# Gruppe A

## Scheinklausur, 2. Teil, 15.2.2002

## Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und $\mu_A$ ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist der Grad von $\mu_A$ gleich $1$, dann ist $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist $K = \mathbb{R}$ und $\mu_A = X^3 - 6X^2 + 9X$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $\mu_A = X - 1$, dann ist $A = E_n$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| 2 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und $\chi_A$ ihr charakteristisches Polynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $\chi_A = X^n$, dann existiert eine Zahl $m$ mit $1 \leq m \leq n$, so dass $A^m = 0$ ist. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, Sp $A = 0$ und det $A < 0$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| 3 | Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$ mit $n \geq 4$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$, dann ist $(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ linear unabhängig, dann existiert ein $v \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ eine geordnete Basis von $V$ ist. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Es existiert ein $4$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nur Untervektorräume der Dimensionen $0$, $2$ und $4$ hat. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| 4 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, $\chi_A$ ihr charakteristisches Polynom und $\mu_A$ ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $A$ diagonalisierbar und $\chi_A = (X-1)^n$, dann ist $A = E_n$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist $A$ ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Es seien $K$ ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Falls für $A$ gilt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine $1$ und sonst lauter Nullen stehen, so ist $\det A \in \{1, -1\}$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist die Determinante von $AB$ ungleich Null, dann sind $A$ und $B$ beide invertierbar. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\pi$ eine beliebige Permutation auf $n$ Ziffern, dann hat die Permutation $\pi \circ \pi$ das Signum $1$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper $K$ in der Unbestimmten $X$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | $K[X]$ ist ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $\mathcal{A}$ eine $K$-Algebra, dann gibt es zu jedem $a \in \mathcal{A}$ genau einen $K$-Algebren-Homomorphismus $\varphi : K[X] \to \mathcal{A}$, für den $\varphi(X+1) = a$ gilt. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Jedes normierte Polynom $p \in K[X]$ kann als ein Produkt normierter, irreduzibler Polynome geschrieben werden. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, w) \neq 0$ ist. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, v) = -1$ ist. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Sind $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ und gilt $\beta(v, w) = 0$, dann sind $v$ und $w$ linear unabhängig. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\varphi$ ein $K$-Endomorphismus von $V$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Jeder Eigenvektor von $\varphi$ spannt einen $\varphi$-invarianten Untervektorraum auf. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | Falls die Dimension des Kerns von $\varphi$ größer als $1$ ist, so ist die Dimension des Eigenraums von $\varphi$ zum Eigenwert $0$ mindestens $2$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |
| | $\varphi$ hat einen Eigenwert. | ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein |
| | Jede Nullstelle des Minimalpolynoms von $\varphi$ ist ein Eigenwert von $\varphi$. | $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein |

<table>
<tr><td colspan="2">Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.<br>Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.<br>Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Invertieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.<br>Dokumentieren Sie genau, welche Umformungen Sie in jedem Schritt vornehmen und geben Sie am Ende die Matrix $A^{-1}$ explizit an. *(4 Punkte)*</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$ und geben Sie die Eigenwerte von $A$ an. *(1 Punkt)*<br>
(ii) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von $A$. *(2 Punkt)*<br>
(iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $A$. *(2 Punkt)*<br>
(iv) Ist $A$ in $\mathbb{F}_3^{4\times 4}$ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist $V$ ein $K$-Vektorraum über einem Körper $K$ und sind $u$, $v$ und $w$ Vektoren aus $V$ mit der Eigenschaft, dass jedes der Paare $(u, v)$, $(u, w)$ und $(v, w)$ linear unabhängig ist, dann ist auch die Folge $(u, v, w)$ linear unabhängig. *(4 Punkte)*</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Abbildung, die durch die Vorschrift $\varphi(B) = B \cdot A$ (normales Matrixprodukt!) für alle $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist. *(1 Punkt)*<br>
(ii) Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung $\varphi$ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

*(2 Punkte)*<br>
(iii) Geben Sie eine Basis von Kern($\varphi$) an. *(2 Punkte)*<br>
(iv) Geben Sie eine Basis von Bild($\varphi$) an. *(2 Punkte)*</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. Das Minimalpolynom von $A$ sei gleich $X^{n-1}$. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von $A$ gleich $X^n$ ist. *(4 Punkte)*</td></tr>
</table>

