Gruppe A

Scheinklausur, 2. Teil, 15.2.2002

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und μ_A ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist der Grad von μ_A gleich 1, dann ist $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{R}$ und $\mu_A = X^3 - 6X^2 + 9X$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = X - 1$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und χ_A ihr charakteristisches Polynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist $\chi_A = X^n$, dann existiert eine Zahl m mit $1 \leq m \leq n$, so dass $A^m = 0$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, Sp $A = 0$ und det $A < 0$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum der Dimension n mit $n \geq 4$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, dann ist $(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ linear unabhängig, dann existiert ein $v \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ eine geordnete Basis von V ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Es existiert ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nur Untervektorräume der Dimensionen 0, 2 und 4 hat.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, χ_A ihr charakteristisches Polynom und μ_A ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist A diagonalisierbar und $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.	☐ Ja ☐ Nein

5	Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Falls für A gilt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, so ist det $A \in \{1, -1\}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist die Determinante von AB ungleich Null, dann sind A und B beide invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist π eine beliebige Permutation auf n Ziffern, dann hat die Permutation $\pi \circ \pi$ das Signum 1.	☐ Ja ☐ Nein
6	Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	$K[X]$ ist ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathcal{A}$ eine K-Algebra, dann gibt es zu jedem $a \in \mathcal{A}$ genau einen K-Algebren-Homomorphismus $\varphi : K[X] \to \mathcal{A}$, für den $\varphi(X + 1) = a$ gilt.	☐ Ja ☐ Nein
	Jedes normierte Polynom $p \in K[X]$ kann als ein Produkt normierter, irreduzibler Polynome geschrieben werden.	☐ Ja ☐ Nein
7	Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, w) \neq 0$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, v) = -1$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Sind $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ und gilt $\beta(v, w) = 0$, dann sind v und w linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
8	Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und φ ein K-Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Jeder Eigenvektor von φ spannt einen φ-invarianten Untervektorraum auf.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls die Dimension des Kerns von φ größer als 1 ist, so ist die Dimension des Eigenraums von φ zum Eigenwert 0 mindestens 2.	☐ Ja ☐ Nein
	φ hat einen Eigenwert.	☐ Ja ☐ Nein
	Jede Nullstelle des Minimalpolynoms von φ ist ein Eigenwert von φ.	☐ Ja ☐ Nein

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Invertieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.
Dokumentieren Sie genau, welche Umformungen Sie in jedem Schritt vornehmen und geben Sie am Ende die Matrix A^{-1} explizit an. *(4 Punkte)*

10 Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie die Eigenwerte von A an. *(1 Punkt)*

(ii) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A. *(2 Punkt)*

(iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. *(2 Punkt)*

(iv) Ist A in $\mathbb{F}_3^{4\times 4}$ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*

11 Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist V ein K-Vektorraum über einem Körper K und sind u, v und w Vektoren aus V mit der Eigenschaft, dass jedes der Paare (u, v), (u, w) und (v, w) linear unabhängig ist, dann ist auch die Folge (u, v, w) linear unabhängig. *(4 Punkte)*

12 Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Abbildung, die durch die Vorschrift $\varphi(B) = B \cdot A$ (normales Matrixprodukt!) für alle $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist. *(1 Punkt)*

(ii) Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(2 Punkte)

(iii) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

(iv) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

13 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. Das Minimalpolynom von A sei gleich X^{n-1}. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von A gleich X^n ist. *(4 Punkte)*

Gruppe B

Scheinklausur, 2. Teil, 15.2.2002

Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, w) \neq 0$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, v) = -1$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Sind $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ und gilt $\beta(v, w) = 0$, dann sind v und w linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Falls für A gilt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen, so ist $\det A \in \{1, -1\}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist die Determinante von AB ungleich Null, dann sind A und B beide invertierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist π eine beliebige Permutation auf n Ziffern, dann hat die Permutation $\pi \circ \pi$ das Signum 1.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und χ_A ihr charakteristisches Polynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist $\chi_A = X^n$, dann existiert eine Zahl m mit $1 \leq m \leq n$, so dass $A^m = 0$ ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, Sp $A = 0$ und $\det A < 0$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, χ_A ihr charakteristisches Polynom und μ_A ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Ist A diagonalisierbar und $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.	☐ Ja ☐ Nein

5	Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	$K[X]$ ist ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\mathcal{A}$ eine K-Algebra, dann gibt es zu jedem $a \in \mathcal{A}$ genau einen K-Algebren-Homomorphismus $\varphi : K[X] \to \mathcal{A}$, für den $\varphi(X+1) = a$ gilt.	☐ Ja	☐ Nein
	Jedes normierte Polynom $p \in K[X]$ kann als ein Produkt normierter, irreduzibler Polynome geschrieben werden.	☐ Ja	☐ Nein
6	Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und φ ein K-Endomorphismus von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Jeder Eigenvektor von φ spannt einen φ-invarianten Untervektorraum auf.	☐ Ja	☐ Nein
	Falls die Dimension des Kerns von φ größer als 1 ist, so ist die Dimension des Eigenraums von φ zum Eigenwert 0 mindestens 2.	☐ Ja	☐ Nein
	φ hat einen Eigenwert.	☐ Ja	☐ Nein
	Jede Nullstelle des Minimalpolynoms von φ ist ein Eigenwert von φ.	☐ Ja	☐ Nein
7	Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum der Dimension n mit $n \geq 4$. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, dann ist $(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ linear unabhängig, dann existiert ein $v \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ eine geordnete Basis von V ist.	☐ Ja	☐ Nein
	Es existiert ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nur Untervektorräume der Dimensionen 0, 2 und 4 hat.	☐ Ja	☐ Nein
8	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und μ_A ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist der Grad von μ_A gleich 1, dann ist $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{R}$ und $\mu_A = X^3 - 6X^2 + 9X$, dann ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
	Ist $\mu_A = X - 1$, dann ist $A = E_n$.	☐ Ja	☐ Nein

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Invertieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.
Dokumentieren Sie genau, welche Umformungen Sie in jedem Schritt vornehmen und geben Sie am Ende die Matrix A^{-1} explizit an. *(4 Punkte)*

10 Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie die Eigenwerte von A an. *(1 Punkt)*

(ii) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A. *(2 Punkt)*

(iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. *(2 Punkt)*

(iv) Ist A in $\mathbb{F}_3^{4\times 4}$ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*

11 Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist V ein K-Vektorraum über einem Körper K und sind u, v und w Vektoren aus V mit der Eigenschaft, dass jedes der Paare (u, v), (u, w) und (v, w) linear unabhängig ist, dann ist auch die Folge (u, v, w) linear unabhängig. *(4 Punkte)*

12 Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Abbildung, die durch die Vorschrift $\varphi(B) = B \cdot A$ (normales Matrixprodukt!) für alle $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist. *(1 Punkt)*

(ii) Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(2 Punkte)

(iii) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an. *(2 Punkte)*

(iv) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an. *(2 Punkte)*

13 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. Das Minimalpolynom von A sei gleich X^{n-1}. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von A gleich X^n ist. *(4 Punkte)*