17.9.2004

Vordiplomsklausur Diskrete Strukturen, SS 2004

Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	7	8	9	10	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Vordiplomsklausur, 17.9.2004

Diskrete Strukturen, SS 2004, Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

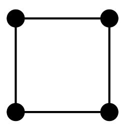
Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	*Welche der folgenden Aussagen sind richtig?*	
	In einem Graph mit einer Eulertour kommen nur Ecken mit geradem Grad vor.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein hamiltonscher Graph kann mehr als eine Zusammenhangskomponente haben.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder vollständige Graph ist hamiltonsch.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder endliche Graph hat einen endlichen Durchmesser.	☐ Ja ☐ Nein

2	*Welche der folgenden Aussagen sind richtig?*	
	Jeder zusammenhängende Graph enthält einen eindeutig bestimmten Spannbaum als Teilgraph.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder Baum ist zusammenhängend.	☐ Ja ☐ Nein
	Alle zusammenhängenden schlichten Graphen haben die gleiche Zusammenhangszahl.	☐ Ja ☐ Nein
	Beliebige zwei Bäume mit gleicher Eckenzahl sind zueinander isomorph.	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **null** Punkte.

3 *Es sei $G = (V, E, f)$ der folgende Graph:* *(Jeweils 2 Punkte)*



	Wie viele Elemente hat die Automorphismengruppe von G?	8
	Wie viele Färbungen der Ecken mit 2 Farben hat G?	16
	Wie viele Muster bezüglich der Automorphismengruppe von G ergeben diese Färbungen?	6

4	*Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen.*	*(Jeweils 1 Punkt)*
	Die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen einer 5-elementigen Menge ist	10
	Die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, welche 2 und 4 vertauschen, ist	24
	Die Anzahl der Zahlpartitionen von 4 ist	5
	Die Anzahl der Abbildungen $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ ist	81
	Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ist	120
	Die Anzahl der Teilmengen der Gruppe $S_{\{1,2,3\}}$ ist	64

Name: ________________________ **Matrikelnummer:** __________________

5	*Es seien die Permutationen* $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *sowie* $\tau := (2\ 8)(3\ 6\ 1\ 4\ 7\ 5)$ *aus* $S_{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$ *gegeben.*	*(Jeweils* 1 *Punkt)*
	Die Zykeldarstellung von σ ist	(1 9 4 3 8)(2 6 7 5)
	Die Ordnung von τ ist	6
	Die Zykeldarstellung von τ^{-1} ist	(3 5 7 4 1 6)(2 8)
	Die Zykeldarstellung von τ^{105} ist	(2 8)(3 4)(6 7)(1 5)
	Die Zykeldarstellung von $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma$ ist	(6 1)(8 7 9 3 5 2)
6	*Bestimmen Sie die folgenden Zahlen.*	*(Jeweils 3 Punkte)*
	Das multiplikative Inverse von 17 im Körper $\underline{101} = \{0, 1, \ldots, 100\}$ ist	6
	Bei der Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $1 = 101 \cdot x + 42 \cdot y$ mit $50 \leq x \leq 100$ ist x gleich	89

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

7 Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind, also die Anzahl der Elemente in der Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10000 \text{ und } (2|n \text{ oder } 3|n \text{ oder } 5|n)\}\,.$$

(4 Punkte)

8 Bestimmen Sie alle ungeraden, natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 6$, wobei φ die Eulersche Phi-Funktion ist. *(4 Punkte)*

9 Es sei $G := S_{\{1,2,3,4,5\}}$ die symmetrische Gruppe, die die fünf Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ permutiert. Die Menge $M := \Omega \times \Omega \times \Omega$ aller Tripel (a, b, c) mit $a, b, c \in \Omega$ ist eine G-Menge, wenn man für $g \in G$

$$(a, b, c) * g := (a^g, b^g, c^g)$$

festlegt.

Geben Sie die verschiedenen G-Bahnen von M an.
Bestimmen Sie die jeweilige Bahnlänge.
Wie viele Elemente hat der Stabilisator von $(1, 1, 2)$? *(5 Punkte)*

10
(a) Definieren Sie den Begriff „Kreis in einem Graphen“. *(2 Punkte)*
(b) Es sei $G = (V, E, f)$ ein Baum. Zeigen Sie, dass es für je zwei Ecken $v, w \in V$ genau einen Weg von v nach w gibt. *(4 Punkte)*