# Gruppe B

## Scheinklausur, 2. Teil, 15.2.2002

## Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja" oder „Nein" oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Zu jedem $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, w) \neq 0$ ist. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| | Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\beta(v, v) = -1$ ist. | $\square$ Ja | $\boxed{\square}$ Nein |
| | Sind $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$ und gilt $\beta(v, w) = 0$, dann sind $v$ und $w$ linear unabhängig. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| 2 | Es seien $K$ ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Falls für $A$ gilt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine $1$ und sonst lauter Nullen stehen, so ist $\det A \in \{1, -1\}$. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| | Ist die Determinante von $AB$ ungleich Null, dann sind $A$ und $B$ beide invertierbar. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| | Ist $\pi$ eine beliebige Permutation auf $n$ Ziffern, dann hat die Permutation $\pi \circ \pi$ das Signum $1$. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| 3 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und $\chi_A$ ihr charakteristisches Polynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $\chi_A = X^n$, dann existiert eine Zahl $m$ mit $1 \leq m \leq n$, so dass $A^m = 0$ ist. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| | Ist $\chi_A = (X - 1)^n$, dann ist $A = E_n$. | $\square$ Ja | $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, Sp $A = 0$ und $\det A < 0$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| 4 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, $\chi_A$ ihr charakteristisches Polynom und $\mu_A$ ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $A$ diagonalisierbar und $\chi_A = (X - 1)^n$, dann ist $A = E_n$. | $\boxed{\square}$ Ja | $\square$ Nein |
| | Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | $\square$ Ja | $\boxed{\square}$ Nein |
| | Ist $\mu_A = \chi_A$, dann ist $A$ ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. | $\square$ Ja | $\boxed{\square}$ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper $K$ in der Unbestimmten $X$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | $K[X]$ ist ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\mathcal{A}$ eine $K$-Algebra, dann gibt es zu jedem $a \in \mathcal{A}$ genau einen $K$-Algebren-Homomorphismus $\varphi : K[X] \to \mathcal{A}$, für den $\varphi(X+1) = a$ gilt. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes normierte Polynom $p \in K[X]$ kann als ein Produkt normierter, irreduzibler Polynome geschrieben werden. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 6 | Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\varphi$ ein $K$-Endomorphismus von $V$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Jeder Eigenvektor von $\varphi$ spannt einen $\varphi$-invarianten Untervektorraum auf. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Falls die Dimension des Kerns von $\varphi$ größer als 1 ist, so ist die Dimension des Eigenraums von $\varphi$ zum Eigenwert 0 mindestens 2. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | $\varphi$ hat einen Eigenwert. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jede Nullstelle des Minimalpolynoms von $\varphi$ ist ein Eigenwert von $\varphi$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 7 | Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$ mit $n \geq 4$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$, dann ist $(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ linear unabhängig, dann existiert ein $v \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ eine geordnete Basis von $V$ ist. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Es existiert ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nur Untervektorräume der Dimensionen 0, 2 und 4 hat. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 8 | Es sei $K$ ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix und $\mu_A$ ihr Minimalpolynom. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist der Grad von $\mu_A$ gleich 1, dann ist $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $K = \mathbb{R}$ und $\mu_A = X^3 - 6X^2 + 9X$, dann ist $A$ diagonalisierbar. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\mu_A = X - 1$, dann ist $A = E_n$. | ☐ Ja ☐ Nein |

Scheinklausur 2. Teil, WS 2001, **Gruppe B**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**9** Invertieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens.
Dokumentieren Sie genau, welche Umformungen Sie in jedem Schritt vornehmen und geben Sie am Ende die Matrix $A^{-1}$ explizit an. *(4 Punkte)*

**10** Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$ und geben Sie die Eigenwerte von $A$ an. *(1 Punkt)*

(ii) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von $A$. *(2 Punkt)*

(iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $A$. *(2 Punkt)*

(iv) Ist $A$ in $\mathbb{F}_3^{4\times 4}$ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*

**11** Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist $V$ ein $K$-Vektorraum über einem Körper $K$ und sind $u$, $v$ und $w$ Vektoren aus $V$ mit der Eigenschaft, dass jedes der Paare $(u, v)$, $(u, w)$ und $(v, w)$ linear unabhängig ist, dann ist auch die Folge $(u, v, w)$ linear unabhängig. *(4 Punkte)*

**12** Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Abbildung, die durch die Vorschrift $\varphi(B) = B \cdot A$ (normales Matrixprodukt!) für alle $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist. *(1 Punkt)*

(ii) Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung $\varphi$ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

*(2 Punkte)*

(iii) Geben Sie eine Basis von Kern($\varphi$) an. *(2 Punkte)*

(iv) Geben Sie eine Basis von Bild($\varphi$) an. *(2 Punkte)*

**13** Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. Das Minimalpolynom von $A$ sei gleich $X^{n-1}$. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von $A$ gleich $X^n$ ist. *(4 Punkte)*