Ankreuzteil

Aufgabe A1. Es seien $s_{n,k}$ die Stirlingzahlen 1. Art. Dann gilt:

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + k \cdot s_{n-1,k}$ für $1 \le k \le n$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = n!$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$ für $n \ge 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$s_{4,2}$ hat den Wert .... ☐

Aufgabe A2. Es sei $\mathbb{Q}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{Q}$. Dann gilt:

$\frac{x}{1+x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$\frac{1+x}{x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $x^3 A = \sum_{i=3}^{\infty} a_{i-3} x^i$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $A^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 x^i$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A3. Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$. Dann gilt:

Ist $\operatorname{Grad} f = 0$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 1$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Hat f in K keine Nullstelle, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A4. Es sei $f = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ und $R = \mathbb{Z}_2[x] / f\,\mathbb{Z}_2[x]$. Dann gilt:

Die Anzahl der Elemente von R ist .... ☐

R ist ein Körper. .... ☐ Ja ☐ Nein

Das Inverse von $[x^2 + x + 1]_f$ in R ist $[x^3 + x^2 + 1]_f$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Teiler von f in $\mathbb{Z}_2[x]$ ist .... ☐

Aufgabe A5.

Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, so ist $|V| \le |E| + 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt einen 3-regulären Graphen mit 7 Knoten. .... ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen K_6 ist .... ☐

Rechenaufgaben ohne Begründung

Aufgabe R1. (4 Punkte)

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ ist .... ☐

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}$ ist .... ☐

Aufgabe R2. (4 Punkte)
Es seien die Permutationen $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 8 & 9 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ aus S_9 und $b = (1\ 4\ 6)\,(2\ 3\ 7\ 5)$ aus S_7 gegeben.

Die Zyklendarstellung von a ist .... $\boxed{}$

Die Ordnung von b ist .... $\boxed{}$

Die Zyklendarstellung von b^{-1} ist .... $\boxed{}$

Die Zyklendarstellung von b^{27} ist .... $\boxed{}$

Aufgabe R3. (4 Punkte)
Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von $f = x^4 + 1$ und $g = x^3 + x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ und stellen Sie ihn in der Form $d = a \cdot f + b \cdot g$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[x]$ dar. Geben Sie d, a und b an.

$d =$	$a =$	$b =$

Aufgabe R4. (5 Punkte)
Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(100)$. .... $\boxed{}$

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \equiv 13^{162} \bmod 100$. .... $\boxed{}$

Aufgabe R5. (5 Punkte) Es sei C der binäre zyklische Code der Länge 7 mit Generatorpolynom $g = x^3 + x + 1$, also

$$C = \{\, (c_i)_{i=0}^{6} \mid \left[\sum_{i=0}^{6} c_i x^i\right]_{x^7-1} = [g \cdot h]_{x^7-1} \text{ für ein } h \in \mathbb{Z}_2[x] \,\}.$$

Die Dimension von C ist .... $\boxed{}$

Die Anzahl der Codeworte in C ist .... $\boxed{}$

Die Minimaldistanz von C ist .... $\boxed{}$

$(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ wird decodiert als .... $\boxed{}$

Aufgabe R6. (5 Punkte)
Es sei (V, E) der Baum mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 6\}$ und dem Prüfercode $(2, 3, 3, 2)$. Geben Sie die Nachbarn von 3 an, also die Menge $\{a \in V \mid \{a, 3\} \in E\}$. $\boxed{}$

Aufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe L1. (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} \in \mathbb{Q}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe L2. (8 Punkte)

Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Bestimmen Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 6$. Für welche dieser n ist die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}_n^*$ zyklisch? Geben Sie jeweils alle erzeugenden Elemente $[a]_n$ dieser Gruppe an.