (4 Punkte)
Wie viele Ideale hat der Ring $R = \mathbb{Z}_2[x]\,/(x^4 + x^3 + x + 1)\,\mathbb{Z}_2[x]$ ? ....................... ☐

**Aufgabe R5.** (4 Punkte)
Die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 7 über $\mathbb{Z}_2$ ist ......................... ☐

## Aufgaben mit Lösungsweg

**Aufgabe L1.** (10 Punkte)
Drei Sender geben alle 7, 8, beziehungsweise 11 Minuten ein Signal ab. Zuletzt wurden ihre Signale vor 2, 1, beziehungsweise 3 Minuten empfangen. Wann werden das nächste Mal alle drei Signale gleichzeitig empfangen?

**Hinweis:** Wichtig ist hier eine klare Darstellung der Lösungsmethode. Systematisches Probieren oder nachträgliche Verifikation eines durch Raten gefundenen Ergebnisses gelten nicht als Lösung.

**Aufgabe L2.** (14 Punkte)
Lösen Sie explizit die folgenden gekoppelten Rekursionsgleichungen mittels erzeugender Funktionen.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad b_0 = 1, \\ a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n &= 6\,a_{n-1} + 2\,b_{n-1}. \end{aligned}$$

**Hinweis:** Auch hier ist die Darstellung der Lösungsmethode wesentlich. Eine nachträgliche Verifikation eines durch Raten gefundenen Ergebnisses, etwa durch vollständige Induktion, gilt nicht als Lösung.